



Arbeta vidare med Milou 2017

Här ger vi några kommentarer och förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen. Säkert har du också egna idéer. Dela gärna med dig av dem, skriv till kanguru@ncm.gu.se. I anslutning till förslagen hänvisar vi till tidigare problem. I de tidigare årens underlag "Arbeta vidare med" finns ytterligare förslag som naturligtvis passar lika bra i samband med dessa nya problem. Allt detta, problem och förslag för vidare arbete, finns på ncm.gu.se/kanguru.

Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen. I samband med genomgång passar det sen bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Uppmuntra dem att hitta så många olika lösningssätt som möjligt.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. För att eleverna ska vilja och kunna analysera och diskutera varandras lösningar behöver vi arbeta långsiktigt så att de vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi har löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: "Hur tror ni att den som har fått alternativ A som svar har tänkt?"

I årets Ecolier finns det ytterligare problem som ni kan arbeta med i par, i grupp och tillsammans i klassen. Om du inte redan har tillgång till det materialet har kanske någon kollega på skolan det. Det kommer senare i vår att publiceras på Kängurusidan, ncm.gu.se/kanguru. Där finns också alla tidigare problem tillgängliga. Många av dessa går att använda i din grupp även om de ursprungligen var tänkta för äldre elever.

Övningsproblemet pusselbitarna

Problemet handlar om likheter och likhetstecknets betydelse. Arbeta med likheter där det inte alltid är två tal som ska adderas på vänster sida och plats för "svaret" på höger. Arbeta gärna med likhetsskedjor för att visa likhetstecknets betydelse, utgå från ett tal och låt eleverna uttrycka det på olika sätt ex: $10 = 5 + 5 = 6 - 4 = 7 + 3$... Diskutera med eleverna varför vi inte kan skriva $4 + 7 = 11 + 7 = 18$ och gå igenom hur detta måste skrivas. Gör exempel där likhetstecknet ibland används på rätt sätt och ibland på fel sätt och låt eleverna avgöra vad som är fel och förklara varför.

Gå igenom alla pusselbitar och låt eleverna ge förslag på vad som kan stå på grannbiten. Vad är lika med 8? Vad är lika med 4?...

Gör några exempel där eleverna får sätta ut lämpliga tecken så att likheterna blir korrekta:

$$5 \square 7 \square 12; 12 \square 7 \square 5; 5 \square 12 \square 7$$

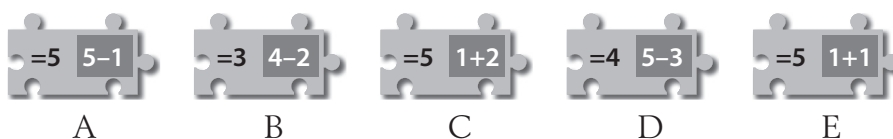


Dagens tal är en kreativ och bra aktivitet som man kan arbeta med vid upprepade tillfällen. Välj ett tal som dagens tal – "Vad är 10?" Uppgiften är öppen och eleverna kan arbeta på olika nivåer, från att konstruera enkla additioner till komplicerade uttryck. Börja som en gemensam klassrumsaktivitet och samla olika uttryck på tavlan. Strukturera elevernas förslag på lämpligt vis så att ni kan diskutera dem, ex additioner för sig, subtraktioner för sig etc. Uppgiften kan stimulera och utmana eleverna att försöka hitta nya oväntade uttryck och att försöka gå utanför det bekväma talområdet. Samla också exempel på var talet förekommer i omvärlden, ex "En 10-krona är värd lika mycket som 10 enkronor".

Årets Ecolier 1 är ett liknande problem.



Vilken pusselbit ska ligga mellan dessa två för att det ska bli två riktiga likheter?



1 *Fiskafänget*

För att lösa uppgiften måste man följa linjer som slingrar sig fram i bilden. Detta kräver uppmärksamhet och koncentration. Den här typen av problem förekommer ofta i pysslböcker och på knep-och-knäpsidor för barn.

Vilken krok är vems?

Försök att beskriva hur någon av katternas lina slingrar sig, använd begreppen höger, vänster neråt, uppåt, tvär sväng, i en båge etc

Låt eleverna göra egna, liknande problem att byta med varandra.

Liknande problem: M 2009:3, M 2013:8, M 2014:2 och 9, M 2016:2 och 11

2 *Hatten*

Problemet handlar om visualisering och att se från olika perspektiv. Samtala om elevernas erfarenhet av att vika och snurra papper, jämför t ex med spritsar och pappersstrutar. Fundera tillsammans på svarsalternativen. Vad skulle hända om de klipps ut och snurras? Prova.

Gör hatten. Rita hatten från olika håll. Hur ser den ut från sidan? Ovanifrån? Underifrån?

Gör andra liknande hattar men med olika former, t ex där det är skillnad på höger och vänster.

Vik upp olika förpackningar och liknande som en toarulle, en pappstrut som det har varit en glass i, en låda ... Hur ser den ut ?

Ställ fram olika föremål och låt eleverna rita av dem från olika håll. Diskutera om det går att säga var den som ritade bilden har suttit i förhållande till föremålet. Låt eleverna förklara med hjälp av lägesord.

Se även artikeln *Bilden i matematiken – matematiken i bilden* (Karin Wallby, Nämnaren 1996:2).

Tidigare problem: M 2009:1, M 2010:2, M 2012:1, M 2015:7.



3 Stjärnorna

För att lösa problemet krävs uppmärksamhet: att kunna urskilja antal spetsar men bortse från storlek. Använd logiska block och låt eleverna sortera efter en egenskap och bortse från andra.

Diskutera vad som är stjärnans spets, men se också på vinklarna mellan spetsarna. Hur många är de? Jämför spetsarnas "spetsighet". Gör en stor stjärna och klipp ut en spets och passa in den i mellanrummet. Jämför också spetsarna på de 5-uddiga och de 6- uddiga stjärnorna. Vilka är spetsigast? Introducera begreppet vinkel och vad som är större respektive mindre vinkel. En fråga att fundera över:

– Vad händer med spetsen/vinkeln i spetsen om vi gör fler och fler spetsar på stjärnorna?

Använd konkreta material som logiska block, tangrampussel eller mosaik/pattern blocks. Rita av en figur. Vilka former får vi om vi förbinder hörnen? Jämför antal hörn med antal sidor. Systematisera polygonerna – vilket är minsta antal möjliga hörn? Hur många olika månghörningar kan man göra? Vad blir det till slut?

På ncm.gu.se/matematikpapper finns ark med liksidiga polygoner, från trianglar till oktagoner. Undersök vilka som kan tessellera.

Barn i den här åldern tycker ofta att det är svårt att rita stjärnor, så titta tillsammans på hur stjärnor kan ritas. De fem- och sjuuddiga stjärnorna kan ritas i ett svep utan att pennan lyfts, medan sexuddiga oftast ritas som två trianglar.

Se även *Uppslaget: Tessellering* (Karin Wallby, Nämnaren 1996:4).
Liknande problem: M 2014:4, M 2015:1.

4 Körsbärspajen

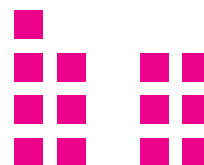
Ställ kompletterande frågor: Hur många barn kan dela rättvist på pajen? Vad menar vi med rättvist här? Undersök systematiskt. Använd föremål (t ex trägubbar och markörer) och fördela tre körsbär till varje barn. Titta sedan på hur snitten på pajen kan läggas.

Variera antalet körsbär. Diskutera vilka antal körsbär som kan delas rättvist/jämnt mellan 4 barn och vilka antal som är omöjliga att dela rättvist om varje barn ska få mer än ett körsbär var.

Vilka antal går att dela med 2? Vad kallas dessa tal?

Bygg tal med exempelvis multilink eller rita på rutpapper.

Bygg/rita två staplar så att det tydligt framgår att udda tal får en bit som sticker ut.



Låt eleverna undersöka vad som händer när vi adderar två udda tal, två jämna tal och ett jämnt och ett udda tal.

Försök att komma fram till ett generellt samband:

$U+U=J$, $J+J=J$, $U+J=U$.

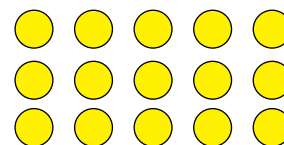
Använd det konkreta materialet/bilderna för att illustrera:



Undersök hur många som kan dela på olika antal markörer, om alla ska få lika många och fler än en. 1, 2 och 3 går inte att dela med fler. 4 kan delas på två, etc

Illustrera antalet i ett rektangulärt mönster där rader representerar antalet körsbär/föremål och kolumnerna barnen som delar (eller tvärt om).

Jämför de tal som går att dela upp med dem som inte går att dela.



En sådan undersökning med redovisning i bild kan ge värdefulla erfarenheter för kommande arbete med multiplikation och division. Att uppfatta multiplikation som en area är viktigt för att kunna förstå multiplikation på ett sätt som går att bygga vidare på.

Att läsa: *Multiplikation i åk 3– glimtar från ett undervisningsexperiment* (Andrejs Dunkels, Nämnaren 1988:2.) Se även *Strävorna*, 2A Primita.

Liknande problem: M 2012:2, M 2015:13.

5 *Snöret*

Även detta problem kräver uppmärksamhet och förmåga att följa linjen. Antalet klipp står i relation till antalet bitar, så egentligen räcker det att titta på antalet klipp. Klipp ett snöre/band/pappersremsa med ett klipp – hur många delar? Gör två klipp – hur många delar? etc Klipp snöret i fem delar – hur många klipp? Fyra klipp? Sex klipp? 20 klipp?

Diskutera gemensamt och hjälps åt att komma fram till en generell slutsats om hur många bitar man får av ett visst antal klipp.

Fortsätt med fler liknande situationer och generalisera vidare! Förslag att titta på:

Knappar på en skjorta, antal mellanrum mellan ett visst antal träd/buskar/blommor planterade på rad, att en dekoration ska hängas mellan staketstolpar, krokar på en list för badrumshanddukar, antal sågningar i en stock, snitt i en vetelängd/banan/morot ...

Antalet bitar blir ett mer än antalet klipp/delningar eller det behövs ett klipp mindre (färre) än antalet bitar som önskas. Gör eleverna uppmärksamma på vad som efterfrågas.

Ett enkelt sätt att fördela ett antal jämnt, eller att få jämna avstånd, är att rita streck med jämna mellanrum på ett resårband. När vi sträcker resårbandet fördelar sig då strecken jämnt även på den längre sträckan. Det blir tillräckligt bra för att användas i vardagen.

Om man viker ett snöre/band kan man förstås få fler bitar i ett klipp eftersom varje klipp då går genom flera lager. Utmana eleverna att vika ett snöre så de får så många bitar som möjligt av ett visst antal klipp.

Detta är en vanlig typ av problem som har förekommit flera gånger i Kängurun i olika varianter. Ex: *Tant Grön ska sätta ut planteringspinnar i sin rabatt. Rabatten är 10 m lång och pinnarna ska stå med 1 meters mellanrum. Hur många pinnar ska Tant Grön sätta ut?* Konstruera egna och låt eleverna också få beskriva situationer där detat samband gäller:

Liknande problem: M 2009:3, M 2014:6.

6 *Fjärilen*

Uppgiften utmanar elevernas uppmärksamhet, det är många detaljer att ta hänsyn till. De måste också tänka hur de kan kombinera figurerna, och hur övertäckning påverkar utseendet.

Använd också uppgiften språkutvecklande. Diskutera varför de felaktiga alternativen inte går att göra och uppmana eleverna uttrycka sig så precist som möjligt. Samla ord som kan vara bra: över–under, höger–vänster, stor–liten, ljus–mörk, rund–oval eller cirkulär–elliptisk, ...

Fjärilsformen leder lätt in på spegelsymmetri och symmetriaxel. Var finns symmetriaxeln i fjärilen? Se på andra figurer och sätt ut symmetriaxeln. En vanlig aktivitet som ger en konkret erfarenhet av spegelsymmetri är att måla något på ena sidan om en vikning och därefter vika ihop pappret så att det bildas ett avtryck av målningen på andra sidan vikningen.

Att läsa: *Snö och andra kristaller* (Annika Persson, Nämnaren 2010:4) *Symmetri – en skön konst för många sinnen* (Tomas Martinsson, Nämnaren 2011:1)

Liknande problem: M 2008:12, M 2015:2.

7 *Igloon*

Att kunna uppfatta rutmönstret i igloons hål är grundläggande för att utveckla förståelse för area. Diskutera strategier, jämför hur snöblocken ligger och hur man kan utnyttja det. Jämför med tegelstenar eller kakel som är mer bekant och vardagligt för de flesta elever. Undersök, om det är möjligt, riktiga kakelväggar, gatstensmönster, tegelväggar etc och diskutera hur man kan beräkna hur många bitar som finns på utvalda delar.

Hur många snöblock finns på bilden av igloon? Hela och delar? Diskutera hur vi ska räkna de bitar som inte är hela.

Detta är en stiliserad bild av en igloo. Hur ser den egentligen ut? Vad heter formen?

Liknande problem: M 2010:12, M 2013:2 och 4, M 2015:4 och 12, M 2016:4.

8 *Halsbandet*

Låt eleverna först diskutera i par hur de tolkar bilden i problemet där halsbandet inte ligger i en ring. Varför är de andra alternativen fel? Uppmuntra eleverna att motivera sina svar.

Vilka av alternativen är egentligen samma halsband? Vilken betydelse har det att halsbandet saknar spänne eller knut som låser pärlorna.

Gör egna halsband – låt några göra A, några B etc (se till att hålet är större än knuten och det kan fungera att använda långa piprensare istället för snöre.) Jämför halsbanden. Hur ska man göra om man vill vara säker på att halsbandet ser ut som i alternativ C?

Årets Ecolier 8 är samma problem, men något svårare:

Här ser du ett halsband med sex pärlor.

Hur kan halsbandet se ut om du lägger det i en ring?



A



B



C



D



E

9 *Alfreds pusselbit*

Detta är ett problem som är enkelt om man har biten och kan vrida på den men betydligt svårare om situationen enbart ska visualiseras. Inled med att diskutera skillnad på att *vrida* och att *vända*. Jämför med ett vanligt pussel som har motiv på ena sidan och en enfärgad baksida.

Diskutera och beskriv bilden i varje vridning. Använd begreppet varv, ett kvarts/fjärdedels varv, ett halv varv, ett helt varv. Rita och klipp ut biten eller bygg med multilink och gör vridningarna konkret.

Diskutera 90°-vridningen. Se på det upprepande mönstret, där man efter fyra vridningar är tillbaka i utgångspunkten. Prova och jämför 5, 6, 7, 8 vridningar.

Hur blir det med 12 vridningar? Diskutera den generella lösningen där fyra vridningar alltid ger ett helt varv.

Låt eleverna konstruera egna figurer och rita vridningar på samma sätt som i uppgiften, eventuellt utan att genomföra dem.

Rita en egen figur och låt kamraterna avgöra hur den ser ut efter fler än fyra vridningar.

Vad händer om vi vrider åt andra hållet? Låt eleverna först fundera utan att prova.

Undersök sen. Jämför fyra vridningar åt vänster med fyra vridningar åt höger.

Liknande problem: M 2015:6, M 2014:11.

10 *Figurtabellen*

Problemet handlar om igenkänning och abstraktion. Den första frågan är hur man ska tolka tabellen. Diskutera gemensamt. Vet alla elever vad som är *rad* respektive *kolumn*? Vad är frågan i uppgiften? Här räcker det att enbart räkna de vita trianglarna för att få fram rätt svar.

Fyll i alla tomma rutor i tabellen. Uppmuntra eleverna att kontrollera om antalet kvadrater, cirklar och trianglar stämmer. Antalet vita och antalet svarta? Jämför summan av raderna med summan av kolumnerna. Varför blir de lika?

Gör egna liknande tabeller. Använd logiska block, som är utmärkta att använda här, eller andra föremål som kan klassificeras efter olika egenskaper.

Liknande problem: M 2013:6, M 2015:2.

11 *Pariserhjulet*

Här behöver eleverna kunna föreställa sig att också Jim förflyttas och att relationen mellan Bens och Jims platser består men flyttas. Spelar det någon roll åt vilket håll hjulet snurrar? Varför inte? Var är Jim när Ben har snurrat precis ett varv? Två varv?

Diskutera ordpar som höger–vänster, motsols–medsols, medurs–moturs.

Hur ser hjulet ut från framsidan–baksidan.

Jämför med problemet med Alfreds pusselbit.

Hur många steg och åt vilket håll ska Ben flytta sig för att Jim ska sitta högst upp. Hur många steg för att Ben ska komma högst igen?

Tidigare problem: B 2001:18.

12 *Talrutor*

Diskutera hur eleverna löser problemet. Hur resonerar de.

Gör motsvarande med fem på varandra följande tal, t ex 3, 4, 5, 6 och 7. Finns det flera lösningar på det problemet? Gör fler exempel och låt eleverna upptäcka sambandet.

Gå vidare med liknande problem, med tal som inte är lika enkla att addera.

I detta problem möter eleverna aritmetik, likhet, samma summa på olika sätt och olika uttryck för samma tal. Arbeta vidare med likheter (se övningsproblemet) och komplettera med olikheter $\neq$. Ge eleverna grupper av tal att laborera med.

Arbeta med givna tal, exempelvis 10 eller 100, och problemets struktur: På hur många sätt kan du göra en likhet där det är 100 på båda sidor om likhetstecknet:

$$\square + \square = \square + \square \quad \text{Exempl: } 73 + 27 = 74 + 26$$

Ecolier 6 fvar i år detta problem, här utan svarsalternativ:

I tabellen är några rätt räknade summor antecknade. Vad ska det stå i rutan med frågetecknet?

	+	11	7	2
6		17	13	8
			?	11

Diskutera tolkningen av figuren.

Lös ev konkret och pröva.

Gör liknande rutor utan att skriva ut räknesättet och låt det ingå i uppgiften att avgöra.

Låt eleverna att konstruera egna liknande problem åt varandra.

Liknande problem: M 2016:5.

13 *Stjärnmönster*

I detta problem ska mönstret identifieras. Beskriv mönstret med ord. Låt fler elever beskriva, gärna på olika sätt. Jämför olika sätt att beskriva. Eventuellt behöver eleverna hjälp för att se att det är både spetsarna och mittcirkeln som måste beaktas:

Hur ser mönster för spetsarna ut – vridning, för mittcirkeln – svart – vit – svart- vit

Mönstret är alltså en sammanslagning av dessa.

Ställ kompletterande frågor till bilden:

- Hur fortsätter mönstret mönstret?
- När återkommer första bilden?
- Vilka av alternativen kommer aldrig att dyka upp?
- Hur skulle det bli om stjärnan hade 5 spetsar?

Gör egna liknande problem.

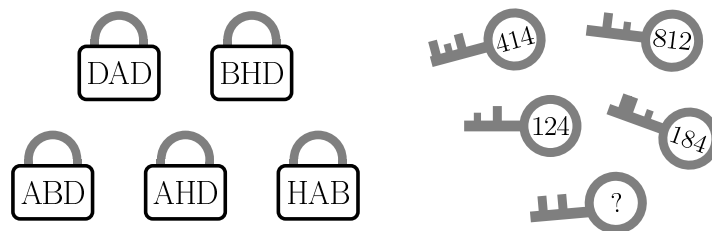
Liknande problem: M 2011:3, M 2013:11, M 2016:7.

14 *Kodlåset*

Här handlar det med problemlösning och hantering av olika typer av symboler. Berätta att även siffror är symboler, men att vi har lärt oss vad de betecknar så att vi direkt ser vad de betyder. Kanske kommer eleverna ihåg att det inte är så länge sen de själva lärde sig detta.

Symbolerna i uppgiften är det grekiska alfabetets bokstäver omega, Ω , och beta, β , och symbolen som betecknar nummer, #. Låt gärna eleverna bekanta sig med några fler grekiska bokstäver, t ex alfa α och pi π .

För att lösa problemet krävs ett logiskt resonemang. Gör dessa resonemang tydliga. Visa gärna



ditt eget sätt att resonera om ingen av eleverna redan har visat det.

I ursprungsversionen hade kodlåset våra bokstäver, A, D och G. A motsvarades av 1, D av 4 och G av 7. Visa eleverna dessa koder också och diskutera hur det påverkar lösningsstrategin.

Motsvarande problem finns i år också på Benjamin, #9, här utan svarsalternativ:.

De fem nycklarna passar till var sitt lås.

Siffrorna är en kod som kopplar ihop nyckeln med låset.

Vad ska det stå på den sista nyckeln?

En aktivitet som passar bra för att speciellt arbeta med logiska resonemang är *Bondgården*, som finns på Strävorna ncm.gu.se/stravorna

På ncm.gu.se/arkivn finns *Kryptoskolan*. Där finns ytterligare idéer och också fakta om krypto som kanske kan intressera eleverna.

15 *Kronan*

Börja med att definiera de olika delarna: korset, cirkelarna och linjen. Vad ska de föreställa? Diskutera gemensamt hur problemet kan angripas. Hur kan man hålla reda på vad man behöver? Ställ delfrågor:

- Hur många ark behöver hon till korset?
- Till cirkelarna/stenarna/rubinerna?
- Till linjen/kronringen/?
- Vilka märken kommer att bli över? Finns det olika svar på den frågan?
- Måste hon använda båda sorternas ark?

Jämför möjligheten att ta 3 av det vänstra arket och 1 av det högra andra med att ta 2 av varje. Räcker resterna till en krona om ni slår ihop er två och två?

Lös uppgiften konkret. (Ett kopieringsunderlag av arken finns på sista sidan)

Liknande problem: M 2012:6.

16 *Juvelhandel*

Denna likhet innehåller inga tal. Det ska stimulera inledande algebraiskt tänkande och eleverna ska få möjlighet att se på strukturen i stället för att operera med tal. Resonemanget blir här centralt liksom likhetstecknets betydelse.

Formulera likheterna med ord.

Gå igenom de olika alternativen och bestäm hur mycket blommorna skulle kosta i rubiner och safirer:

- Hur mycket kostar 1 blomma? 3 blommor etc.
- Hur många blommor får man för 1 rubin, 4 rubiner etc.

När uppgiften är löst, ändra rubiner och safirer till exempelvis päron och äpplen och jämför lösningen.

Ecolier 10 är ett liknande problem:

Vilken likhet stämmer?

A:  = 

B:  +  +  = 

C:  +  +  = 

D:  +  = 

E:  +  = 

