Lösningsförslag Student 2015

1 E Inte mindre än tre år.
Det finns tre hela kalenderår (1998, 1999 och 2000) mellan deras respektive födelseår. Alltså kan det inte vara mindre än tre år.

2 A 0
$(a-b)^5 + (b-a)^5 = (a-b)^5 + (-(a-b))^5 = (a-b)^5 - (a-b)^5 = 0$

3 E 0
$2^{2x} = 4^{x+1}$, omskrivning till samma bas ger ekvationen $4^x = 4^{x+1}$ som saknar lösning.

4 D 2016

I en aritmetisk talföljd $a_i, i = 1,2,\ldots,n$ är $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Divideras summan med n fås medelvärdet som är lika med medelvärdet av första och sista termen,

$$\frac{2001 + 2031}{2} = 2016$$

5 D 3
Alla utom B som har fyra udda noder.

6 B 1
Exakt ett hörn är bortklippt från varje kvadrat. Gäller även den mittersta kvadraten.

7 E Del av en cirkelsektor
I en rak cirkulär kon ligger baskantens alla punkter på samma avstånd från toppen, därför har en uppklippt kons mantelarea form av en cirkelsektor. Man har från en kon kapat av en mindre kon, därför blir mantelareans form differensen mellan två cirkelsektorer.

8 C $X + Y = Z$

Lösningsförslag 1. Låt halvcirkeln med arean X ha diametern a. Arean är då $X = \frac{a^2\pi}{8}$ och $a^2 = \frac{8X}{\pi}$. Låt halvcirkeln med area Y ha diametern b. Den får då arean $Y = \frac{b^2\pi}{8}$ och $b^2 = \frac{8Y}{\pi}$. Slutligen får halvcirkeln med area Z ha diametern c. Det ger arean $Z = \frac{c^2\pi}{8}$ och $c^2 = \frac{8Z}{\pi}$. Pythagoras sats $a^2 + b^2 = c^2$ ger $\frac{8X}{\pi} + \frac{8Y}{\pi} = \frac{8Z}{\pi}$, dvs $X+Y=Z$.

Lösningsförslag 2. Låt arean av den rätvinkliga triangeln, vars hypotenusa är diameter till området Z vara M. Dela triangeln i två rätvinkliga trianglar. De är likformiga med varandra och med den första triangeln. Låt den rätvinkliga triangel vars hypotenusa är diameter till X ha arean K och den rätvinkliga triangel vars hypotenusa är diameter till Y ha arean L. Då har vi $X : K = Y : L = Z : M$ men $K + L = M$, alltså $X + Y = Z$.

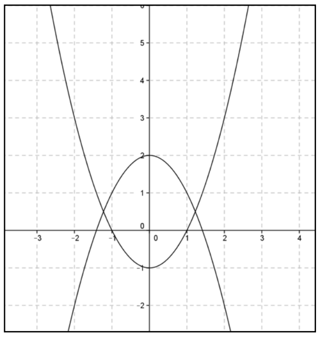
9 B 0, 1, 2, 3
Noll spetsiga vinklar, då måste alla vinklar vara räta, rektangel. En spetsig vinkel – som mest två vinklar är räta och en är trubbig, t ex parallelltrapets. Två spetsiga vinklar, då är två trubbiga, t ex parallellogram eller en rät och en trubbig. Tre spetsiga vinklar, då är den fjärde trubbig.

10 C 2016

$$\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)} =$$

$$\sqrt{2\cdot 2015+2015^2+1} = \sqrt{(2015+1)^2} = 2016$$

11 D 10 områden
Rita graferna och räkna områdena.



12 E Det är omöjligt.
Beräknar man talen som ska stå i respektive ring så får man på vänster sida att -5 + ? = -8 och på höger sida -3 + ? = -8. Vilket ger en motsägelse.

13 C c
$c : e = b$ ger att $c > b$ och $c > e$ eftersom talen är olika positiva heltal. $a + b = d$ ger att $d > a$ och $d > b$. $e - d = a$ ger $e > d$ och $e > a$. Dessa olikheter ger att c är störst.

14 B 6
Kalla de tre första talen för a_1, a_2 och a_3, för dem gäller att $\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3} = 3$. Kalla de andra tre talen a_4, a_5 och a_6, för dem gäller att $\sqrt[3]{a_4\cdot a_5\cdot a_6} = 12$. Det geometriska medelvärdet av de sex talen är

$$\sqrt[6]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6} = \sqrt{\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6}} = \sqrt{3\cdot 12} = 6.$$

15 A $\sqrt{6}$
Med början inifrån betecknar vi de skuggade områdena, som alla har samma area, I, II och III. De tre områdena täcker tillsammans en fjärdedel av den större cirkelns area. Område I, en kvartscirkel med radie 1, har arean $\pi/4$. Område I och II är en kvartscirkel med area $2\pi/4$, det ger att den cirkeln har radien $\sqrt{2}$. Område I, II och III har arean $3\pi/4$, det ger att den större cirkeln har radien $\sqrt{3}$. Produkten av de tre radierna är $1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

16 C 3:7

Bil 1: inköpspris p_1, försäljningspris 1,4 p_1.
Bil 2: inköpspris p_2, försäljningspris 1,6 p_2.
$1{,}4\,p_1 + 1{,}6\,p_2 = 1{,}54(p_1 + p_2)$
$0{,}06\,p_2 = 0{,}14\,p_1$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

17 C $\frac{5}{12}$

P(Tina vinner) = P(Tina får 2) · P(Bibi får 1) + P(Tina får 5) · P(Bibi får 1,2,3 eller 4) =

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{12}$$

18 C 28

Den lägsta siffersumma som kan förekomma är 1, i talen 1, 10, 100 och 1000. Den högsta är 28, i talet 1999. Alla siffersummor däremellan måste förekomma eftersom siffersumman aldrig ökar mer än 1 när ett tal ökar med 1.

19 A Bara 5

Betrakta tärningen till vänster. Vrid den så att sidan med en prick är nedåt. Då blir det sex prickar uppåt. Vrid därefter tärningen ett kvarts varv medurs. Då har de båda tärningar samma läge. Antal prickar på den markerade sidan är då 5.

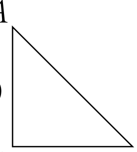
20 D 3025

Summan av talen i rad ett är 55, i rad två $2 \cdot 55$, i rad tre $3 \cdot 55, \ldots$, i rad tio $10 \cdot 55$. Då är hela summan $(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) \cdot 55 = 55^2 = 3025$.

21 E 5

Eftersom summan ska vara tresiffrig så kan bara potenser med exponent mindre än 10 förekomma. Det finns 10 sådana, $2^0, 2^1, \ldots, 2^9$. Summan av dessa 10 tal är 1023. För att summan ska bli mindre än 1000 måste den potens som inte ska finnas med vara minst 2^5. Det finns fem sådana, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8 och 2^9.

22 D 4



Pythagoras sats ger
$20^2 + |BC|^2 = |AC|^2$
$400 = |AC|^2 - |BC|^2$
$400 = (|AC| + |BC|)(|AC| - |BC|)$
Eftersom VL är ett jämnt tal, måste HL vara jämn, alltså minst en av dess faktorer jämn men (|AC|+|BC| jämn) <=> (|AC|-|BC| jämn) när |AC| och |BC| är heltal. Alltså både |AC|+|BC| och |AC|-|BC| är jämn. Vidare är $|AC| > |BC|$. Sätt $|AC| + |BC| = 2P$ och $|AC| - |BC| = 2Q$. Det ger
$400 = 4P \cdot Q$,
$100 = P \cdot Q$,
Det finns (om man bortser från ordningen) fyra par av olika positiva heltal med produkt 100: 1*100, 2*50, 4*25 och 5*20.

23 C $\frac{7}{32}$

Låt $CD = 2a$ och $AD = 2b$. Då är arean av rektangeln $ABCD = 4ab$. Arean av triangel $\mathrm{ADM}_1 = \frac{a \cdot 2b}{2} = ab$. Eftersom M_2 är mittpunkten på AM_1 så är höjden i triangeln $AM_2B = b$. Då är arean av triangel $AM_2B = \frac{2a \cdot b}{2} = ab$. Fotpunkten för den höjden ligger på avståndet $a/2$ från hörnet A. Eftersom M_3 är mittpunkten på DM_2 så är höjden i triangeln $\mathrm{C}M_3B = \frac{3a}{4}$. Då är arean av triangel $\mathrm{C}M_3B = \frac{2b \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{3ab}{4}$.

Fotpunkten för den höjden ligger på avståndet $b/2$ från hörnet B. Eftersom M_4 är mittpunkten på $\mathrm{C}M_3$ så är höjden i triangeln $\mathrm{C}M_4M_1 = \frac{3b}{4}$. Då är arean av triangel $\mathrm{C}M_4M_1 = \frac{a \cdot \frac{3b}{4}}{2} = \frac{3ab}{8}$.

Då är arean av de fyra trianglarna $ab + ab + \frac{3ab}{4} + \frac{3ab}{8} = \frac{25ab}{8}$.

Förhållandet mellan arean av fyrhörningen $M_1M_2M_3M_4$ och arean av rektangeln $ABCD$ är $\frac{4ab - \frac{25ab}{8}}{4ab} = \frac{7}{32}$.

24 D 65

Lösningsförslag 1:

Dela dem i 3 grupper om 32: 1-32, 33-64, 65-96 Så länge antalet medlemmar i varje grupp är jämnt halveras varje grupp och den första i nästa grupp börjar med ett udda tal. Den första i gruppen förblir först. Efter fem omgångar finns bara den första i varje grupp kvar: 1, 33 och 65 och då är det lätt att räkna ut att nr 65 blir kvar på slutet. (1-stannar, 33-bort, 65-stannar, 1-bort, 65-kvar)

Lösningsförslag 2:

Efter varje omgång försvinner hälften av medlemmarna så länge det finns ett jämnt antal medlemmar kvar. Efter omgång 1 återstår 48 medlemmar, det är de som sa tal som är kongruenta med 1 modulus 2. Efter omgång 2 återstår 24 medlemmar, de som i omgång 1 sa tal som är kongruenta med 1 modulus 4. Efter omgång 3 återstår 12 medlemmar, de som i omgång 1 sa tal som är kongruenta med 1 modulus 8. Efter omgång 4 återstår 6 medlemmar, de som i omgång 1 sa tal som är kongruenta med 1 modulus 16. Efter omgång 5 återstår 3 medlemmar, de som i omgång 1 sa tal som är kongruenta med 32 modulus 1, dvs. 1, 33 och 65. Därefter kommer medlemmarna som i omgång 1 sa 33 respektive 1 att försvinna. Kvar blir den som startade med 65.