

Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Cadet 2017, svar och lösningar

Här följer svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag. Under vecka 12 publiceras också förslag till hur ni kan arbeta vidare med problemen i klassen plus ytterligare kommentarer kring lösningarna.

Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Vi delar inte ut några priser, men namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Där kan du sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 29 april.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev från vardera tävlingsklass Ecolier, Benjamin och Cadet och en gymnasieelev att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade (åtminstone redovisning A). Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola och årskurs, tävlingsklass, resultat* på årets tävling samt uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn och e-post till den nominerande läraren. Dessutom behöver vi ett kontonummer där vi kan sätta ett eventuellt stipendium samt postadress dit vi kan skicka diplom. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan tex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpssam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond och NCM.

Nomineringen skickas senast 29 april till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

1. B: 10:00

$17 + 17 = 34$. Men eftersom ett dygn har 24 timmar så är klockan $34 - 24 = 10$.

2. C: 11

Antonia är den fjärde till vänster om Bianca så det står 3 flickor mellan henne och Antonia. På höger sida om Bianca står det sex flickor mellan henne och Antonia. Totalt sett är det alltså $3 + 6 + \text{Bianca} + \text{Antonia} = 11$ flickor.

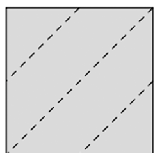
3. A: $\frac{1}{2}$

Eftersom triangeln är likbent så flyttar vi de vita fälten från ena sidan till den andra sidan och får en halv triangel som är vit.

4. E: 24 m

Skillnaden mellan långsidorna är 7 m ($3 + 4$) och skillnaden mellan kortsidorna är 5 m ($2 + 3$). Alltså är skillnaden i omkrets $2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 24$ m.

5. D:



Hålmarkeringarna ska ligga symmetriskt kring viklinjerna. Alternativ D är den enda vikningen som kan ge exakt två hål.

6. D: 8

$7 = 1 + 3 + 3 = 1 + 1 + 5 = 2 + 3 + 2 = 1 + 2 + 4$. Några andra alternativ med dessa premisser finns inte och eftersom alla tre talen ska vara olika kan vi här endast använda alternativet 1, 2, 4. Produkten är $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.

Alternativ lösning:

Låt $0 < a < b < c$.

$a \geq 1, b \geq 2$ men skulle $b > 2$ så skulle summan vara $\geq 1 + 3 + 4 = 8$.

Alltså är $b = 2, a = 1, c = 7 - 2 - 1 = 4, abc = 8$.

7. B: 10 cm^2

Arealen av det yttersta skuggade fältet är $16 - 9 = 7$. Nästa skuggade område får vi på liknande sätt, $4 - 1 = 3$. Den skuggade arean är: $7 + 3 = 10$.

8. A: 2 €

Yvones 10 € extra ska delas på fem systrar, $10/5 = 2$. Om Yvonne ger 2 € till var och en kommer de allihop ha 12 € var.

Alternativ lösning: Tillsammans har systrarna 60 €. Det betyder att de ska ha 12 € var. Det får systrarna om Yvonne ger dem 2 € var.

9. E: $\frac{5}{12}$

Om vi utgår från vänstra änden av pinnen så befinner sig myran vid $\frac{2}{3}$ och nyckelpigan vid $\frac{1}{4}$ av längden av pinnen. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

10. A: $\frac{1}{2}$

$\frac{5}{6}$ av publiken är barn. $\frac{3}{5}$ av barnen är flickor. $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$. Hälften av barnen är flickor.

11. D: 40

Den heldragna linjen utgör summan av två sidor av alla trianglar. Heldragna *sidor* är lika långa som motsvarande streckade *sidor* eftersom trianglarna är liksidiga. Den heldragna linjen är därför dubbelt så lång som den streckade, alltså 40.

12. A: 14

De enda av de möjliga kombinationerna av två åldrar (3 + 8, 3 + 12, 3 + 14, 8 + 12, 8 + 14, 12 + 14) där summan är delbar med 5 är 3 + 12 och 8 + 12. Ivas ålder är det tal som återstår, nämligen 14.

Alternativ lösning: Rester vid division med 5 är: 3, 3, 2 och 4. Ema och Rita har samma rest: 3, Zina: $5 - 3 = 2$, Iva har den återstående, 4.

13. E: 840

Sätt antalet löpare totalt till x st. Antalet män är då $0,65x$. Detta är lika många som antalet kvinnor plus 252 män, nämligen $0,35x + 252$.
 $0,65x = 0,35x + 252$. Ekvationslösningen ger $x = 840$.

Alternativ lösning: 252 är det samma som 30 % av helheten. $\frac{252}{0,3} = 840$.

14. A: 63

Alla talen ska tillsammans bli 35. De tre första rutorna ska tillsammans bli 22, vilket innebär att den fjärde och femte rutan tillsammans blir 13 ($= 35 - 22$). I fjärde rutan står alltså talet 9 ($= 13 - 4$). Andra rutan är $35 - 25 - 3 = 7$. Produkten av andra och fjärde rutan blir $9 \cdot 7 = 63$.

Alternativ lösning: Benämnen talen i de tomma rutorna för a , b och c . Vi får tre uttryck:

$$3 + a + b + c + 4 = 35$$

$$3 + a + b = 22$$

$$b + c + 4 = 25$$

Lösning av detta ekvationssystem ger att $b = 12$, $a = 7$, $c = 9$.

15. B: 4 cm²

Det grå området består av två trianglar. Tillsammans är höjderna i trianglarna 8 cm och båda har basen 1 cm. Deras totala area blir $\frac{1 \cdot 8}{2} = 4 \text{ cm}^2$. Vi kan också betrakta figuren som två kongruenta trianglar (3:e kongruensfallet) med vardera arean 2 cm².

16. B: 14

Han vill inte springa två dagar i sträck. Om vi tänker att första dagen han vill springa på är:

- mån, blir nästa gång en ons, tor, fre el lör men inte på söndag
- tis, blir nästa gång antingen på en tor, fre, lör el sön.
- ons, blir nästa gång antingen på en fre, lör el sön.
- tor, blir nästa gång antingen på en lör el sön.
- fre, blir nästa gång springa på en sön.

Totalt kan han då få ihop $4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 14$ olika scheman.

Kortare lösning: För varje veckodag finns det fyra möjliga veckodagar att kombinera med. Alltså $\frac{7 \cdot 4}{2}$, eftersom till exempel tis + fre är detsamma som fre + tis.

Den korta lösningen är värd att förklaras så att alla förstår.

17. D: 22

I alla rutor runt 2:or måste det stå *samma* tal, liksom i alla rutor kring 3:orna.

Dessa måste vara 2 och 3 eftersom också summan av två rutor ska vara samma överallt.

2	3	2
3	2	3
2	3	2

Den totala summan blir $2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 22$.

18. C: 18

Numrera kängururna från 1 till 10. Vi ser på de kängururna som står vända med nosen åt vänster. Känguru 4 måste göra 3 hopp till vänster. Känguru 5 behöver också hoppa 3 steg åt vänster. Känguru 9 behöver göra 6 hopp till vänster och även känguru 10 måste göra 6 hopp. Totalt blev det $3 + 3 + 6 + 6 = 18$ hopp.

Alternativ lösning: Vi kan också räkna på de kängurur som står vända med nosen åt höger. Känguru 1 hoppar fyra hopp till höger, likaså känguru 2 och 3. Känguru nummer 6, 7 och 8 hoppar vardera två hopp. Totalt $4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 = 18$.

Eftersom kängururna byter plats ska vi bara räkna åt det ena hållet.

19. C: 91°

Summan av alla tre vinklar kan man inte ändra på. Största och minsta vinkeln tillsammans ska vara så liten som möjligt vilket betyder att den mellersta vinkeln är så stor som möjligt. Den kan inte vara 90°, då blir den störst av de tre. Nästa mindre heltal är 89°, då blir de andra två 91° tillsammans, 1° och 90°.

Alternativ lösning med hjälp av svarsalternativen: Kalla vinklarna för u , v och w , låt $u < v < w$. Det gäller att $u + v + w = 180^\circ$. Vi söker minsta möjliga värde på $u + w$.

A: $u + w = 61^\circ$ ger $v = 119^\circ$ som blir triangelns största vinkel

B: $u + w = 90^\circ$ ger $v = 90^\circ$ som blir triangelns största vinkel

C: $u + w = 91^\circ$ ger $v = 89^\circ$ och då kan $u = 1^\circ$ och $w = 90^\circ$

D: $u + w = 120^\circ$ är inte minsta möjliga summa

E: $u + w = 121^\circ$ är inte minsta möjliga summa

20. D: 32 %

Om vi benämner diagonalen på en ljusgrå ruta för a , så är yttermått till duken $5a \cdot 5a$, dvs arean är $25a^2$. Den ljusgrå inre kvadraten har då måtten, $3a \cdot 3a$, arean är alltså $9a^2$.

Området mellan inre kvadraten och yttre kvadraten är då $25a^2 - 9a^2 = 16a^2$. Detta område täcks av grå kvadrater som utgör hälften av området, så det svarta området har arean $8a^2$.

$$\frac{8a^2}{25a^2} = 0,32.$$

21. A: 2

Vi beräknar talen i följd för att finna ett mönster:

2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, ...

Förutom de två första talen ser vi att talen 6, 8, 8, 4, 2, 8 kommer att upprepas, dvs en grupp om sex tal. Vi bortser från de två första talen och söker det 2015:e talet i stället.

$\frac{2015}{6}$ blir 335 rest 5. Alltså är det femte talet i perioden, 2, det tal som står på 2017:e plats.

22. E: 320 m

Vi kallar löparna för A och B.

Löpare A:s hastighet: $\frac{720}{4} \text{ m/min}$

Löpare B:s hastighet: $\frac{720}{5} \text{ m/min}$

De möts första gången efter t min. Då har A sprungit $\frac{720}{4}t$ meter medan B har sprungit $\frac{720}{5}t$ meter. Tillsammans har de sprungit 720 meter. Det ger

$$\frac{720}{4}t + \frac{720}{5}t = 720$$

$$\frac{t}{4} + \frac{t}{5} = 1$$

$$t = \frac{20}{9}$$

Löpare B har då sprungit $\frac{720}{5} \cdot \frac{20}{9} = 80 \cdot 4 = 320$ meter.

23. D: 10

Eftersom udda + udda = jämnt och jämnt + jämnt = jämnt gäller det att sprida ut de jämna talen på ett sätt som ger flest udda. Figuren visar ett exempel på hur talen kan placeras.

			u						
		j		u					
	u		u		j				
u		j		u		u			
j	u		u		j		u		

De två översta raderna kan som mest innehålla två udda tal. Tredje raden kan då innehålla högst två udda tal, som vi placerar ut. För att få dessa udda tal måste vi i raden under ha något jämnt tal. Om vi fortsätter resonemanget på detta vis så kommer man fram till att det som mest kan vara 10 udda tal. Det går att bevisa att fler udda tal än 10 går det inte att placera.

24. D: $\frac{1}{12}S$

$$\text{Areal av } \triangle AMB = \frac{S}{2}$$

$$\text{Då är Areal av } \triangle ADM + \text{Areal av } \triangle MCB = \frac{S}{2} \quad (\text{I})$$

$$\text{Areal av } \triangle AED + \text{Areal av } \triangle BFC = \frac{S}{3} \quad (\text{II})$$

vilket står i uppgiften.

Med (I) och (II) får vi:

$$\text{Areal av } \triangle DEM + \text{Areal av } \triangle MFC = \frac{S}{2} - \frac{S}{3} = \frac{S}{6}.$$

$$\text{Areal av } \triangle DOC = \frac{S}{4} \text{ eftersom } (AC \text{ och } BD \text{ är diagonaler}).$$

$$\text{Den sökta arean (fyrhörningen } EOFM) = \frac{S}{4} - \frac{S}{6} = \frac{S}{12}$$

Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1		B				3
2			C			3
3	A					3
4					E	3
5				D		3
6				D		3
7		B				3
8	A					3
9					E	4
10	A					4
11				D		4
12	A					4
13					E	4
14	A					4
15		B				4
16		B				4
17				D		5
18			C			5
19			C			5
20				D		5
21	A					5
22					E	5
23				D		5
24				D		5
SUMMA						96

Redovisningsblankett A

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast 29 april.

Antal deltagande elever

Åk 8	
Åk 9	
Kurs 1	

För in namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje kurs

	Namn	Poäng
Åk 8		
Åk 9		
Kurs 1		

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	Åk 8	Åk 9	Kurs 1
77 – 96 poäng			
57 – 76 poäng			
41 – 56 poäng			
25 – 40 poäng			
13 – 24 poäng			
0 – 12 poäng			

Redovisningsblankett B

Uppgift nr	Antal elever med rätt svar på uppgiften		
	Åk 8	Åk 9	Kurs 1
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			