



Arbeta vidare med Ecolier 2017

Nu är tävlingsdelen av Kängurun avslutad, men vi hoppas att problemen ska kunna vara underlag för många intressanta diskussioner. Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen. I samband med genomgång passar det sen bra att låta eleverna resonera sig fram till lösningarna i grupp. Uppmuntra dem att hitta så många olika lösningssätt som möjligt.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar:

- Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar?
- Är lösningarna tydliga?
- Är resonemanget korrekt?
- Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi har löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: "Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?"

Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbetet med alla problem bör förmågorna att *resonera och argumentera* vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under rubrikerna *Tal*, *Geometri* samt *Problemlösning och resonemang*. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade. Där finns också förslag på hur man kan arbeta vidare med de problemen.

Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.



Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Några grundläggande aspekter som passar särskilt bra för elever i denna ålder är positionssystemet, udda och jämna tal, tals uppdelning, räknesättens innebörd och enkel faktorisering. I Kängurun brukar det ofta dyka upp problem som handlar om grundläggande bråk. Problemen utmanar också elevernas strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra dem därför att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden. Här har vi ordnat problemen så att de som har liknande innehåll kommer efter varandra, därför kommer de inte i nummerordning.

1 *Pusselbitarna*

Problemet handlar om likheter och likhetstecknets betydelse. Arbeta gärna med likhetskedjor för att visa likhetstecknets betydelse, utgå från ett tal och låt eleverna uttrycka det på olika sätt ex: $24 = 12 + 12 = 48 - 24 = 6 + 18 \dots$

Diskutera med eleverna varför vi inte kan skriva $14 + 7 = 21 + 7 = 28 + 2 = 30 + 7 = 28$, och gå igenom hur detta måste skrivas. Gör exempel där likhetstecknet ibland används på rätt sätt och ibland på fel sätt och låt eleverna avgöra vad som är fel och förklara varför.

Kan man lägga mer än en bit emellan för att det ska stämma?

Gör egna pusselbitar med andra tal och konstruera liknande uppgifter, utöka talområdet och använd även andra räknesätt.

Dagens tal är en kreativ och bra aktivitet som man kan arbeta med vid upprepade tillfällen. Välj ett tal som dagens tal – "Vad är 18?" Uppgiften är öppen och eleverna kan arbeta på olika nivåer, från att konstruera enkla additioner till komplicerade uttryck. Börja som en gemensam klassrumsaktivitet och samla olika uttryck på tavlan. Strukturera elevernas förslag på lämpligt vis så att ni kan diskutera dem, ex additioner för sig, subtraktioner för sig etc. Uppgiften kan stimulera och utmana eleverna att försöka hitta nya oväntade uttryck och att försöka gå utanför det bekväma talområdet. Samla också exempel på var talet förekommer i omvärlden, ex "När man är 18 år blir man myndig."

5 *Pandatal*

Även denna uppgift handlar om likheter. Diskutera varför uppgiften är utformad som den är, med ovaler och pilar, och hur likhetstecknet används.

Hur kan vi se svaret utan att utföra beräkningarna? Vi kan se att vi, om vi börjar efter första additionen, har $+8, -6, +8, -10$, dvs sammanlagt $+16 -16$ eller, om vi utgår från 10:an: $+6$ och -6 som tar ut varandra och $8 + 8 -10$, som är 6, dvs $10 + 6$.

Låt eleverna göra egna pandauppgifter, på så sätt att kamraterna kan lösa dem genom att endast se på de termer som adderas och subtraheras, dvs utan att de behöver göra alla mellanliggande beräkningar.

Liknande problem: E 2013:1, E 2015:1, E 2016:2, M 2008:8.

10 *Okänd likhet*

Denna likhet innehåller inga tal. Det ska stimulera inledande algebraiskt tänkande och eleverna ska få möjlighet att se på strukturen i stället för att operera med tal. Resonemanget blir här centralt liksom likhetstecknets betydelse.

Formulera likheterna med ord.

Gör egna exempel i par. Bestäm först relationen mellan två former, skriv en likhet där denna används och låt en annan grupp komma fram till vilken relation som gäller.



Låt eleverna möta algebra och inför symboler för cirkel, t ex c och kvadrat, t ex k . Skriv likheten med symboler. Använd även andra bokstäver för cirkel och kvadrat för att visa att symbolen kan väljas.

Uttryck likheten med hjälp av multiplikation: $c + c + c + c = 4 \cdot c$ Hur uttrycker man antalet kvadrater i höger ledet? ($k + k + k = 3 \cdot k$). Hur kan man uttrycka de fyra cirkelarna och kvadraten i vänster ledet? ($4 \cdot c + k$) Sammanfatta i ekvationen $4 \cdot c + k = 3 \cdot k$. Låt bilderna finnas med parallellt på tavlan.

Hur ändras ekvationen om vi tar bort en kvadrat på vardera sidan om likhetstecknet?

($4 \cdot c = 2 \cdot k$). Resonera utifrån bilderna och ekvationen hur man kan komma fram till svaret

$2 \cdot c = k$

Årets Milou: 16 är ett liknande problem, här utan svarsalternativ:

I Diamantlandet kan du byta en rubin mot tre safirer.



För en safir kan du köpa två blommor.



Hur många blommor kan du köpa om du har 2 rubiner?

Tidigare problem: E 2002:5, E 2013:13, E 2016:21, B 2006:4 och 18, B 2010:1, B 2013:11, B 2015:9.

2 Kängurur i parken

Problemet behandlar begreppet hälften (av en mängd). Diskutera relationen mellan hälften och dubbelt. Se också på orden hälften av och halv. Variera antalet kängurur som John ser. Använd de felaktiga svarsalternativen och fråga efter hur många fler kängurur John skulle se från sitt fönster om de hade varit rätt.

Hur många kängurur finns det om John ser en tredjedel av kängururna? En fjärdedel?

Lös och diskutera nedanstående problem. Visa på en tallinje:

En jätte tar dubbelt så långa steg som Axel.

Axel går 24 steg framåt.

Hur många steg ska jätten ta om Axel och jätten ska gå lika långt?

Om båda går 24 steg – hur mycket längre kommer jätten?

Om Axel går 100 m hur långt går jätten?

Om han går 200 m? 400m? etc

Vad händer med skillnaden mellan Axels sträcka och jättens sträcka?

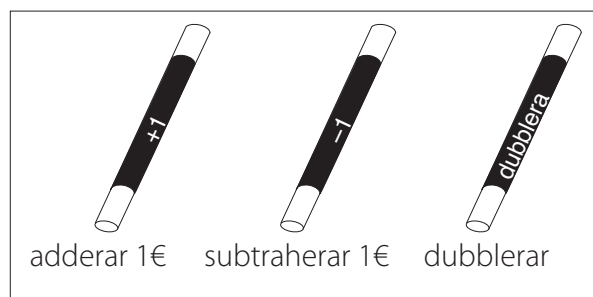
Undersök vad som händer när man dubblar tal med avseende på jämna och udda tal. Låt eleverna upptäcka att dubbling alltid ger ett jämnt tal och låt dem sedan försöka förklara varför. Gör motsvarande undersökning med halvering. Jämför, dra slutsatser och förklara.

Ett problem från årets Benjamin, nr 14, här utan svarsalternativ:



Boris har några euro och tre trollstavar. Varje trollstav kan han bara använda en gång. Den ena trollstaven adderar 1 euro, den andra subtraherar 1 euro och den tredje trollstaven dubblar summan han har.

I vilken ordning ska Boris använda trollstavarna för att få så mycket pengar som möjligt?



I alla tävlingsklasser 2008 fanns detta problem, som också handlar om udda och jämna tal:

Nio kort som är numrerade 1 till 9 på ena sidan blandas och läggs i en hög, med baksidan uppåt.

Ali och Berit tar tre kort var. Tre kort ligger kvar i högen.

Ali säger: Summan av talen på mina kort är 6.

Berit säger: Summan av talen på mina kort är 24.

Vilken summa har talen på de kort som ligger kvar i högen?

A: 12

B: 13

C: 14

D: 15

E: 16

17 Rutig rektangel

Detta är ett samband som kommer att dyka upp i olika sammanhang. Om någon del ska vara dubbelt så stor som den andra måste helheten delas i tre delar. Låt eleverna undersöka med olika tal och komma fram till sambandet.

Undersök på liknande sätt om det ska vara tre gånger så många vita rutor etc.

En utmaning kan vara att resonera om årets Benjamin nr 10, gärna utan svarsalternativ.

Petter och Albin löser problem olika fort. När Petter har löst två problem har Albin löst tre. Sammanlagt löser de två pojkarna 30 problem. Hur många fler problem än Petter har Albin löst?

A: 5

B: 6

C: 8

D: 10

E: 15

Liknande problem: E 2004:10, B 2012:12.

6 Talrutan

Här handlar det om att tolka tabellen och att betrakta två relationer samtidigt. Det finns olika sätt att resonera:

– Vilket tal ska adderas? Dvs $2 + x = 11$. Det ger att talet under 6 ska vara 9. Alltså $7 + 9 = 16$.

– Hur mycket större är talet i nedre rutan än det i övre rutan, dvs $11 - 8 = 3$. Alltså ska det stå 16 i rutan med frågetecknet.



– Vilken skillnad är det mellan talen i andra och tredje kolumnen, dvs $13 - 8 = 5$.
Alltså är talet i rutan med frågetecknen $11 + 5 = 16$.

Vilka sätt att lösa uppgiften har eleverna använt sig av? Låt dem pröva alla tre och jämföra.

Gör några andra exempel och utöka sedan talområdet så att det inte blir lika lätt att lösa problemet med huvudräkning.

Liknande problem: E 2014:17, E 2004:5. Se också *Strävorna* – Magiska kvadrater.

11 *Ballongköp*

Svaret är 4. Hon kan köpa 2 påsar med 25 ballonger och 2 påsar med 10, sammanlagt 4 påsar med exakt 70 ballonger. Det går inte med färre än 4 påsar, köper hon 3 påsar med 25 ballonger så köper hon för många ballonger, gör hon inte det, så det kan bli som mest $25 + 25 + 10 = 60$ ballonger, alltså för få. När man har bevisat att svaret är korrekt så är lösningen färdig. Vi kan inte ge elever någon färdig metod för att hantera liknande problem, de får använda sin intuition och sin känsla för tal och sedan prova sig fram.

- Hur många ballonger kan hon få som mest med 3 påsar, 4 påsar etc
- Om hon har 3 påsar, vilka olika antal ballonger kan hon köpa? Hur många olika möjligheter finns det? 4 påsar?
- Vilka kombinationer av påsar kan hon köpa för att få exakt 70 ballonger?

Liknande problem: E 2013:15, B 2013:12.

13 *Idrottsturneringen*

Detta problem handlar om delbarhet och att kunna använda sig av multiplikationstabellen. Variera frågan: Hur många barn behövs för 8 lag etc?

Använd "Tom hundraruta" (finns på ncm.gu.se/matematikpapper) eller cm-rutat papper och rita rektanglar med 36 rutor. Hur många olika rektanglar kan ni hitta? Diskutera gemensamt hur detta hänger ihop med problemet – vilka olika möjligheter att bilda lika stora lag finns det med 36 deltagare?

Gör undersökningar med andra antal. Vilka antal är det lätt att bilda lag med, vilka är det svårt? Diskutera *primtal* och låt eleverna få upptäcka primtalen i det talområde där de behärskar multiplikation. Berätta också om stora primtal, som säkert kan fascinera eleverna.

Om det inte kommer fler barn, hur många blir det då i varje lag? 32 barn i sex lag ger 5 i varje och 2 reserver. Visa hur det skrivs: $32/6 = 5$ rest 2. Detta kan ge eleverna en konkret erfarenhet av begreppet rest, som vi kanske inte så ofta arbetar med, men som det är betydelsefullt att kunna hantera. Problem 24, om *Kronbladen*, ger också en konkret illustration av begreppet rest.

Liknande problem: E 2001:6. Se även *Strävorna* 2A Primtal och 7A7F Erathostenes såll.

14 *Talkvadrater*

Här handlar det mest om uppmärksamhet, noggrannhet och att kunna göra ett snabbt överslag. Talet 7 sticker ut så det kan vara lämpligt att börja runt det. Låt eleverna förklara varför det inte är kvadraten med både 7 och 4 som ger störst summa.

16 *Talcirkeln*

Lösningen på detta problem ligger i att multiplikation med 0 alltid är 0. Vet man det inser man var i cirkeln man ska börja. Diskutera hur eleverna har löst uppgiften. Vilka erfarenheter gjorde de som började med att testa med ett tal i någon av de andra cirkelarna?

Diskutera andra givna beräkningar, som multiplikation med 1, addition med 0, division med 1 och 0. Undersök och förklara generellt "ett tal, vilket som helst ..."



Låt eleverna konstruera en cirkel där det ska stå 27 i cirkeln med frågetecknen.

Konstruera en talcirkel där de andra alternativen är riktiga och talcirkel med andra operationer och tal, som kamraterna sedan får lösa.

Kan de konstruera en cirkel där vilket tal som helst kan stå i "frågeteckencirkeln"?

En vanlig sällskapslek är "Tänk på ett tal". Gör några exempel och låt eleverna komma fram till hur det fungerar. Låt eleverna göra egna "Tänk på ett tal".

18 Halsdukarna

Uppgiften handlar om tal och skillnad och kan användas för att konkretisera subtraktion i betydelsen skillnad. För många elever handlar subtraktion endast om att ta bort, så de behöver få samtala om erfarenheter om andra subtraktionssituationer också.

Rita längderna och jämför, kopplingen till subtraktion kan på det sättet göras tydlig. Hur kan man "se" skillnaden i längd? Bestäm alla längder och sortera dem i storleksordning. Jämför och beskriv med hjälp av "längre än", "kortare än", "skillnaden i längd". Be eleverna försöka förklara hur skillnad är subtraktion.

En annan aspekt av problemet är att sortera information. Det är relativt mycket skriftlig information, så det är knappast möjligt att hålla allt i huvudet. Gå gemensamt igenom hur man kan systematisera informationen och stegvis lösa ut de olika längderna.

Gör egna liknande med exempel från elevernas vardag, längder, åldrar, skolvägens längd, antal familjemedlemmar, husdjur ...

Låt eleverna pröva på årets Junior nr 15, som handlar om några pojkars längder.

Fyra bröder är alla olika långa. Tobias är lika mycket kortare än Viktor som är längre än Peter. Oscar är kortare än Peter och skillnaden i längd mellan dem är lika stor som den mellan Tobias och Viktor. Tobias är 184 cm lång och medellängden hos de fyra bröderna är 178 cm. Hur lång är Oscar?

A: 160 cm B: 166 cm C: 172 cm D: 184 cm E: 190 cm

Tidigare problem: Alla Ecolier innehåller något eller några problem där det handlar om att hantera en större mängd information. Vår erfarenhet är att dessa problem har relativt god lösningsfrekvens. E 2010:8.

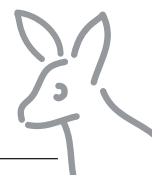
21 Kakmonstren

Hur kan talet 9 och talet 11 delas upp? Vilka möjligheter är inte tänkbara som lösning på problemet? Varför? Behövs informationen att en av dem har ätit 3 kakor?

Arbeta gemensamt med texten. Tolka texten och behandla informationen systematiskt. Vad betyder "minst en kaka", "olika många kakor". Lös problemet konkret och rita. Jämför olika resonemang.

Tidigare problem: E 2001:10, C 2002:5, E 2008:3, E 2009:3, E 2009:8.

Ett liknande problem från årets Benjamin, nr 16:



I en handbollsmatch gjorde fyra spelare mål. Ingen gjorde samma antal som någon av de andra. Mia var den som gjorde minst antal mål. De tre andra gjorde tillsammans 20 mål. Vilket är det största antal mål som Mia kan ha gjort?

A: 2

B: 3

C: 4

D: 5

E: 6

Liknande problem: E 2001:10, C 2002:5, E 2009:3 och 8.

Geometri

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan.

I geometri spelar också bilden en väsentlig roll, som underlag för kommunikation och som stöd för tanken. Några av årets problem utmanar elevernas förmåga att visualisera. Många problemen går relativt lätt att lösa om man gör det konkret, men är betydligt svårare om lösningen måste ske "i huvudet". Att kunna göra sådana operationer i tanken är därför något som behöver behandlas i undervisningen. Ett stöd för tanken kan vara att med ord beskriva hur man vrider, vänder, speglar etc.

3: Bildarket

Här handlar det om att föreställa sig hur bilden ser ut efter flyttningen. Låt eleverna beskriva med ord hur de två arken ska flyttas och hur mittbilden kommer att förändras. Beskriv föremålens plats med hjälp av positioner i rad och kolumn.

Diskutera hur arken måste ändras för att de andra svarsalternativen ska vara riktiga.

För att utveckla förmågan att beskriva läge passar pararbete där den ena sitter bakom en skärm eller på annat sätt med dolt arbetspapper. Den ena bygger en figur med exempelvis logiska block och beskriver sen figuren med ord. Kamraten, som alltså inte ser figuren, ska med hjälp av beskrivningen göra en likadan figur. Denna aktivitet kan varieras på olika sätt, men kommunikationen och terminologin är centralt. Gå eventuellt igenom nödvändiga termer, antingen i förväg eller när det visar sig att otydlighet ger upphov till svårigheter. Om eleverna får uppleva svårigheter som beror på att de inte använder korrekt/samma terminologi kan det hjälpa dem att se behovet av gemensamt språk.

Spela "Sänka skepp", som går ut på att hitta rätt i ett rutsystem med hjälp av rader och kolumner. Det behöver naturligtvis inte vara ett skepp som ska sänkas, det kan lika väl vara exempelvis nergrävda skatter, men idén är att den ena placerar något i ett rutsystem som den andra ska hitta genom att gissa rad och kolumn. Spelet kan användas för introduktion av koordinatsystem.

Tidigare problem: E 2009:6, E 2015:18,

Läs också exempelvis *Även en kvadrat är en rektangel* (Åsa Brorsson, Nämnaren 2013:2)

4: Fotstegen

Här handlar det om att föreställa sig bilden upp och ner. Det går naturligtvis att vända på pappret, men då vänds båda bilderna. Nu efter tävlingen går det förstås att klippa ut den ena bilden och vända den för att sedan jämföra.

Uppgiften rör vridning, rotationssymmetri. Analysera bilden gemensamt och se på varje fotspår var det är placerat och hur det ser ut – åt vilket håll går spåren? Jämför spåren i de två bilderna. Språket är viktigt, och begreppen höger-vänster, upp-ner.

Hur mycket är bilden vriden? Ett halvt varv. Hur ser det ut om man vrider ett helt varv? Ett kvarts varv?



Jämför spegling och vridning. Hur skulle bilden se ut om den hade speglats?

Analysera varje enskilt fotspår som en förskjuten spegling.

Arbeta med vridningar och speglingar av andra former.

Tidigare problem: Se också Nämnarenartikeln *Skön matematik för många sinnen* (Thomas Martinsson, Nämnaren 2011:1)

7 Den krossade spegeln

Analysera formerna på bitarna. Hur många trianglar finns det?

Vilken bit var svårast att uppfatta som fyrhörning? Varför?

Jämför antal sidor och antal hörn. Låt eleverna göra en generell slutsats om sambandet mellan antal hörn och sidor i en månghörning, och förklara varför det är så.

Prata om orden triangel och rektangel, där tri- och rekt- säger något om vinkeln. *Tri* berättar att det är tre vinklar och förledet *rekt* talar om att vinklarna är räta. Diskutera också orden hörn och vinkel. Analysera på namnet på olika månghörningar, pentagon, hexagon, heptagon, oktagon ... varför heter de så? Varför är det bra att veta ordets egentliga betydelse?

Undersök fyrhörningar systematiskt. Vilka grupper av fyrhörningar har vi? Hur är de ordnade hierarkiskt? Varför är kvadrater rektanglar?

Tidigare problem: E 2013:3, Läs också exempelvis *Även en kvadrat är en rektangel* (Åsa Brorsson, Nämnaren 2013:2)

8 Halsbandet

Halsbandet har inget spänne så pärlorna löper fritt på tråden. Hur ser halsbandet ut om pärlraden delas på andra ställen. Vad är konstant?

Laborera med var pärlraden delas. Vilka alternativ visar samma halsband?

Låt eleverna försöka rita alla halsband om de placeras så som problemets halsband. Uppmärksamma, gärna efter att eleverna har upptäckt det, att den tredje och fjärde kulan "byter plats". Gör detta också konkret med en tråd och pärlor.

Utveckla med ytterligare pärlor.

En enklare uppgift, med endast 4 pärlor finns i Milou 2017:

Här ser du en tråd med fyra pärlor.



Hur kan tråden se ut om vi lägger den i en ring?



A



B



C



D



E

Liknande problem: E 2015:21, B 2010:8.



9: *Huset från andra sidan*

Arbeta med alternativen. Varför är de fel? Diskutera särskilt skorstenens placering

Genom erfarenhet bygger vi upp känslan för hur något ser ut från andra sidan, även om det verkligen inte är lätt. Med hjälp av konkreta klossbyggen, verkliga föremål och bilder kan vi göra intressanta, utmanande och roliga uppgifter för eleverna. Låt dem bygga och rita hur bygget ser ut bakifrån, rita av byggnader i omgivningen från ett annat håll eller utgå från bilder och be eleverna se motivet från en annan kameravinkel.

Ett problem som har varit uppskattat, men som var svårt och som vi fick mycket frågor om, var med i Kängurutävlingen 2003 både i Ecolier och Benjamin. Vi kom att kalla det för *Vikhuset* och det är beskrivet i Uppslaget i Nämnaren 2003:3, *Tänk, vik och se*.

Liknande problem: E 2014:4, B 2010:18, B 2014:4.

Se också *Matematiken i bilden eller bilden i matematiken* (Karin Wallby, Nämnaren 1996:2)

12: *Det vikta pappret*

Lös uppgiften konkret. Gör alla vikningar i alternativen, gör ett hål igenom och se hur hålet placeras. Vilken roll spelar viklinjen? Hur ser symmetrierna ut?

Låt eleverna beskriva vikningarna med ord och använd begrepp som diagonal, parallella, rak linje, mitten, fjärdedel, skärningspunkt, tredjedel, rätvinkliga trianglar.

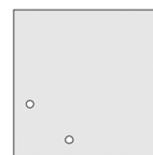
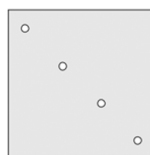
Jämför fjärdedelarna i alternativen A, B och C – vilka är störst?

Är även delarna i D fjärdedelar? Varför inte? Hur stora är delarna där?

Att vika papper och klippa bort delar för att få fina mönster när pappret vecklas ut är många bekanta med. Vi kan vika pappret, göra ett eller fler klipp och fundera på hur mönstret ser ut. Den typen av problemet har förekommit tidigare, t ex B 2001:2, C 2003:1, B 2016:16, C 2012:7. Vill man arbeta mer med denna typ av problem kan S 2015:6 vara en utmaning. Låt eleverna fundera över antal hål och diskutera sinsemellan. Som avslutning kan de utföra vikningen och klippningen.

I årets problem ska vi istället fundera över hur pappret är vikt.

Liknande problem, med samma vikningar men andra placeringar av hålen, finns också i Benjamin, nr 7 och i Cadet, nr 5.



I B 2004:10 vet vi hur pappret är vikt men frågan är hur många hål det blir. Där kan eleverna rita ut hålen på det utvikta pappret.

19: *Klossbygget*

Diskutera hur ritningen är gjord. Låt eleverna göra egna klossbyggen med en ritning. Därefter kan de byta ritningar med varandra och bygga efter kamraternas ritningar.

Ett annat sätt att göra ritning är att rita av bygget rakt framifrån, rakt bakifrån samt från båda sidorna. Varje bygge får på det sättet fyra ritningar, som gemensamt ger en bild av hela bygget.

Tidigare problem: M 2009:12, B 2013:15.



Problemlösning och resonemang

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och hjälp eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälpe eleverna att strukturera informationen i texten. Gå också igenom eventuella oklarheter beträffande ord och meningsbyggnad.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att "veta vad man ska göra". Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. Att lära sig hantera motgångar och misslyckanden är viktigt för att utveckla problemlösningens förmågan.

I problemlösning spelar resonemang och argumentation en stor roll. Hjälpe eleverna att göra resonemangen tydliga och visa gärna hur du själv resonerar som komplement. För att kunna utveckla sitt resonemang är det bra att kunna få följa mer utvecklade resonemang.

15. Matlagning

Gör fler exempel och låt eleverna komma fram till en relativt effektiv strategi.

Hur hade svaret blivit om vi hade haft tillagningstiderna 45 min, 40 min, 30 min, 30 min och 30 min.

Vi måste fundera på det bästa sättet att fördela rätterna på plattorna på det effektivaste sättet. Vi kan kanske gissa att de två rätter som tar längst tid ska tillagas på varsin platta, men det är inte säkert. Skulle det vara 5 rätter med tillagningstider 20, 25, 30, 35 och 40 minuter så skulle man tillaga de två rätter som tar längst tid på samma platta. I följande lösning visar vi ett svar och att det måste vara det rätta svaret, men det är samtidigt en inledning till en ganska systematisk sökning.

Lösning: Summan av tider är 145 och samtliga tider är multiplar av 5, så i bästa fall kan det vara 70 och 75 per platta. Vi tittar först efter om det finns några tider med summa 70 eller 75 och vi hittar ett par med summan 75: 40 och 35. Summan av de övriga är då 70.

Om tillagningstiderna inte vore så "lämpliga", skulle vi i nästa steg söka dem med summan 65 eller 80 minuter och sedan med 60 eller 85 minuter. Lösningen antyder en någorlunda effektiv metod som kan användas när antalet rätter och tillagningstider är små eller måttliga.

Ett problem som funnits med i olika andra sammanhang, men aldrig i Kängurun, påminner om detta. Det handlar också om att kombinera på effektivaste sättet.

Pappa och de tre barnen Anna, Britta och Olle ska i midvinternatten passera en isig hängbro över en djup ravin. Alla befinner sig på ena sidan ravin. Bara två personer åt gången kan befinna sig på bron.

De går alla olika fort och när de går två och två tar det den tid som den långsammaste behöver. Pappa går på 10 minuter, Anna på 5, Britta på 1 min och Olle på 2 minuter. Ingen av dem kan gå över bron utan att ha något att lysa sig med.

De har en enda lykta och dess brinntid är 17 minuter. Lyktan måste en gående ha med fram och tillbaka. Det går inte att kasta den mellan sig.

Hur ska de då bära sig åt för att alla ska kunna ta sig över till andra sidan innan lyktan slocknar?

Tidigare problem: C 2014:14.



20 *Tåget*

Diskutera problemlösningstrategin. Vad vet vi?

För att göra lösningen tydlig kan vi ändra talen till 300 m och 100 m. Då blir det kanske lättare att se relationerna. Diskutera detta som en problemlösningsslagmetod, att förenkla de ingående talen där det är möjligt.

Använd problemet för att noga arbeta med problemlösningsslagprocessen, och kontrollera lösningen. Gör elevernas resonemang tydliga. Komplettera eventuellt med ditt eget.

Ett problem som passar bra att gå vidare med. Låt eleverna använda flera representationer: ord, bild och symboler.

Fina fisken

Huvudet på en fisk utgör en tredjedel av hela fiskens längd. Stjärten är lika lång som huvudet och kroppen tillsammans. Fiskens hela längd är 48 cm.

Hur lång är stjärten? Huvudet? Kroppen?

(Ur *Tänkvärt* av Jan Gustafsson m fl, Biblioteksförlaget 1988)

Tidigare problem: B 2014:11.

22 *Gubben i rutan*

Här är det logiska resonemanget centralt. Vilken ruta ska vi börja med?

Lös uppgiften konkret. Rita upp rutorna och markera de ifyllda talen (eller gör en förstoraad kopia av problemfiguren). Använd markörer eller rita. Illustrera resonemanget och pröva om det håller.

23 *Bullpåsar*

Diskutera olika lösningsslagmetoder. Har eleverna beräknat den totala summan bullar och och därefter subtraherat de bullar som barnen sammanlagt tog, eller har de försökt att dela upp påsar på barnen?

Elsa fick 19 bullar, det måste vara påsar med 9 och 10 bullar. Vilka påsar kan David ha tagit?

De övriga? Finns det bara ett möjligt svar eller finns det flera?

Måste vi veta vem som tog vilken påse?

Undersök den aritmetiska summan $1 + 2 + 3 + \dots + 10$. Låt eleverna komma fram till något sätt att beräkna det på. Kan eleverna se att summan kan skrivas som $5 \cdot 11 = 55$. Låt dem förklara varför det stämmer. Berätta om Carl Friedrich Gauss, som enligt berättelsen, sattes att summera talen 1–100 (för att han skulle ha något att göra medan klasskamraterna arbetade med enklare uppgifter som var alldeles för enkla för Carl Friedrich). Det tog inte lång tid för gossen Gauss att komma fram till svaret $50 \cdot 101 = 5050$. Läs mer i *Miniporträttet* (Jan Unenge, Nämnaren 81–82:4).

Låt eleverna prova metoden på olika summor och beskriva hur de gör.

En utveckling är att komma fram till en generell formel.

24 *Kronbladen*

Genomför lösningen konkret. Att det med beräkning blir 10 drag och 2 kronblad över kommer säkert många fram till, men är det också praktiskt möjligt? Ja, det är möjligt och det kan vi visa konkret. Låt eleverna pröva sig fram och dra en slutsats om vad som ser ut att vara en effektiv metod.

Undersök problemet med andra antal kronblad.

Tidigare problem: E 2001:15.



Att läsa

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnaTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

NämnaTema. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. NämnaTemaartiklar äldre än ett år finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på NämnaTema på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *Arkiv* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. NämnaTema på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal larportalen.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Matematiklyftets material finns alltså tillgängligt för alla. På Lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.