Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2016, svar och lösningar

Här följer först svar, rättningsmall och redovisningsblanketter. Förutom svar ger vi också några olika lösningsförslag.

Ett underlag till hjälp för bokföring av klassens resultat finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru/. Vi är medvetna om att redovisningen tar tid, men vi ber er ändå att redovisa resultaten. De är värdefulla för oss och förhoppningsvis ger en sammanställning av klassens resultat även er ett bra underlag för vidare arbete. Vi har valt att inte ta några deltagaravgifter, vilket man gör i flera andra länder. Att låta er sköta rättning och redovisning av resultat är ett sätt att hålla kostnaderna nere.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan. Vi delar inte ut några priser, men namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också lösningsfrekvenser på alla uppgifter liksom en sammanställning av hur elevernas resultat fördelar sig på olika poängintervall. Där kan du sedan jämföra dina elevers resultat med övriga elever och du kan se om de problem som dina elever hade svårt för också var svåra för andra.

Rätta elevernas lösningar och redovisa resultaten på webbadressen: ncm.gu.se/kanguru/.
Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se
eller på telefon 031 – 786 69 85. Vi ber er redovisa era resultat senast 29 april.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikel Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev från vardera tävlingsklass Ecolier, Benjamin och Cadet och en gymnasieelev (Cadet, Junior eller Student) att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade (åtminstone redovisning A). Nomineringen ska innehålla elevens namn, skola och årskurs, tävlingsklass, resultat på årets tävling samt uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn och e-post till den nominerande läraren. Dessutom ska det finnas en motivering till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan tex vara en ovanligt god prestation i tävlingen, oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer eller annat hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är hjälpsam och visar gott kamratskap. Ett underlag att använda för nomineringen finns att hämta på ncm.gu.se/kanguru/.

Nomineringen skickas senast 29 april till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Lösningsförslag Junior 2016

3 poäng

1. (D) 10

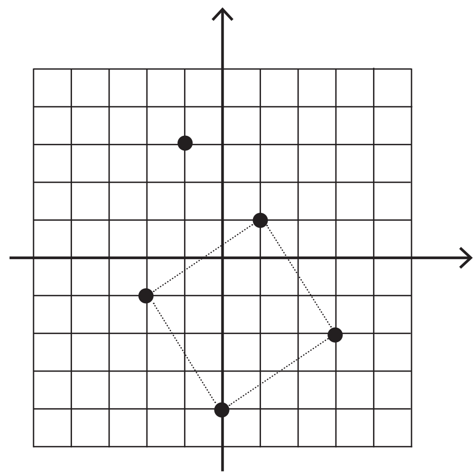
Summan av de fyra talen är $9 \cdot 4 = 36$. Det okända talet är $36 - (5 + 9 + 12) = 10$.

2. (D) 18

Låt r vara antal rätt svar och f vara antal fel svar. Då gäller att $r + f = 30$ och $r = 1{,}5f$. Det ger $2{,}5f = 30$, $f = 12$ och $r = 18$.

3. (A) (-1, 3)

Se koordinatsystemet till höger.



4. (D) 12

Med kortdivision: $2016/(24 \cdot 7) = 12$ veckor.
Alternativ lösning: $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 12 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 24$ timmar $= 12 \cdot 7$ dygn $= 12$ veckor.

5. (C) 000000

000 + 0000 = (-2) + (-3) = -5 = 000000.

6. (D) 7

Tärningarna kan visa:
A: två jämna siffror, då blir summan ett jämnt tal mellan 4 och 12: 4, 6, 8, 10 eller 12.
B: två udda siffror, då blir summan ett jämnt tal mellan -2 och -10: -2, -4, -6, -8 eller -10.
C: en av varje sort ger ett udda tal mellan -3 och 5: -3, -1, 1, 3 eller 5
Summan 3 får man i fallet C, 4 i A, 5 i C, 7 aldrig och 8 i A.

7. (B) 4

Minst fyra byten måste göras eftersom det finns fyra par av bokstäver som i ordet LOVE har annan ordning än i VELO. De är: VL, VO, EL och EO. Fyra byten räcker, vi kan byta plats på bokstäverna i följande ordning:
VELO → VLEO → LVEO → LVOE → LOVE

8. (E) 5

Bland talen 1 till 9 finns fyra par som har summan 10. Sven skrev inte fler än ett tal ur varje sådant par. Det femte talet måste vara 5, det är det enda talet som inte tillhör något av paren.

4 poäng

9. (D) d

(1) $b^2 - 1 = c^2 + 3$ ger $b^2 = c^2 + 4$, alltså är $b > c$,
(2) $b^2 - 1 = d - 4$ ger $d = b^2 + 3$, alltså är $d > b > c$ och
(3) $a + 5 = d - 4$ ger $d = a + 9$, alltså är d större än de övriga tre talen.

10. (A) $2\sqrt{2}-1$

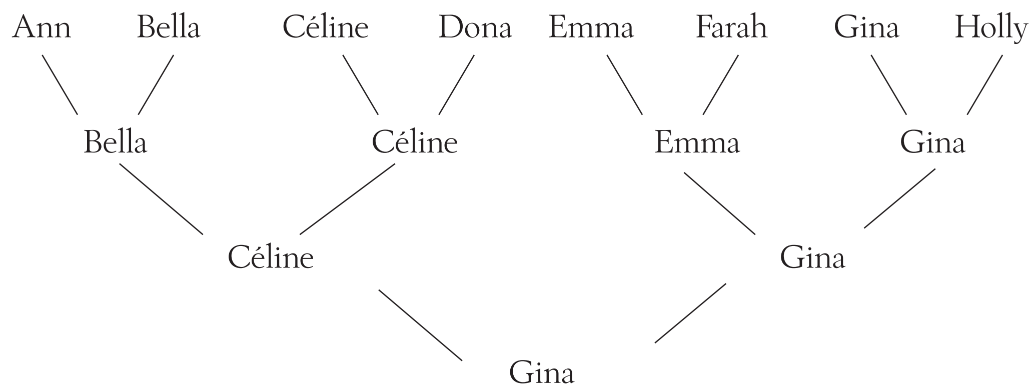
Avståndet mellan cirklarnas medelpunkter är lika med två enhetskvadraters diagonaler $2 \cdot \sqrt{2}$. Avståndet mellan cirklarna är två radier $(2 \cdot 0{,}5)$ mindre. Diagonalen i en enhetskvadrat har längden $\sqrt{2}$. Cirkelns diameter har längden 1. Subtraherar vi cirkelns diameter från diagonalens längd får vi $\sqrt{2}-1$. Det totala avståndet är $\sqrt{2}+\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}-1$.

11. (E) Gina slår Emma

Vi gör en tabell och för varje match skriver vi ett plus för vinnaren och ett minus för förloraren.

Ann	Bella	Céline	Dona	Emma	Farah	Gina	Holly
–	+ –	+ – +	–	+	–	+ +	–

Emma och Gina saknar minus men i en utslagstävling går bara vinnaren utan förlust och när det är åtta tävlande så måste vinnaren ha tre vinster. Endast Gina kan vara vinnaren. I matchen som saknas slog hon Emma.
Vi lägger ett plus till för Gina och ett minus för Emma. Flickor med minst ett plus är med i semifinalen, de med minst två plus är i finalen:



12. (C) 88 %

Vi delar in den stora triangeln i liksidiga trianglar med sidan 1. Den stora triangeln består av 25 små tringlar. 3 av dem är inte skuggade. Då är den skuggade delen
$1-\frac{3}{25}=\frac{88}{100}=88\%$

13. (B) 4

Produkten av de nio talen är 10^9. Då är varje rad-produkt, kolumn-produkt och diagonal-produkt $10^3 = 1000$. Då ska det tredje talet i översta raden vara 50.
Produkten av talen i de två tomma rutorna i mittersta kolumnen är 1000.
$1000 = 10 \cdot 100$ och 10 måste stå i den mittersta rutan. Då måste det stå 5 i tredje radens högra ruta och i rutan med frågetecken står det 4.
Talet 10 måste stå i mittrutan därför att räknar vi produkter av tal i varje diagonal samt i raden och i kolumnen som går genom mittrutan och sedan produkten av dessa fyra resultat så får vi 1000^4, dvs $10^9 \cdot 10^3$. Då ingår talet i mittrutan i produkten fyra gånger och de övriga talen en gång var.

14. (E) Båda banden har samma längd
De runda delarnas sammanlagda längder är alltid desamma oavsett hur många rullar man kopplar – en cirkels omkrets. Linjen svänger ju ett helt varv och svängradie är densamma. Vi behöver bara jämföra de raka delarna som består av sex diametrar i båda figurer. Lägg märke till att det inte riktigt är kvartscirklar i vänstra figuren som man kan tro.

15. (D) 5
Summan av talen är 255. 255 – 31 = 224. 224/2 = 112, så Ali tar kort vars innehåll har summan 112, 16 + 32 + 64 = 112. Ali tar tre kort och Eva fem kort.

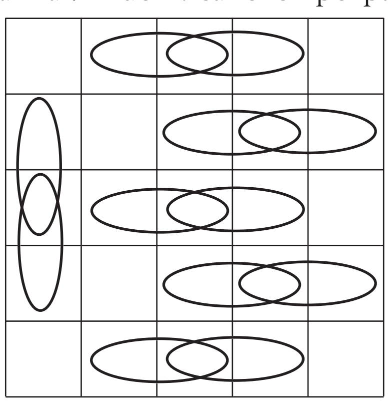
16. (A) 2016
Det finns g gråa och r röda kängurur, $g + r = 2016$. Varje grå får bråket r/g och varje röd får g/r. Summan av alla bråk är $g \cdot r/g + r \cdot g/r = r + g = 2016$.
Alternativ lösning: Antag att det finns r röda kängurur, då finns det $2016 - r$ gråa kängurur. För varje röd känguru gäller $\frac{2016-r}{r}$ och för varje grå känguru gäller $\frac{r}{2016-r}$.

Summan blir $r \cdot \frac{2106-r}{r} + (2016-r) \cdot \frac{r}{2016-r} = 2016 - r + r = 2016.$

5 poäng

17. (C) 1,25 m
Veckla ut pålens mantelyta till en rektangel. Då motsvaras rektangelns bas av pålens omkrets på 0,15 m och varje varv som växten slingrar sig är en höjning på 0,2 m. Det innebär att växtens längd per varv är 0,25 m. Fem varv ger 1,25 m.

18. (B) 12
Det behövs 12 drag därför att det ska bli 12 svarta rutor och inga två svarta rutor är grannar. Bilden visar exempel på hur det kan göras i 12 drag.



Varje ellips motsvarar ett drag. Observera att fält täckta med två ellipser blir vita.

19. (E) 24
Antag att sträckan XY är s, båtens hastighet v_1 och vattnets hastighet v_2. Då gäller för resan medströms

$$\frac{s}{v_1 + v_2} = 4 \qquad (1)$$

och för resan motströms

$$\frac{s}{v_1 - v_2} = 6 \qquad (2).$$

Ekvationerna ger $6(v_1 - v_2) = 4(v_1 + v_2)$ med lösning $v_1 = 5v_2$. Insättning i (1) ger

$$\frac{s}{6v_2} = 4 \qquad \frac{s}{v_2} = 24$$

Alternativ lösning: Om båten åker till Y och tillbaka till X två gånger och till Y en tredje gång, så har den åkt 12 timmar medströms och lika mycket motströms, alltså befinner den sig på samma ställe på vattnet som timmerstocken som bara har legat där i 24 timmar.

20. (A) 1

En vardag kan inte vara inklämd mellan två dagar med numren delbara med 6, det är för långt mellan sådana dagar. Kan ett sammansatt tal, icke delbart med 6 ligga mellan två primtal? I så fall måste det vara jämnt, annars skulle talen som omringar det vara jämna men det finns inte två olika jämna primtal. Vardagsnumret är jämnt men inte delbart med 6, alltså inte delbart med 3. Men av tre på varandra följande tal är ett delbart med 3, det måste vara ett av primtalen och det enda sådant tal är trean själv. Den första hittade mellandagen har nummer 4 (inte 2, för 2 är ett primtal). Återstår fallet med ett primtal och tal delbart med 6 men här hittar vi inget. Primtalet måste vara jämnt, alltså 2 och talet delbart med 6 antingen 2 + 2 eller 2 – 2. 4 är inte delbart med 6 och det finns inga dagar med nummer 0. Före 1 har vi 40 som inte heller är delbart med 6.

Alternativt resonemang: Om vi tar bort alla helgdagar så återstår följande datum till arbetsdagar: 1, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 40. Alltså är det bara en gång per månad som det är en enda arbetsdag mellan två helgdagar, nämligen den 4:e. Innan 1:an är ju dagen 40, så 1:an står inte heller för sig själv.

21. (C) 7

Kalla de fyra konsekutiva talen för n, $n + 1$, $n + 2$ och $n + 3$. Summerar vi tre av dem får vi följande summor:

(1) $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$ ej primtal
(2) $n + n + 1 + n + 3 = 3n + 4$ kan vara primtal om n är udda
(3) $n + n + 2 + n + 3 = 3n + 5$ kan vara primtal om n är jämnt
(4) $n + 1 + n + 2 + n + 3 = 3n + 6 = 3(n + 2)$ ej primtal.

Vi testar
$n = 3$ i (2) viket ger 13 som är uteslutet
$n = 4$ i (3) ger 17 som är primtal
$n = 5$ i (2) ger 19 som är primtal
$n = 6$ i (3) ger 23 som är uteslutet
$n = 7$ i (2) ger 25 som ej är primtal, så 7 är det minsta heltal som uppfyller villkoren.

Alternativ lösning: Summan av de tre första talen (tre konsekutiva tal) kan vara ett godtyckligt tal delbart med 3 och större än 3. De övriga tre summorna är tre efter den första summan följande tal. Vi söker fyra konsekutiva sammansatta tal som börjar med ett tal delbart med 3, eller egentligen två sammansatta tal mellan två delbara med 3. Ett av dem är jämnt, det andra är udda och inte delbart med 3, en produkt av två tal som har primfaktorer större än 3. Det minsta sådant tal är $5 \cdot 5 = 25$. Summorna är 24, 25, 26 och 27. Talen som Jacob skrev: 7, 8, 9 och 10.

22. (A) skridskoåkning

Eva ska sitta till vänster om hockeyspelaren. Antag att Eva sitter vid Andreas vänstra sida. Då är Eva skidåkare och Andreas hockeyspelare. Då sitter Filip mitt emot Andreas och Ben mitt emot Eva, men mitt emot Ben ska en skridskoåkare sitta. Motsägelse. Eva ska sitta till vänster om hockeyspelaren och hon ska sitta bredvid Filip. Antag att Filip är hockeyspelaren. Då är Ben skidåkaren som sitter vid Andreas vänstra sida. Ben sitter mitt emot skridskoåkaren som måste vara Eva eftersom Andreas och Eva måste sitta bredvid varandra.

23. (B) juni

Både i dagsnummer och i månadsnummer måste minst en av siffrorna 0, 1 eller 2 förekomma. Men vi söker det närmaste överraskande datumet i framtiden, så i första hand testar vi årtalen som börjar på 2. 0 och 1 ska förekomma i dags- och månadsnumren, inte i årtalet. Det tidigaste sådant årtal är 2345, tidigaste möjliga månad detta år är 06, juni, och dagen 17.

24. (D) 1008

D2015 hälsar på alla utom sig själv. Nu har D1 hälsat på en deltagare. D2014 hälsar på alla utom D1 och sig själv. Nu har D2 hälsat på två deltagare. D2013 hälsar på alla utom D1, D2 och sig själv. Nu har D3 hälsat på tre deltagare. Fortsätter vi upprepningen kommer vi till D1009 som hälsar på alla utom D1 till D1006 och sig själv. Nu har D1007 hälsat på 1007 deltagare. D1008 hälsar på deltagarna D1009–D2016. Nu har alla hälsat på det antal deltagare som deras deltagarnummer angav och D2016 har följaktligen hälsat på 1008 deltagare.

Rättningsmall

Uppgift	A	B	C	D	E	Poäng
1				D		3
2				D		3
3	A					3
4				D		3
5			C			3
6				D		3
7		B				3
8					E	3
9				D		4
10	A					4
11					E	4
12			C			4
13		B				4
14					E	4
15				D		4
16	A					4
17			C			5
18		B				5
19					E	5
20	A					5
21			C			5
22	A					5
23		B				5
24				D		5
					SUMMA	96

Redovisningsblankett A

För Kurs 2 och 3.
Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031-786 69 85. Redovisa senast 29 april.

Antal deltagande elever

Kurs	
2	
3	

För in namn och poäng för de 2 bästa eleverna i varje kurs

Kurs	Namn	Poäng
2		
3		

Om du har fler elever med mycket bra resultat kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	Kurs	
	2	3
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		

Redovisningsblankett B

För Kurs 2 & 3

Uppgift nr	Antal elever med rätt svar på uppgiften	
	Kurs 2	Kurs 3
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		