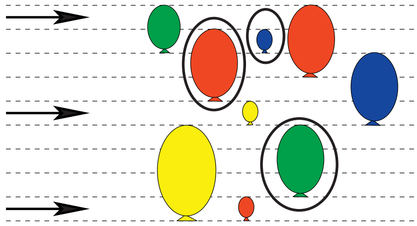
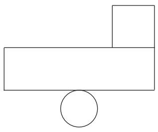
Svar och lösningar – Benjamin

1: D: 3



2: E



3: B 18 — Pilarna i den första omgången ger 7 poäng vardera.
I den andra omgången ger den bästa pilen 2 poäng mer, dvs 9 poäng.
Tredje omgången ger då $2 \cdot 9$ poäng = 18 poäng.

4: B B — I punkt B har den långsamma snigeln gått 8 rutor och den snabba har gått 16 rutor. B är den enda punkt där sträckan är dubbelt så lång för den snabba snigeln.
Eftersom förhållandet mellan de sträckor som sniglarna avverkar är 1:2 måste hela sträckan, dvs 24 rutor, delas i 3. En del till den långsamma och två delar till den snabba.

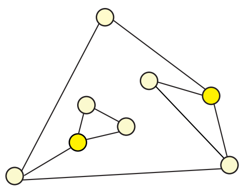
5: D 13 — Den enda möjliga subtraktionen är **53** – **28** = **25** som ger siffersumman $5 + 8 = 13$

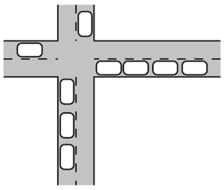
6: E söndag — Eftersom den första dagen är en onsdag så är 7, 14, 21 och 28 tisdagar.
$21 + 5 = 26$ och $28 - 2 = 26$, så den 26:e infaller på en söndag.
Eller: Eftersom vi söker 26 så backar vi en vecka i taget tills vi kommer till datum där vi vet veckodagen: $26 - 7 - 7 - 7 = 5$, alltså söndag, eller tre veckor direkt $26 - 21 = 5$.

7: C 7 — Det sämsta tänkbara utfallet är att vi slår olika resultat sex gånger, men sen måste något upprepas.

8: C 12 cm — Eftersom sidlängden på den minsta kvadraten är 6 cm är sidlängden på den mellanstora kvadraten $6 + 2 = 8$ cm.
Den största kvadraten har då sidlängden 8cm + 6cm – 2 cm = 12 cm.

9: A 2

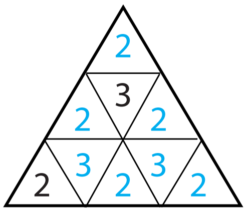


10: B  Om vi räknar hur många bilar som ska åt varje håll så finner vi rätt svar.

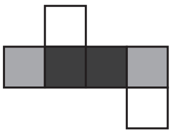
11: A dörr 1. Dörren har texten: Lejonet ligger inte bakom den här dörren. Eftersom upplysningen på dörr 3 är sann, är båda de andra osanna.

12: B 45 år Mormoderns ålder är nu $81-28=53$ år. När Kate föddes var hon $53-8=45$ år.

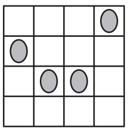
13: C 21 När alla trianglar är ifyllda ser det ut så här.
Två rutor intill varandra har överallt summan 5.

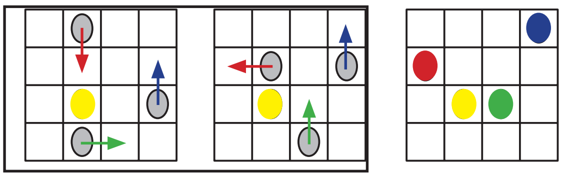


Två trianglar som har en gemensam sida kallar vi grannar. Det måste stå samma tal i alla trianglar som är grannar till en triangel, så alla grannar till en triangel med 2 måste ha samma tal och alla trianglar som är grannar till en triangel med 3 måste ha samma tal.
Därför kan triangeln bara fyllas i på ett sätt.

14: E 

15: A 0 Summa av två tresiffriga tal är alltid mindre än 2000.
Alltså måste D vara 1 och hela summan 1111.
Då ser vi att $A+C$ har entalssiffran 1, så $A+C$ är 1 eller 11.
Om $A+C$ är 1 skulle aldrig summan bli fyrsiffrig, alltså $A+C=11$.
Med $B=0$ (och $A+C=11$) får vi summan 1111, med $B>0$ skulle vi få summan större än 1111.

16: A  Flyttingen kan visas så här:



Flyttning vid den tredje visslingen | Flyttning vid den fjärde visslingen | Efter fjärde visslingen

17: C 2 Den enda möjligheten att få summan 7 med tre olika tal är $1+2+4$.
Summan 8 kan vi få på två sätt: $1+2+5$ eller $1+3+4$.
Båda dessa sätt ger att de har två gemensamma tal.

18: C C

$A + D = B + C + E$ innebär att de fem vikterna ska delas i två grupper. Tillsammans väger kulorna 260 g, så varje grupp ska väga 130 g. Den tyngsta kulan kan alltså inte vara C, B eller E men den lättaste kulan, som väger 30 g, måste vara någon av dem.
Eftersom B + E väger mer än A + C, måste det vara C som väger 30 g.
Om A väger 50 g och C 30 gram och de två kulorna E och B väger 50 g vardera, så stämmer alla vågar:
A, B och E väger 50 g vardera, C väger 30 g och D väger 80 g.

19: A Adam

Oavsett om Adam kastar till Urban eller Isak så kommer den att vara hos Adam så att han får göra det femte kastet.

Eva ⟶ Adam
Adam ⟶ *Isak*/Urban
Isak/Urban ⟶ *Urban*/Isak
Urban/Isak ⟶ Adam

20: D 200 cm

Kvadraten består av en bit som är 8×8 cm, 4 bitar som är 8×16 cm och fyra bitar som är 8×32 cm.
Tillsammans är dessa bitar $8\text{ cm} + (4 \cdot 16\text{ cm}) + (4 \cdot 32\text{ cm}) = 200\text{ cm}$

21: B 21

Varje 2×2 kvadrat ska innehålla både nollor och ettor, alltså minst en nolla. Hela tabellen innehåller 4 st 2×2 kvadrater som inte överlappar varandra (dessa kan väljas på olika sätt) alltså måste hela rutan innehålla minst 4 nollor.
Den behöver inte innehålla fler än 4 nollor.
Bilden visar det sätt som ger flest ettor.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Hur vi än väljer vår 2×2 ruta kommer den att innehålla en nolla.

22: C 30 cm^2

De tre kvadraterna har sidlängderna 3, 4 och 5 cm.

Triangelns area är därför $\frac{12 \cdot 5}{2}$ cm^2.

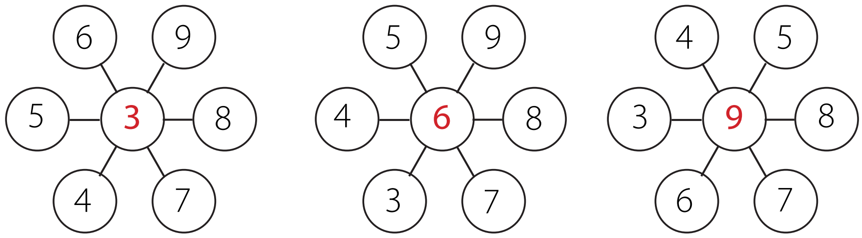
23: D 24

Antal lästa böcker är totalt 52 st. 10 elever har läst 30 böcker tillsammans och 8 elever har läst 16, alltså har 18 elever läst 46 böcker.
Då återstår 6 böcker till resten av klassen.
Klassen består alltså av $10 + 8 + 6 = 24$ elever.

10 elever läste som vi vet alla 3 böcker, men sen finns det flera möjligheter, t ex: 6 st har läst den blå och den gröna, 2 st har läst den blå och den gula, 2 bara den blå, 2 bara den gula och 2 bara den gröna.

24: E 18

Summan av alla tal är 42, vilket är delbart med 3. 42/3=14.
Eftersom talet i mitten ska ingå i alla tre summorna måste det vara delbart med 3. Det betyder att 3, 6 och 9 kan stå i mittcirkeln.
De tre tvärsummorna ska vara lika och om vi tar bort mittentalet, som ju är detsamma för alla tre tvärsummor, kommer de summor som bildas av de två yttre cirklarna också att vara lika.
Dessa tre lika summor är tillsammans ett tal som är delbart med 3.
Därför måste också mittentalet vara delbart med 3 när totalsumman (42) är delbar med 3.



I första lösningen är summan av talen i de yttre cirklarna 13. $13 \cdot 3 = 39$ och $39 + 3 = 42$.
I andra lösningen är summan 12. $12 \cdot 3 = 36$ och $36 + 6 = 42$
I tredje lösningen har vi på motsvarande sätt $11 \cdot 3 = 33$ och $33 + 9 = 42$.

Arbeta vidare med Benjamin 2018

Efter tävlingen hoppas vi att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna arbeta med lösningarna i grupp. Uppmuntra dem att hitta så många olika lösningssätt som möjligt. Låt dock alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
– Påminner problemet om något annat problem vi har löst tidigare?
– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
– Vilka nya frågor kan problemet väcka?
– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?”

Matematiskt arbete handlar både om matematikinnehållet och om strategier, vilket eleverna behöver få diskutera för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att *resonera och argumentera* vara centrala. Om inte tydliga resonemang kommer fram i elevernas redovisningar kan du visa hur ett sådant kan föras. Eleverna behöver få se vad det innebär att föra ett resonemang.

I samband med diskussion om problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under rubrikerna *Tal, Geometri och rumsuppfattning, Sannolikhet* samt *Problemlösning och resonemang.* Vi ha rockså två problem som vi kommenterar under rubriken *Matematik och programmering.* Naturligtvis kan problemen också passa under en annan rubrik än den vi har valt, beroende på vad vi väljer att betrakta i problemet. Ett bra sätt att själv bilda sig en uppfattning om ett problems kvaliteter är att lösa det. Då blir vi medvetna om hur vi själva tänker och vilka samband vi använder. Lös därför gärna problemen själv och komplettera dessa förslag med egna idéer.

Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade. Där finns också förslag på hur man kan arbeta vidare med de problemen.

Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Elever i denna ålder kan resonera om bl a räknesättens innebörd, faktorisering och delbarhet. Problemen utmanar också elevernas strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra därför eleverna att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden.

3 Pilkastning

Om ingen elev har använt sig av en tabell kan du visa, t ex:

Omgång:	1	2	3
Ring 1 (ytterst)	0	0	0
Ring 2	?+?	?	0
Ring 3	0	?	?+?
Totalt	14	16	___

Fyll sedan i tabellen gemensamt och låt eleverna motivera sina förslag. Lägg till omgångar och utöka antalet pilar. Variera poängen så att eleverna får använda sina strategier på flera liknande problem.

Ett liknande problem finns i år på både Milou och Ecolier.
Tidigare problem: E 2008:9; E 2011:7; E 2014:8; B 2008:11.

4 Snabba sniglar

Problemet kan vid en ytlig betraktelse uppfattas som geometriskt, men handlar främst om hastighet och tal. Visa hur man i en grafisk lösning kan markera sträckan runt med ett eller två (dubbelt så snabbt) steg i taget och se var mötet sker.

Undersök hur stor del av det totala antalet steg runt området som de två sniglarna kryper. Variera antalet rutor och se efter mönster. Om den ena snigeln kryper dubbelt så fort kommer den att tillrygglägga två tredjedelar av sträckan samtidigt som den andra snigeln kryper en tredjedel. Varför? Vilka olika antal rutor (eller snarare sidlängder längs kanten) ger en lösning där sniglarna möts i ett ruthörn?

Om ett antal ska delas i två delar så att en del blir dubbelt så stor som den andra måste antalet vara delbart med 3. Varför?

Vad krävs för att antalet ska kunna delas i två delar där den ena delen är tre gånger så stor som den andra? Generalisera.

I originalversionen hade sniglarna hastigheterna 1 m/h och 2 m/h. För in dessa värden i problemet och diskutera vad de betyder. Låt eleverna lösa problemet igen och motivera varför svaret blir detsamma. Ändra den ena snigelns hastighet och diskutera resultatet.

Sätt en sidlängd på kvadraterna och låt eleverna beräkna när sniglarna befinner sig i de olika punkterna om de kryper med olika givna hastigheter, t ex 2 m/h och sidlängden 1 m, 3 m/h och sidlängden 1 m.

I årets Milou är nr 16 ett besläktat problem:

En sjörövare har två kistor. I den vänstra ligger det 10 guldmynt. Den andra är tom.
I morgon ska sjörövaren lägga 1 guldmynt i den vänstra kistan och 2 guldmynt i den andra.
Sen fortsätter han så varje dag tills det är lika många mynt i båda kistorna.
Hur många dagar tar det?

5 En övermålad subtraktion och 15 Addition med bokstäver

Uppmärksamma terminologin: tusentalssiffra, hundratalssiffra, tiotalssiffra, entalssiffra och minnessiffra. Jämför olika lösningsmetoder.

Ett sätt är att pröva och utgå från en genomtänkt gissning. I problem 5 kan vi gissa att första termen är 53: 53 – 20 = 33. Eftersom 33 är 8 för mycket måste vi ta bort ytterligare 8, dvs andra termen blir 28.

– Vilka tal är det meningsfullt att pröva med som första term? Varför?

Ett annat sätt är att resonera sig fram till en lösning: Vad vet vi om entalssiffran i andra termen?

Problem 15 kan också lösas genom att man prövar sig fram, men det passar här bra att föra ett resonemang om vilka möjligheter som finns.

– Vilken siffra måste D stå för? Varför?
– Vad vet vi om A + C? Vad vet vi om C + A?
Alla siffror i svaret och minnessiffran = 1.
– Varför kan inte B vara 5?

Diskutera när olika lösningsmetoder passar. Visa eleverna att de har stor nytta av att ha automatiserat tabellerna i addition och subtraktion. Låt eleverna konstruera liknande uppgifter till varandra för att öva dessa grundläggande kombinationer i ett lite mer kreativt sammanhang.

Liknande problem från årets tävling:

I Ecolier 12 saknas en siffra i vardera termen: __2 + 3__ = 57
I Cadet 11 saknas en siffra i vardera faktor och en i produkten: __3 · 2__= 3__2
I Cadet 4 ska vi ersätta * med ett tal för att få ett korrekt uttryck: $2 \cdot 18 \cdot 14 = 6 \cdot * \cdot 7$

Tidigare problem: E 2013:2; B 2003:9; B 2004:14; B 2005:1; B 2007:16; B 2010:1; B 2015:19; C 2001:13; C 2003:22.

6 En fläckig kalender

Diskutera hur man snabbt kan bestämma vilket datum det är om en vecka, två veckor om man vet dagens datum.

– Om onsdag är den sjätte dagen, vilken är den första? Vilken är den sjunde? Åttonde?
– Om 1:a är en onsdag, vilken veckodag är då 7:e?

Undersök almanackan med avseende på veckodag och datum. Uppmärksamma att 1, 1 + 7, 8 + 7, 15 + 7, 22 + 7 är samma veckodagar (alltså inte 1, 7, etc).

– Vilka datum ligger på måndagar, tisdagar etc i kalendern i problemet?
– Hur många söndagar kan det som mest finnas i en månad? Som minst?

Undersök hur ett visst datum infaller på veckodagar under ett antal på varandra följande år.

– Jag fyller år på en söndag i år, vilken veckodag fyller jag då år på nästa år? Varför?
Blir det alltid så? Prata om skottårens betydelse. När fyller den som är född 29 februari år på ”rätt datum”?

Låt eleverna konstruera egna problem med kalendern.

Tre problem i år, med olika svårighetsgrad, handlar om ett almanacksblad där de flesta datum är dolda av en stor fläck. Problemen är förutom detta i Benjamin också Ecolier nr 14, och Student nr 1.

Tidigare problem med kalendrar och veckodagar: M 2008:3; E 2011:1; B 2006:19, C 2002:15.

12 Mormors ålder

Illustrera åldrarna på en tallinje och se på skillnaden i ålder.

- När är Kate, mamma och mormor födda om Kate är 8 år i år?
- När fyller Kate 100 år?
- Vilken är summan av deras åldrar?
- Hur gammal var mormor när Kates mamma föddes?
- Hur gammal var Kates mamma när Kate föddes.

Problemet går förstås att lösa med ekvation

Här är K = Kates ålder, M = mammas ålder och B = mormors ålder:
K = 8, M = 28, B = ?
M + B = 81
B = 81 – 28
B = 53
B:s ålder då K föddes = 53 – 8 = 45 år

Låt eleverna göra liknande problem med sin egen familj, eller med någon fantasifamilj.

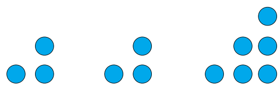
Liknande problem: B 2001:16, C 2001:24.

17 Masha och Dasha summerar

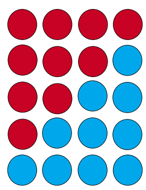
Vilken är den minsta summa man kan få om man väljer tre olika tal? Vilken är den största summan man kan få? Skriv upp alla möjliga summor av tre olika tal och jämför hur många gemensamma tal som ingår i två summor.

- Vilka summor kan man få om man väljer fyra olika tal ur den givna listan? Vilken är den minsta?
- Vilka summor kan man få om man väljer fem olika tal? Sex olika tal?

Behandla triangeltal, 1 + 2; 1 + 2 + 3; 1 + 2 + 3 + 4; …. Förläng listan och räkna ut de följande triangeltalen. Visa att talen kan illustreras som trianglar.



Visa att $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$



Tidigare problem: E 2009:8; B 2007:19; B 2008:15, B 2009:16.

18 Kulvägning

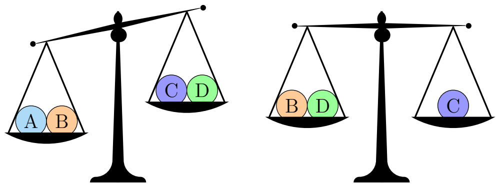
Även detta problem handlar om summor som vi kan få på olika sätt. Vilka olika summor kan vi få med tre kulor? Med två kulor? Diskutera elevernas olika strategier. Lyft fram sådana som bygger på ett resonemang om de ingående talen. Eleverna behöver få vara med om gemensamt resonemang, så att de får erfarenhet av hur ett sådant kan byggas upp. Ställ frågor som hjälper eleverna att bygga upp ett resonemang, t ex:

- Hur mycket väger kulorna tillsammans?
- Hur mycket finns det i vardera vågskålen i vågen längst till höger?
- Hur kan vi veta att det inte är A som väger 80 g?
- Hur vet vi att varken A eller D väger 30 g?
- ….

Ecolier 20 i år är ett liknande problem, men något enklare. Använd det antingen som inledning och arbeta gemensamt med resonemanget eller låt eleverna försöka klara det på egen hand efter att ni har bearbetat Benjaminproblemet gemensamt. Även årets Milou 15 är ett liknande problem.

En av kulorna väger 10 g, en väger 20 g, en 30 g och en väger 40 g.

Vilken kula väger 30 g?



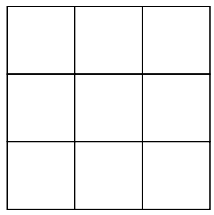
Tidigare problem: B 2006:18; B 2012:9; B 2015:9.

24 Tal i cirklar

Vilken strategi kan man ha för att lösa ett sådant här problem? Det är alltid bra att börja med att summera talen. I det här problemet blir summan 42. Utifrån det kan vi resonera eller pröva oss fram. Årets Cadet 17 är ett liknande problem:

Talen 1 till 9 ska skrivas i rutorna, ett tal i varje ruta.
Fem av de summor man får då varje rad och varje kolumn adderas är 12, 13, 15, 16 och 17 (ej nödvändigtvis i denna ordning).
Vilken är den sjätte summan?

A: 17 B: 16 C: 15 D: 14 E: 13



Även här börjar vi med att summera talen. Summan blir 45. När rader och kolumner adderas var för sig kommer varje tal att räknas två gånger. Alltså är summan av radsummor och kolumnsummor 90. Visa att det går att fylla i nätet så att summorna stämmer.

Tidigare problem: B 2002:22, B 2010:10.

Geometri och rumsuppfattning

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan. I geometri spelar också bilden en väsentlig roll, som underlag för kommunikation och som stöd för tanken. Med stigande ålder hos eleverna bör vi också ställa större krav på hur de använder bilder och vilka slutsatser man kan dra av bilderna. Många problem går förstås att lösa konkret, men det konkreta arbetet, i samband med diskussion av lösningar, bör kombineras med samtal så att det konkreta ger stöd för tänkandet. Det är resonemanget som är centralt. Det konkreta arbetet kan också användas för att bekräfta lösningar och för att skapa nya erfarenheter att bygga vidare på.

Att redovisa en lösning av ett geometriproblem kan vara svårt. Lösningen ska vara skriven så att läsaren förstå. Hur bör en lösning av ett geometriproblem se ut? Börja gärna med enklare problem. Finns det ingen figur bör lösningen inledas med att en tydlig figur ritas, beteckningar införs och att det som är givet markeras. Finns det en figur så är den ett underlag för redovisning. I den skriftliga redovisningen hänvisar man till beteckningarna i figuren. Hur markerar man t ex att en vinkel är rät eller att två vinklar är lika stora? Det går inte att hänvisa till att en vinkel är rät eller till att två vinklar *ser* lika stora ut om man inte har fått veta att det är så.

Det kan vara lättare att förklara sina tankegångar muntligt. Låt eleverna göra en muntlig redovisning först och sedan formulera en skriftlig lösning.

1 Pilar mot ballonger

Bilden kan vara utgångspunkt för en diskussion om både storlek och läge. Använd bilden för att diskutera längdskala och areaskala, och om det passar även volymskala.

– Hur många olika storlekar har ballongerna?
– Hur mycket större är den största ballongen jämfört med den minsta?
– Var ligger ballongerna i förhållande till varandra?

Låt eleverna uttrycka ballongernas placering så noggrant som möjligt, med hjälp av ord. Be dem sedan att komma på ett annat sätt att beskriva läget. Om ni redan har arbetat med koordinatsystem så kommer de troligen på att de kan göra ett sådant i bilden, annars kan detta vara en introduktion.

Använd bilden som en spelplan till ett ”sänka skepp”-liknande spel. I vilka punkter kommer varje ballong att träffas? Det räcker med en träff för att ballongen ska spricka.

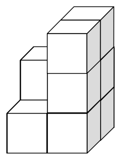
2 Konstruktion ur annat perspektiv

Den här typen av problem har förekommit tidigare, inte minst i Milou och Ecolier. Låt eleverna först beskriva de tre klossarna och deras placering.

För att diskutera bitarnas placering behöves flera begrepp, t ex mittpunkt, vänster, höger, kant, kortsida, långsida, cylinder, rätblock, kub, cirkel, rektangel, kub. För att utveckla språk och terminologi inom detta område kan eleverna arbeta i par, med en skärm emellan sig eller placerade så att de inte ser varandras arbeten. Den ena bygger av ett antal givna klossar eller föremål en konstruktion som den andra sedan ska kopiera, endast med hjälp av muntliga instruktioner. Uppgiften kan varieras i svårighetsgrad genom val av föremål, genom restriktioner om hur informationen får överföras – det blir enklare om den som bygger får ställa frågor. Uppgiften blir svårare om eleverna sitter mitt emot varandra jämfört med om de sitter bredvid varandra. Motsvarande uppgift kan också göras utifrån en bild som den ena eleven ritar.

Gör flera aktiviteter där en konstruktion ska beskrivas som en tvådimensionell bild. Låt eleverna bygga och göra beskrivningar åt varandra.

Ett sätt att beskriva ett bygge med likadana klossar fanns i Milou 2009:12. Låt eleverna först få tolka bilden och sedan bygga och göra liknande ritningar.



2	3
1	3

I slöjden har eleverna troligen mött ritningar där man betraktar sin konstruktion framifrån, uppifrån och från sidan. Vad kan man se och vad kan man inte se?

Hur ser något ut från baksidan? Utgå från ett fotografi och låt eleverna rita hur situationen ser ut från andra sidan eller uppifrån.

Ett roligt problem, som visade sig vara mycket utmanande, var med i Kängurutävlingen 2003. Problemet presenterades sedan på Uppslaget i Nämnaren nummer 3, 2003, under rubriken *Tänk, vik och se.* Det finns fritt tillgängligt på ArkivN som du finner på ncm.gu.se.

Fler problem: E 2001:12; E 2002:15; E 2004:18; E 2006:2; E 2007:11; E 2007:15; E 2009:4; B 2001:23 & 24; B 2006:16; B 2008:8; B 2011:2; B 2013:2; B 2014:8; B 2016:6; B 2017:4; C 2003:11; C 2014:6; C 2016:21.

8 Tre kvadrater

Diskutera hur de andra sidlängderna kan bestämmas. Här är det lämpligt att låta eleverna använda figuren för att redovisa sin lösning.

– Vilken omkrets har de tre kvadraterna?
– Vilken area?
– Vilken omkrets har hela figuren?
– Vilken area har figuren?

– Vilken är den största omkrets vi kan få om de tre figurerna placeras på ett annat sätt?
– Vilken är den minsta möjliga omkretsen?

Låt eleverna undersöka hur figuren och sidorna på kvadraten ändras om sträckan 2 cm ändras. Ändra till annan sidlängd på den minsta kvadraten. Låt den största kvadraten ha en given sidlängd och bestäm den minsta kvadratens sidlängd. Generalisera: Låt den minsta kvadraten ha sidan *a* cm. Behåll den markerade sträckan 2 cm. Låt eleverna skriva uttryck för sidorna i kvadraterna och även bestämma uttryck för kvadraternas areor. Ersätt även sträckan 2 cm med en variabel t ex *b*.

Tidigare problem: B 2006:13; B 2015:7, B 2017:15.

14 En utvikt tärning

Att i huvudet vika ihop en tärning kan vara utmanande för många. Vilka sidor hamnar intill varandra och vilka blir motstående? Låt eleverna beskriva vad som händer när de viker de olika alternativen. De får då anledning att använda ett antal relevanta termer som kant, sida eller sidoyta, motstående, närliggande.

– Vilken roll har de två utstickande bitarna på varje ritning? Var kommer de sidorna att hamna?
– Hur vet vi det?

Gå igenom de olika alternativen och bestäm vilka sidor som är motstående.

Försök att först göra uppgiften endast med hjälp av bild och resonemang, men gör den sedan konkret och jämför.

Tidigare problem: E 2004:12; E 2008:18; E 2015:17; B 2006:6; B 2015:13; C 2015:4.

20 En uppsågad träplanka

Arbeta konkret med problemet: Ge eleverna en förstoring av bilden. Om du vill använda problemet för att också diskutera skala kan du anpassa förstoringen så att det blir enkelt att hantera måtten.

Låt eleverna sen rita en pappersremsa med en bredd som ska motsvara 8 cm, och som ska passa in i den förstorade bilden. Här kan alltså begreppet skala komma in. Klipp ut den lilla kvadraten och placera den i bilden.

– Vilka sidor i rektanglarna har samma längd som kvadratens sida? Markera och sätt ut längderna.

Låt eleverna klippa ut de rektanglar som har längden 16 cm.

– Hur många sådana rektanglar behövs? Lägg ut rektanglarna kring kvadraten.
– Vilken figur bildar kvadraten och de fyra rektanglarna?
– Hur lång är sidan på denna?
– Vilken längd har de rektanglar som nu saknas? Klipp ut dem och lägg klart kvadraten.

Bestäm remsans längd genom att lägga ut alla delar efter varandra.
Diskutera andra sätt att bestämma längden, utan att lägga kvadraten och rektanglarna efter varandra.

Diskutera gemensamt hur vi kan bestämma storleken på den lilla kvadraten endast utifrån bilden.

– Vilka sidor i rektanglarna har samma längd som kvadratens sida?
– Hur kan vi använda den informationen för att bestämma längden av rektanglarna?

– Vilken area har den lilla och den stora kvadraten?
– Vilken omkrets har kvadraterna?
– Vilken omkrets har träplankan?
– Vilken area?
– Hur vi kan vi veta träplankans area utan att göra en ny beräkning om vi vet stora kvadratens area?

Att arean inte ändras när vi delar ett område och flyttar bitarna är centralt för att förstå areabegreppet.

Om vi återgår till problemets kvadrat och ritar fyra nya rektanglar med samma bredd och placera dessa runt kvadraten kan vi konstruera en ännu större kvadrat.

– Vilket mått har de rektanglarna?
– Vilken sida får den nya kvadraten?

Låt eleverna skriva numeriska uttryck för rektanglarnas längder för att se ett mönster.
Kvadratens sida är 8 cm, de fyra inre rektanglarnas längd är $2 \cdot 8$ cm,
de fyra yttre rektanglarnas längd är $4 \cdot 8$ cm.
Plankans sammanlagda längd blir då $(8 + 4 \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 8)$ cm $= 25 \cdot 8$ cm $= 200$ cm.

Generalisera: Sätt sidlängden på lilla kvadraten till 1 och bestäm övriga längder. Ändra kvadratens sida till x cm och skriv uttryck om det är en kvadrat och fyra rektanglar, en kvadrat och åtta rektanglar osv.

Två problem från grannklasserna påminner om detta problem:

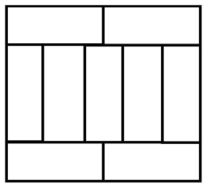
Ecolier 24

Den stora rektangeln är gjord av 7 kvadrater, av olika storlek.
Det finns tre små kvadrater, som är lika stora.
En sådan liten kvadrat har arean 1.
Vilken area har hela den stora rektangeln?

Låt eleverna arbeta med enhetskvadrater och konstruera rektangeln. Utgå från de tre givna enhetskvadraterna och rita enhetskvadrater så att nästa kvadrat bildas. Hur många enhetskvadrater är det sammanlagt? Vilken area har rektangeln som består av 12 enhetskvadrater? Fortsätt att rita fler enhetskvadrater så att figuren växer fram.

Cadet 8:

En stor rektangel är uppbyggd av nio identiska rektanglar vars längsta sida är 10 cm.
Vilken omkrets har den stora rektangeln?



Några ytterligare problem: B 2006:13; B 2015:12, C 2006:16; C 2011:22; C 2016:9,

22 Area av en triangel

Låt eleverna redovisa sina lösningsmetoder. Det finns åtminstone två skilda sätt att angripa problemet.
Vi kan bestämma kvadraternas sidors längd: 3 cm, 4 cm och 5 cm.
Den som kan formeln för triangelns area kan använda sig av den $\frac{(3+4+5)\cdot 5}{2} = 30$

Den som inte kan denna kan tänka sig en större rektangel med ena sidan $3+4+5$ cm och den andra sidan 5 cm. Diagonalen i en rektangel delar den i två lika stora trianglar, så arean blir 30 cm^2.

Detta är förstås samma idé som i formeln, så för elever som ännu inte har sett formeln kan detta vara ett sätt att möta den. Undersök hur diagonaler delar rektanglar. Låt eleverna motivera varför de två trianglarna är lika stora. Gör detsamma med andra parallellogrammer.

Tidigare problem: B 2008:21.

Sannolikhet

7 Tärningskastet

Här spelar formuleringen stor roll, vi behöver alltså inte ha *ett visst* utfall utan *något* utfall två gånger. Jämför med om formuleringen hade varit:

– Vi kastar en tärning och får en sexa. Hur många gånger måste vi kasta en tärning för att vara säkra på att få samma resultat igen?
– Hur många gånger måste vi kasta en tärning för att vara säker på att få exempelvis en trea två gånger?
–Varför kan vi vara säkra på att få två av något om vi kastar tärningen sju gånger?

Låt eleverna förklara skillnaden mellan de tre frågeställningarna.

– Hur stor sannolikhet är det att vi får en sexa om vi slår en tärning?
– Att vi får en trea?

Tidigare problem: B 2002:19; B 2015:18; B 2017:22; C 2013:5.

Problemlösning och resonemang

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna och hjälp eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. I den processen är resonemang en viktig del.

9 Lysande knappar

Undersök vad som händer om vi trycker på en knapp. Vilka knappar ger flest lysande grannknappar? Det är fyra knappar som är kopplade till tre andra knappar, men det finns ett bästa val, varför?

– Vad händer om varje knapp som tänds i sin tur tänder grannknappar?

Låt eleverna konstruera liknande problem, både där så många knappar som möjligt ska tändas och där så få som möjligt ska tändas.

Tidigare problem: B 2017:4.

11 Lejonet i rummet

I problem av den här typen spelar texten en stor roll. Några hade uppfattat problemet så att frågan gällde vilken information som är sann. Gå igenom texten noga och låt eleverna få tala om vad frågan gäller. Gå sedan igenom och diskutera vilken information vi får. Arbeta systematiskt igenom texterna på dörrarna och jämför med ”bara en av dem är sann”. Pröva sedan :

– Varför är inte alternativ E riktigt?
– Om lejonet ligger bakom dörr 1 – på hur många dörrar är då informationen sann?
– Om lejonet ligger bakom dörr 2 – på hur många dörrar är då informationen sann?
– Om lejonet ligger bakom dörr 3 – på hur många dörrar är då informationen sann?

Motsvarande problem fanns på årets Cadet 13. Jämför formuleringarna:

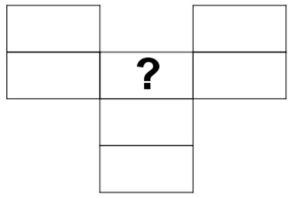
> Ett lejon har gömt sig i ett av tre rum. På första dörren kan man läsa: ”Lejonet är här”, på den andra dörren kan man läsa ”Lejonet är inte här” och på tredje dörren kan man läsa ”$2+3=2\cdot 3$”. Endast en av de tre meningarna är korrekt.
> I vilket rum har lejonet gömt sig?

Tidigare problem: B2011:19; B2013:20.

13 Tal i triangel och 21 Ettor och nollor

Ett antal problem i årets Kängurutävling handlar om tal som ska skrivas in i nät av olika slag, rutor, trianglar, cirklar. Det finns några som liknar varandra men av olika svårighetsgrad. Låt eleverna börja med att lösa Ecolier 23 utan svarsalternativ:

> Lova ska skriva talen 1, 2, 3, 4, 5, 6 och 7 i figuren.
> Två tal som kommer efter varandra i talraden får *inte* stå i två rutor som möts i ett hörn eller längs en kant.
>
> Vad kan hon skriva i rutan med frågetecken?



– Hur många olika sätt finns det att fylla i rutnätet med de sju talen?

Låt eleverna förklara hur de kommit fram till sitt svar. Är alla lösningar lika? Samla alla tänkbara sätt att sätta ut talen. Vad är lika?

– Vad är det för speciellt med talen 1 och 7 i detta problem?

Bygg ut hagen med en ruta nedåt och lägg till talet 8. Vilka tal kan då stå i rutan med frågetecken?

I Benjamin 13 ska vi fylla i ett nät av nio trianglar. Låt eleverna motivera hur nätet ska fyllas i. Ändra 2 och 3 till andra tal och låt eleverna upptäcka att lösningen i princip är densamma, även om summan blir en annan.

Gör egna trianglar och sätt ut två olika tal i två andra rutor. Hur måste rutorna väljas?

Problem 21 är snarlikt, men troligen något svårare. Här behöver vi först identifiera var 2×2 kvadraterna finns, så att vi kan kontrollera att varje sådan innehåller 3 lika tal. Varför är det 3 st ettor vi vill ha?

– Hur många 2×2-kvadrater kan vi hitta i figuren?
– Hur många 3×3? 4×4?

Att undersöka kvadrater på detta sätt kan vara en intressant utveckling av problemet. Vilket mönster finns där? I *Uppslaget* i Nämnaren 1994:4 har Lillemor och Göran Emanuelsson beskrivit en aktivitet på detta tema.

Tidigare problem: E 2014;18; B 2009:12.

19 Bollek

Detta problem passar bra för att jämföra lösningsmetoder. Kanske vill någon utföra lösningen konkret.

– Varför spelar det inte någon roll om Adam kastar bollen till Urban eller Isak.
– Hur påverkas lösningen av om vi i stället frågar ”Vem gör det sjätte kastet?”
Ändra förutsättningarna och undersök.

23 Bokläsning

Diskutera olika lösningsstrategier. Börja med ett enklare fall och illustrera i en tabell:

3 st har läst alla tre böcker, här markerade med I
2 st har läst två av böckerna, markerade med I och I
resten har läst en bok, markerade med I

Gröna boken	Röda boken	Blå boken
IIIII	IIIII	IIII

Undersök hur antalet lästa böcker påverkas av hur många ”resten” är. Ändra sedan antalet som har läst alla tre böcker etc. Med en bild kan strukturen på problemet illustreras. Låt eleverna få konstruera liknande problem själva.

Matematik och programmering

Ett nytt innehåll i matematikundervisningen är programmering. I grundskolan handlar det främst om att lära sig att programmera, medan det på gymnasieskolan handlar om att använda programmering för att lösa matematiska problem. I årets tävling finns det (åtminstone) två problem som skulle kunna programmeras. Problemen kan lösas även på andra sätt och programmeringen kan ske även utan datorer. I detta material beskriver vi inte programmeringen, men vi hoppas att du som provar programmering delar med dig av erfarenheter så att vi kan publicera några sådana exempel, skriv till kanguru@ncm.gu.se. De två problemen är:

10 Korsvägen och 16 Skalbaggarna i rutan

Dessa två problem påminner om varandra då de båda handlar om att tänka sig en förflyttning efter bestämda regler inom ett begränsat område. I problem 10 finns all information i bilden.

Låt eleverna rita in en bil i taget, från startposition till den nya platsen.

– Hur ska bilarna svänga för att de andra svarsalternativen ska bli riktiga?
– Är alla alternativ möjliga?

I problem 16 finns det mycket information i texten. Gå igenom den noga. Hur kan skalbaggarna krypa? De kan alltså inte krypa fram och tillbaka och på så sätt komma till den ruta de kom från, däremot kan de efter ett antal steg komma tillbaka till en ruta som de tidigare har stått i.

Undersök hur många steg skalbaggen som minst måste ta för att komma tillbaka till sin ursprungsruta. Diskutera de olika svarsalternativen.

– På vilka andra sätt skulle resultatet efter fyra visslingar ha kunnat se ut?
– Hur kan resultatet se ut efter ytterligare en vissling? Hur många tänkbara lösningar finns det?

Tidigare problem: E 2008:9; E 2008:7: E 2011:7; E 2014:8.

Att läsa

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar äldre än ett år finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal larportalen.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Matematiklyftets material finns alltså tillgängligt för alla. På Lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.