Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Student 2016, svar och lösningar

Här följer först svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag.

Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru/. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Vi delar inte ut några priser, men namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Där kan du sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru/.
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 29 april.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikel Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev från vardera tävlingsklass Ecolier, Benjamin och Cadet och en gymnasieelev (Cadet, Junior eller Student) att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade (åtminstone redovisning A). Nomineringen ska innehålla elevens namn, skola och årskurs, tävlingsklass, resultat på årets tävling samt uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn och e-post till den nominerande läraren. Dessutom ska det finnas en motivering till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan tex vara en ovanligt god prestation i tävlingen, oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer eller annat hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är hjälpsam och visar gott kamratskap. Ett underlag att använda för nomineringen finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru/.

Nomineringen skickas senast 29 april till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Lösningsförslag Student 2016

3 poäng

1. (E) 14 år

$T + J = 23$, $J + A = 24$ och $T + A = 27$.

Lösningsförslag 1. De två första ekvationerna ger att $A - T = 1$. Alltså är Alex 14 år, Tom 13 år och John 10 år.

Lösningsförslag 2. Summeras de tre ekvationerna får man $2T + 2J + 2A = 74$, $T + J + A = 37$, alltså är den äldste 37 minus den minsta parsumman (23), $37 - 23 = 14$.

2. (C) $\frac{111}{1000}$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{100 + 10 + 1}{1000} = \frac{111}{1000}$$

3. (B)

Om Maria börjar bygga sin bro från en (yttre) spets av stranden av floden B, så blir bron längre än om hon börjar bygga t.ex. i mitten av en raksträcka. I övriga floder är avståndet till andra stranden lika stort från alla punkter.

Kommentar: Exempel på enkla par av punktmängder med konstant avstånd till varandra är: parallella linjer (oändliga), motsatta sidor av en rektangel, en cirkel eller del av den och dess medelpunkt, två koncentriska cirklar, bågar av två koncentriska cirklar begränsade av en vinkel med spetsen i dess gemensamma medelpunkt. Stränder av A har form av ett av ovannämnda par, C, D och E är sammansatta av sådana.

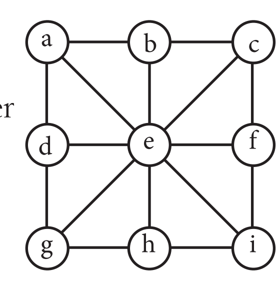
4. (A) 0

$2015 \cdot 2017 = (2016 - 1)(2016 + 1) = 2016^2 - 1$, dvs det finns inget heltal mellan $2015 \cdot 2107$ och $2016 \cdot 2016$.

5. (A)

Att byta plats på koordinaterna innebär att figuren speglas i linjen $y = x$. Resultatet blir figuren i A.

6. (C) 3



Om två trianglar har två gemensamma hörn och summorna av talen i trianglarnas alla hörn är lika, så måste talen i de icke gemensamma hörnen vara lika i båda trianglarna. Av detta följer att $a = c = i = g$ samt $b = f = h = d$. Talen i ringarna kan inte ha fler än tre olika värden: ett värde för b, f, h och d, ett värde för a, c, i och g och ett tredje värde för e. Dessa tre värden kan vara olika, man kan godtyckligt välja tre olika värden för dessa tre grupper, summan i varje triangel blir då summan av dessa tre värden.

7. (E) $\frac{8}{5}$

Arean $S_1 = (5 - y) \cdot x$ och arean $S_2 = (8 - x) \cdot y$, $S_1 = S_2$ ger $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$.

8. (E) 4

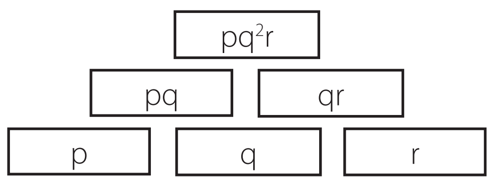
$x + \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 2}{x} = \frac{4x}{x} = 4$ eftersom $x^2 + 2 = 4x$.

4 poäng

9. (D) *d*

Den första likheten ger att $a = b - 4$, alltså är $b > a$. Eftersom talen är positiva heltal måste $b > 4$. Den andra likheten ger att $b = 2c + 2$, dvs $b > c$. Sambandet $b - 2 = d/2$ ger $d = 2(b - 2)$och $b > 4$ ger d största talet.

10. (D) 105



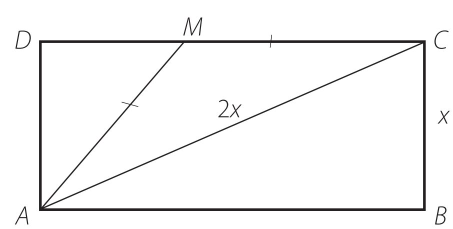
Låt talen i basen vara p, q och r, tre heltal större än 1.
Då blir talen i övriga tre rutor pq, qr och pqqr. Talet i topprutan (pq2r) är alltså kvadrat av ett heltal >1 multiplicerad ned ytterligare två heltal >1.
Faktoriserar man svarsalternativen fås $56 = 2 \cdot 4 \cdot 7$, $84 = 3 \cdot 4 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 9 \cdot 5$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $220 = 5 \cdot 4 \cdot 11$. Då ser man att var och en av dem utom 105 kan skrivas som en kvadrat av ett heltal >1 multiplicerad med ytterligare två heltal >1.

11. (C) $2^{2^{11}}$

Rekursionsformeln ger $x_2 = 2^2 = 4$, $x_3 = 4^4 = 2^8 = 2^{2^3}$,

$x_4 = (2^8)^{2^8} = 2^{2^3 \cdot 2^8} = 2^{2^{11}}$.

12. (E) annat värde



Vi ritar rektangeln och markerar det som är givet. $AD = BC = x$, och triangeln ACD blir en halv liksidig triangel, med $\angle ACD = 30°$. Eftersom triangeln AMC är likbent så är $\angle CAM = \angle MCA = 30°$.

13. (B) 4

Primtalsfaktorisering av 2016 ger $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 56 \cdot 6^2$.
Rektangeln kan bestå av 1×56, 2×28, 4×14 eller 7×8 kvadrater med sidolängd 6.

14. (B) 4

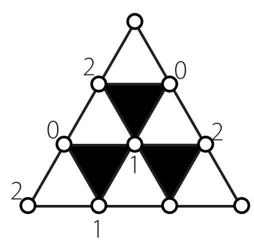
Tilldela var och en av de sju öborna: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 i den ordning som de sitter, 1 för en skurk och 0 för en riddare. Antalet skurkar är då $S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7$. Minst en av två som sitter bredvid varandra är en skurk, annars skulle ingen av dem påstå att han sitter mellan två skurkar. $S_1+S_2 \geq 1$, $S_2+S_3 \geq 1$, $S_3+S_4 \geq 1$, $S_4+S_5 \geq 1$, $S_5+S_6 \geq 1$, $S_6+S_7 \geq 1$, $S_7+S_1 \geq 1$. Ledvis summering ger $2 \cdot S \geq 7$, därmed $S \geq 4$.
Högst två av tre i följd är skurkar, annars skulle det vara sant om skurken i mitten av dessa 3 säger, att han sitter mellan två skurkar. Ledvis summering av olikheterna $S_1+S_2+S_3 \leq 2$, $S_2+S_3+S_4 \leq 2$ … osv. Detta ger $3 \cdot S \leq 14$, därmed $S \leq 4$.

15. (B) $3+\sqrt{3}$

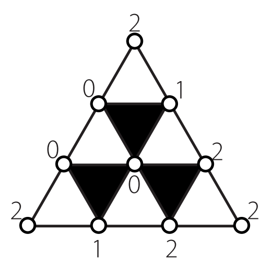
Kvadraten avskär en halv liksidig triangel. Eftersom kvadratens sida är 1 så är den ena katetens längd 1. Låt den andra kateten ha längden a. Då är $tan 60^o = \frac{1}{a}$, med lösning $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Den liksidiga triangelns omkrets är $3(1+a) = 3(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) = 3+\sqrt{3}$.

16. (A) Bara 0

Vi ser omedelbart att andra siffran i nedersta raden måste vara 1 (på grund av den vita triangeln nere till vänster) och därför kan den i mitten inte vara 2 (på grund av den svarta triangeln nere till vänster). Vi testar om den kan vara 1 eller 0.



Antag att vi har ettan i mitten. Då måste siffrorna strax under toppen vara 2 och 0 på grund av de två vita trianglarna på mellannivå. Men då har den översta svarta triangeln en summa delbar med 3.
Väljer vi däremot nollan i mitten så stämmer det.



5 poäng

17. (C) 72^o

$5x = 180^o$ ger $x = 36^o$. Randvinkelsatsen ger att $\angle DBC = \angle DAC = x = 36^o$. Dra diametern AF, den är vinkelrät mot tangenten i punkten A. Det ger att $DAF = 18^o$, då är även $\angle DBF = 18^o$ (randvinkelsatsen). Eftersom AF är en diameter så är $\angle ABF = 90^o$ och den sökta vinkeln $\angle ABD = 90^o – 18^o = 72^o$.
Anmärkning: Som ett gränsfall till randvinkelsatsen kan man bevisa att: *Vinkeln mellan en sekant till en cirkel och cirkelns tangent i en punkt där sekanten skär cirkeln är lika med den avskurna bågens randvinkel.*
Den satsen skulle tillåta en enklare lösning av problem 17.

18. (C) 3

Vänsterledet blir 1 om (i) exponenten $x^2 + x – 30 = 0$ eller om (ii) basen $x^2 – 4x + 5 = 1$ eller om (iii) basen $x^2 – 4x + 5 = -1$ och exponenten är ett jämnt heltal. Ekvationen i (i) har två rötter: 5 och -6, ekvationen i (ii) har en dubbelrot $x = 2$, ekvationen i (iii) saknar reella rötter. Alltså finns det tre lösningar: 2, 5 och -6.

19. (E) 4

Bisektrisernas skärningspunkt utgör centrum för den i triangelns inskrivna cirkeln. Då har den cirkeln radien $\sqrt{8}$ och avståndet från P till kateterna är $\sqrt{8}$. Pythagoras sats ger $|AP|^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2$ med lösning $|AP| = 4$.

20. (C) 6

Låt kubens kantlängd vara a. Varje pyramid har en sidoyta som bas. Avståndet från punkten P till två motstående sidoytor är då h respektive $a - h$. Volymen av två motstående pyramider blir $\frac{a^2h}{3} + \frac{a^2(a-h)}{3} = \frac{a^3}{3}$, dvs volymen av varje par av två motstående pyramider är en tredjedel av kubens volym. Pyramiden med den okända volymen kan inte vara motstående till den med volym 2 eftersom 5, 10, 11 och 14 bildar inte två par med lika summor. Eftersom $2 + 5 + 10 + 11 + 14 = 42$ måste summan av volymer av motstående pyramider vara ≥ 14, alltså är pyramiden med volym 2 motstående till 14. $2 + 14 = 5 + 11 = 16$, alltså kommer den sjätte pyramiden att ha volymen $3 \cdot 16 - 42 = 6$. Den med volym 2 kan inte vara motstående till den som saknas eftersom 5, 10, 11 och 14 bildar inte två par med lika summa.

21. (B) 60

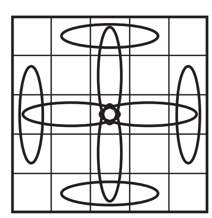
$NB = 50\,\text{cm} / 2 = 25\,\text{cm}$. Låt P vara punkten på NB där remsan viks och $x = NP$. Då har vi $PM = 25 - x$ och enligt Pythagoras sats $PM^2 = x^2 + 5^2$.
$(25 - x)^2 = x^2 + 5^2$, $x = 12$. Det vita området i nedersta bilden är en parallellogram med basen x och höjden 5 cm, dess area är $x \cdot 5 = 60$.

22. (A) 217

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, eftersom p inte delar talen 1, 2, ..., n så måste p dela $n + 1$ och kan inte vara mindre än $n + 1$, Alltså är p = n + 1. Då är $n + p = p - 1 + p = 2p - 1$.
A ger $2p - 1 = 217$, $p = 109$ (primtal),
B ger $2p - 1 = 221$, $p = 111$ (ej primtal),
C ger $2p - 1 = 229$, $p = 115$ (ej primtal),
D ger $2p - 1 = 245$, $p = 123$ (ej primtal),
E ger $2p - 1 = 269$, $p = 135$ (ej primtal)

23. (A) mindre än 10

Det räcker med 8 drag (och 8 drag behövs).
8 ellipser markerar de 8 drag som omvandlar den helvita kvadraten i ett schackbräde. Det spelar ingen roll i vilken ordning man gör dragen. Fält som täcks av exakt en ellips blir svarta, de som täcks av 2 eller 4 eller inga alls blir vita.



24. (C) 9

Låt de sex olika delarna vara 1, a, b, c, d, N. Då gäller att $1 \cdot N = N$, $ad = N$ och $bc = N$

Antag att den sjätte delaren är c. Då är $N \cdot N \cdot \frac{N}{c} = 648$, $N^3 = c \cdot 648 = c \cdot 2^3 \cdot 9^2$ och c är en multipel av 9 därför att den är den minsta multipeln som är heltalskub. Om $c = 9$ så är $N = 18$ som har 6 faktorer. Skulle c vara en multipel av 9, större än 9, skulle N vara en multipel av 18, större än 18 och ha fler än 6 faktorer. Alltså är $c = 9$.

Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1					E	3
2			C			3
3		B				3
4	A					3
5	A					3
6			C			3
7					E	3
8					E	3
9				D		4
10				D		4
11			C			4
12					E	4
13		B				4
14		B				4
15		B				4
16	A					4
17			C			5
18			C			5
19					E	5
20			C			5
21		B				5
22	A					5
23	A					5
24			C			5
					SUMMA	96

Redovisningsblankett A

För Kurs 4 och 5.
Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast 29 april.

Antal deltagande elever

Kurs	
4	
5	

För in namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje kurs

Kurs	Namn	Poäng
4		
5		

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	Kurs	
	4	5
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		

Redovisningsblankett B

För Kurs 4 & 5

Uppgift nr	Antal elever med rätt svar på uppgiften	
	Kurs 4	Kurs 5
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		