



Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Student 2017, svar och lösningar

*Här följer svar, rättningsmall och redovisningsblanketter.
Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag.*

Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Vi delar inte ut några priser, men namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Där kan du sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 29 april.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev från vardera tävlingsklass Ecolier, Benjamin och Cadet och en gymnasieelev att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade (åtminstone redovisning A). Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola och årskurs, tävlingsklass, resultat* på årets tävling samt uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn och e-post till den nominerande läraren. Dessutom behöver vi ett kontonummer där vi kan sätta ett eventuellt stipendium samt postadress dit vi kan skicka diplom. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan tex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpssam och visar gott kamraskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond och NCM.

Nomineringen skickas senast 29 april till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

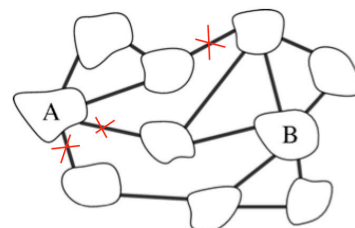


Lösningsförslag Student 2017

1. (C) 34 $\frac{20 \cdot 17}{2 + 0 + 1 + 7} = \frac{20 \cdot 17}{10}$

2. (A) 1,74 m
 $87 \cdot 2 \text{ cm} = 174 \text{ cm} = 1,74 \text{ m}.$

3. (C) 3
 Det minsta antal broar är tre, t.ex. broarna markerade med X. Diskutera om det finns andra möjligheter. Se Benjamin 2017 för en enklare variant.



4. (A) $15a = 8b$
 $0,75a = 0,40b \Leftrightarrow 75a = 40b \Leftrightarrow 15a = 8b.$

5. (C)
 Graf A är växande och har ett nollställe då $x \approx 1,9$. Det innebär att den har en minimipunkt och ett andra nollställe för $x < 1,9$. Graf B är växande och har sina nollställena på vardera sidan om y-axeln, vilket stämmer med graf A. Graf C är avtagande och har ett nollställe för $x \approx 3,2$. Det innebär att den har en minimipunkt och det andra nollstället för $x > 3,2$, vilket inte stämmer med graf A och graf B. Både graf D och graf E stämmer in på graf A och graf B

6. (B) $\frac{1}{3}$
 $OB = BC$ innebär att triangel OBC är liksidig och $\angle COB = 60^\circ$. Triangel AOX är kongruent med triangel BOC enligt SVS ($AO = OB$, $XO = OC$ och $\angle AOX = \angle BOC$ (vertikalvinklar)). Då är de två skuggade cirkelsektorerna lika stora och deras area i förhållande till hela cirkelns area är $\frac{2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$.

7. (A)
 Det måste alltid finnas två vita och två svarta kuber i varje rad om 4 bitar. Den enda bit som uppfyller det villkoret är bit A.

8. (C) III
 Den räta linjen $y = -3,5x + 7$ skär y-axeln i punkten $(0,7)$ och har negativ lutning. Det betyder att den passerar andra, första och fjärde kvadranten.

9. (B) $\frac{3}{5}$
 Vi beräknar sannolikheten för att plocka upp en blå boll från respektive låda.

A: $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ B: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ C: $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ D: $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ E: $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

Ordna vi sannolikheterna i storleksordning får vi $\frac{1}{2} < \frac{5}{9} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$.

10. (B) $g_2(x) = x^3$

Antalet gemensamma punkter mellan respektive funktions graf och grafen till funktionen $f(x) = x$ kan algebraisk bestämmas genom att sätta funktionsuttrycken lika med varandra. Det ger

A: $x^2 = x$	B: $x^3 = x$	C: $x^4 = x$	D: $x = -x^4$	E: $x = -x$
$x^2 - x = 0$	$x^3 - x = 0$	$x^4 - x = 0$	$x^4 + x = 0$	$2x = 0$
$x(x-1) = 0$	$x(x+1)(x-1) = 0$	$x(x^3-1) = 0$	$x(x^3+1) = 0$	$x = 0$
$x = 0, x = 1$	$x = 0, x = 1, x = -1$	$x = 0, x = 1$	$x = 0$	

11. (A) 6

Triangelsidornas längder är $AB = 5$, $AC = 4$ och $BC = 3$. 3, 4, 5 är en pythagoreisk trippel, alltså är triangeln rätvinklig. Triangelns area är $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

12. (B) $p + q$

Vi vet att $0 < p < 1 < q$. Då gäller för alternativ A, B och C.

A: $p \cdot q < q$ B: $p + q > q$ C: $\frac{p}{q} < p$

13. (E) 21 %

Volymen av en cylinder är $\pi r^2 h$. Låt cylinder A ha radien r och höjden h_1 . Cylinder B har då radien $1,1r$ och höjden h_2 . Eftersom de har samma volym gäller $\pi r^2 h_1 = \pi (1,1r)^2 h_2$. Alltså är $h_1 = 1,21h_2$, dvs höjden i cylinder A är 21 % större än höjden i cylinder B.

14. (B) $\frac{63}{64}$

Om samma siffra skulle komma nedåt på de fyra tärningarna så kan vi inte bilda 2017. $P(\text{samma siffra nedåt}) = (\frac{1}{4})^4 \cdot 4 = \frac{1}{64}$. $P(\text{bilda talet}) = 1 - P(\text{samma siffra nedåt}) = \frac{63}{64}$.

15. (D) 5

Alternativ 1: Det finns en sats som säger att om polynomet $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ har heltalskoefficienter och om $x = \frac{p}{q}$ är ett rationellt nollställe så är p en delare till a_0 och q en delare till a_n . I vårt polynom är $a_0 = 24$. Vi har att välja mellan 1, -1, 3, 5 och 6 och alla utom 5 är en delare i 24.

Alternativ 2. Ersätt variabeln med svarsalternativen och undersök om det finns värden på a och b som uppfyller likheten.

A: $x = 1$ ger $p(1) = 5 + a + b + 24 = 0 \Leftrightarrow a + b = -29$, välj t.ex. $a = 0, b = -29$.

B: $x = -1$ ger $p(-1) = -5 + a - b + 24 = 0 \Leftrightarrow a - b = -19$, välj t.ex. $a = 0, b = -19$.

C: $x = 3$ ger $p(3) = 135 + 9a + 3b + 24 = 0 \Leftrightarrow 9a + 3b = -159 \Leftrightarrow 3a + b = -53$, välj t.ex. $a = 0, b = -53$.

D: $x = 5$ ger $p(5) = 625 + 25a + 5b + 24 = 0$, tre av termerna är delbara med 5 oavsett val av a och b , men 24 är inte delbar med 5, alltså kan inte $x = 5$ vara en rot.

E: $x = 6$ ger $p(6) = 1080 + 36a + 6b + 24 = 0 \Leftrightarrow 36a + 6b = -1104 \Leftrightarrow 6a + b = -184$, välj t.ex. $a = 0, b = -184$.

16. (E) 40 vita och 41 svarta

Största kvadrattal mindre än 2017 är $44^2 = 1936$. Eftersom talet 44 är ett jämnt tal så innehåller kvadraten lika många svarta som vita. När Julia har lagt den återstår det 81 cirkelskivor, 40 vita och 41 svarta.



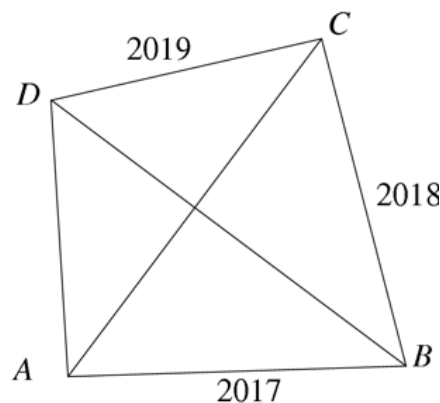
17. (C) 5

Betrakta två konsekutiva tal, n och $n + 1$. Siffersumman ökar med 1 om inte det mindre talet slutar på minst en nia. Är entalsciffran i det mindre talet 9, så blir den 0 i nästa tal samtidigt som tiotalssiffran ökar med 1, siffersumman ändras med $-9 + 1$. Är både entalsciffran och tiotalssiffran i det mindre talet 9 så blir förändring i siffersumman $-2 \times 9 + 1 = -17$. Låt det mindre talet ha n nior i slutet. Nästa tal kommer då ha 0 nior i slutet och siffersumman ändras med $-n \times 9 + 1$. Eftersom båda talen ska ha en siffersumma delbar med 7 så måste även förändringen vara delbar med 7. Om $n = 4$ så är förändringen 35 som är delbart med 7. Det minsta tal som uppfyller villkoren är 69999 som har siffersumma 42 och det konsekutiva talet är 70000.

18. (D) $\sqrt{2018^2 + 2}$

Kalla skärningspunkten mellan diagonalerna för S och namnge sidorna i de rätvinkliga trianglarna som $AS = a$, $BS = b$, $CS = c$ och $DS = d$. Pythagoras sats ger på respektive triangel: (1) $a^2 + b^2 = 2017^2$, (2) $b^2 + c^2 = 2018^2$, (3) $c^2 + d^2 = 2019^2$. Vi söker först $a^2 + d^2$. (2) – (3) ger (4) $b^2 - d^2 = 2018^2 - 2019^2$ och (1) – (4) ger $a^2 + d^2 = 2017^2 - 2018^2 + 2019^2$. Insättning av $2017 = 2018 - 1$ och $2019 = 2018 + 1$ och användning av kvadreringsreglerna ger $a^2 + d^2 = (2018 - 1)^2 - 2018^2 + (2018 + 1)^2 = 2018^2 - 2 \cdot 2018 + 1 - 2018^2 + 2018^2 + 2 \cdot 2018 + 1 = 2018^2 + 2$.

$$|AD| = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{2018^2 + 2}$$



19. (D) 15

Anta att första påståendet är falskt, då är även det fjärde påståendet falskt. Då är påståendena 2, 3, 5 och 6 sanna. Talet måste börja med 7, vara större än 50, jämnt tal och delbart med 3. Det enda tvåsiffriga talet som uppfyller de villkoren är 78, som har siffersumma 15. Anta istället att påstående 2 är falskt, då är även 5 falskt. Men det finns inget tvåsiffrigt tal som uppfyller påstående 1, 3, 4 och 6. Anta till sist att påstående 3 är falskt, då ska talet både vara mindre än 30 och större än 50 vilket är omöjligt.

20. (C) 2

Anta att talet är tvåsiffrigt, dvs $ab = a \times 10 + b$. Tar vi bort sista siffran får vi talet a . Sambandet som ska gälla är $ab = 14a$, dvs. $a \times 10 + b = (10 + 4)a \Leftrightarrow b = 4a$. Likheten uppfylls för $a = 1$ och $a = 2$. Det finns två tal (14 och 28) som har egenskapen. Kan det finnas fler tal? Anta att talet är tresiffrigt. Då gäller $a \times 100 + b \times 10 + c = (10 + 4)(a \times 10 + b)$. Förenkling ger $c = a \times 40 + 4b$, alltså är $a = 0$ och talet måste vara tvåsiffrigt.



21. (E) 2017

$$a_1 = 2017, a_2 = \frac{a_1 - 1}{a_1} = \frac{2016}{2017},$$

$$a_3 = \frac{a_2 - 1}{a_2} = \frac{\frac{2016}{2017} - 1}{\frac{2016}{2017}} = 1 - \frac{2017}{2016}$$

$$a_4 = \frac{a_3 - 1}{a_3} = \frac{1 - \frac{2017}{2016} - 1}{1 - \frac{2017}{2016}} = \frac{-\frac{2017}{2016}}{\frac{2016 - 2017}{2016}} = \frac{-2017}{2016 - 2017} = 2017.$$

Efter de tre första elementen upprepas talföljden. $2017 \equiv 1 \pmod{3}$ så

$$a_{2017} = a_1 = 2017.$$

22. (E) 9

Låt a och b vara respektive katets längd och c hypotenusans längd. Då gäller:(1) $a + b + c = 18$ och (2) $a^2 + b^2 + c^2 = 128$. Från Pythagoras sats har vi $a^2 + b^2 = c^2$, vilket ger att $2c^2 = 128$. Då är $c^2 = 64$ och $c = 8$. Alltså är $(a + b) = 10$ och $a^2 + b^2 = 64$ Kvadrering av $a + b$ ger $(a + b)^2 = a^2 + 2b + b^2 = 10^2 = 100$. Alltså är $64 + 2ab = 100$ vilket ger $ab = 18$. Triangelns area är $ab/2 = 9$ a.e

23. (D) 56

Alt.1: Låt a vara talet i mittrutan. Då finns följande möjligheter för övriga talen:1) I rutorna med gemensam kant står $a - 1$ och i hörn rutorna står talet a .Det ger $9a - 4 = 500$, $a = 56$ 2) I rutorna med gemensam kant står $a - 1$ och i hörn rutorna står talet $a - 2$ Det ger $9a - 12 = 500$, saknar heltalslösning3) I rutorna med gemensam kant står $a + 1$ och i hörn rutorna står talet a .Det ger $9a + 4 = 500$, saknar heltalslösning4) I rutorna med gemensam kant står $a + 1$ och i hörn rutorna står talet $a + 2$ Det ger $9a + 12 = 500$, saknar heltalslösning5) I hörnrutorna står a , två av rutorna mellan hörnrutorna står $a + 1$ och i de övriga två står $a - 1$. Det ger $9a = 500$, saknar heltalslösning.

Slutsatsen är att det enda tal som kan stå i mittrutan är 56.

a	a-1	a	a-2	a-1	a-2	a	a+1	a	a+2	a+1	a+2	a	a+1	a
a-1	a	a-1	a-1	a	a-1	a+1	a	a+1	a+1	a	a+1	a-1	a	a-1
a	a-1	a	a-2	a-1	a-2	a	a+1	a	a+2	a+1	a+2	a	a+1	a

Alt.2: Går vi runt frågetecknet genom de 8 talen så är varannan udda och varannan jämnt, alltså är det 4 udda och fyra jämna tal. Deras summa är ett jämnt tal. Så även talet i mitten måste vara jämnt för att summan av alla ska vara 500. Talet i mitten är större än 54 eftersom $54 + 4 \times 55 + 4 \times 56 < 500$ och mindre än 58 eftersom $58 + 4 \times 57 + 4 \times 55 > 500$ så det måste vara 56.



24. (A) 1

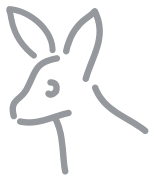
$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ ger } \begin{cases} x + x + y = 5 \\ x = 10 \end{cases} \text{ ger } y = -15 \quad \text{Motsägelse.}$$

$$x \geq 0, y < 0 \text{ ger } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x - 2y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Då är $x + y = 1$.

$$x < 0, y \geq 0 \text{ ger } \begin{cases} y = 5 \\ x = 10 \end{cases} \quad \text{Motsägelse.}$$

$$x < 0, y < 0 \text{ ger } \begin{cases} y = 5 \\ x - 2y = 10 \end{cases} \quad \text{Motsägelse.}$$



Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1			C			3
2	A					3
3			C			3
4	A					3
5			C			3
6		B				3
7	A					3
8			C			3
9		B				4
10		B				4
11	A					4
12		B				4
13					E	4
14		B				4
15				D		4
16					E	4
17			C			5
18				D		5
19				D		5
20			C			5
21					E	5
22					E	5
23				D		5
24	A					5
SUMMA						96



Redovisningsblankett A

För Kurs 4 och 5.

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast 29 april.

Antal deltagande elever

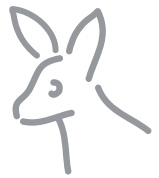
Kurs	
4	
5	

För in namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje kurs

Kurs	Namn	Poäng
4		
5		

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	Kurs	
	4	5
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		



Redovisningsblankett B

För Kurs 4 & 5

Uppgift nr	Antal elever med rätt svar på uppgiften	
	Kurs 4	Kurs 5
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		