Lösningsförslag Junior 2015

1. B. 1000

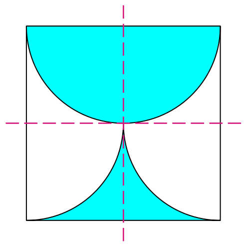
$20{,}15 \cdot 51{,}02 \approx 20 \cdot 50 = 1000$

2. E. 15

Det finns 14 par bestående av en T-shirt och en socka samt ytterligare en T-shirt.

3. B. $a^2/2$

Dra en vågrät linje parallell med kvadratens sida genom de två skuggade områdenas gemensamma punkt. Dela sedan området som är begränsat av de två kvartcirkelbågarna utefter symmetriaxeln. De två områdena passar in i områdena mellan den parallella linjen och den skuggade halvcirkeln. Alltså är halva kvadratens area skuggad.



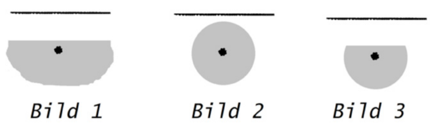
4. E. 6

Totalt betalade flickorna 150 cent. Anns andel är 80/150 = 8/15. Hon bör alltså få 8/15 av 30 kakor, dvs 16 kakor. Eftersom hon fick 10 kakor så bör hon få ytterligare 6 kakor.

.

5. B

Bild I: Skatten kan vara i det skuggade området som är mer än fem meter från häcken. Bild II: Skatten kan vara i det skuggade området som är högst fem meter från päronträdets stam. Bild III: Skatten är i det område som är gemensamt för bild I och bild II (skärningen).



6. C 6

Tre av termerna har entalssiffran 5 och den fjärde, 2015^0, har entalssiffran 1. Det ger att summan har entalssiffran 6.

7. E 23

Antag att x elever bara väljer idrott. Då väljer $2x$ elever bara programmering. Det är 30 elever som bara har valt ett ämne. Då måste det betyda att $x = 10$, och 23 $(2 \cdot 10+3)$ elever har valt programmering.

8. A 6^{13}

En heltalspotens är en kvadrat om basen är en kvadrat eller exponenten är delbar med 2. En heltalspotens är en kub om basen är en kub eller exponenten är delbar med 3. Det enda tal som inte uppfyller något av villkoren är 6^{13}. För de övriga gäller B: $5^{12} = (5^6)^2$ eller $(5^4)^3$, C: $4^{11} = (2^2)^{11} = (2^{11})^2$, D: $3^{10} = (3^5)^2$, E: $2^9 = (2^3)^3$.

9. D. 116

Eftersom $100 = 14 \cdot 7 + 2$, har han, när 98 dagar har gått, 16 ljus kvar. De räcker 16 dagar men av dessa 16 ljus kan han göra 2 nya. Totalt har han ljus för $(98 + 16 + 2)$ dagar = 116 dagar.

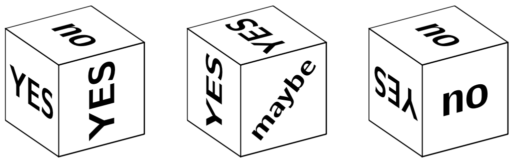
Alternativ lösning:
Mr Candle förbrukar 6/7 ljus per dag. Hans ljus räcker till 100/(6/7) = 116 +2/3, dvs 116 dagar och har vax över som motsvarar 2/3 av hans vaxförbrukning/dag.

10. C. 0,1,2,3

För en konvex månghörning gäller att alla innervinklar är mindre än 180°var. En femhörning har vinkelsumma 540°. Är den regelbunden så är alla vinklar lika stora (108°), dvs. $n = 0$ är möjligt. För $n = 1$, 2, och 3 går det att konstruera konvexa femhörningar. Om $n = 4$ så skulle den femte vinkeln vara 180°, vilket innebär att vi har en rektangel och ingen femhörning.

11. B 1/2

Betrakta tärningen längst till höger. YES i den tärningen motsvarar inte något av orden YES i tärningen i mitten. Det betyder att tärningen har ordet YES på minst tre av sidorna. Fler än 3 kan de inte vara eftersom två sidor har ”no” och en ”maybe”. Alltså är sannolikheten 1/2.



12. C. $2 + 2\sqrt{2}$

Att gå diagonalt genom en ruta ger kortare sträcka än att gå längs rutans kanter.

Myran kan utnyttja två diagonaler och två kanter. En diagonal har längden $\sqrt{2}$.

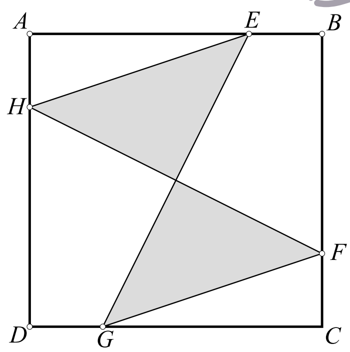
Alternativ lösning: Vägen är minst 4 steg och är stegen inte fler än 4 så måste minst 2 av dem vara diagonaler.

13 C. 5

Antag att Imi har I öron, Dimi D öron och Trimi T öron. Då kan följande ekvationssystem ställas upp $\begin{cases} D + T = 8 \\ I + T = 7 \\ I + D = 5 \end{cases}$ med lösning $\begin{cases} I = 2 \\ D = 3 \\ T = 5 \end{cases}$

Alternativ lösning: Varje öra ses av 2 mötesdeltagare, så det finns (8+7+5)/2= 10 öron i kratern. Trimi ser de 5 som inte är hans.

14 B. 25



Dra sträckorna EF och GH. De fyra trianglarna AEH, BFE, CGF och DHG är kongruenta enligt S-V-S. Vidare är EFGH en kvadrat och de fyra trianglarna som den består av är kongruenta.
Varje triangel har arean $80 \cdot 1/4 \cdot 3/4 : 2 = 7{,}5$ och kvadraten *EFGH* har arean $80 - 4 \cdot 7{,}5 = 50$. Hälften av kvadraten *EFGH* är skuggad.

15 D. 34

Primtalsfaktorisering ger $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Eftersom det är far och son så är det rimligt att deras åldrar är 65 och 31. Det ger differensen 34.

16 B. 13

För rötterna $r_1$och r_2 till en andragradsekvation $x^2 + px + q = 0$ gäller enligt Viète's formel att $r_1 + r_2 = -p$ och $r_1 \cdot r_2 = q$. Det ger $r_1 + r_2 = 85$. Då en summa av två heltal är udda måste en av termerna vara jämn. Men rötterna till ekvationen här är primtal och eftersom 85 är ett udda tal så måste en rot vara 2, det enda jämna primtalet. Då är den andra roten 83. Talet $c = q = 2 \cdot 83 = 166$ med siffersumma 13.

17 D. 20

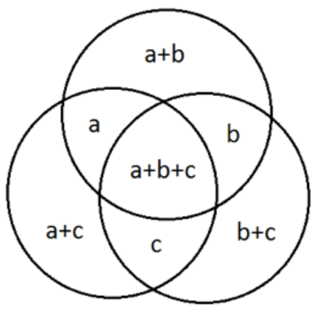
Beroende på hundratalssiffrans värde kan vi addera 3 (+3) eller subtrahera 3 (-3) för att få tiotalssiffrans värde. Samma gäller mellan tiotalssiffran och entalssiffran. Det ger tre tal där operationen för tiotalssiffran är +3 och operationen för entalssiffran är +3
sex tal där operationerna är +3 och -3
fyra tal där operationerna är -3 och -3
sju tal där operationerna är -3 och +3
Talen är (i storleksordning) 141, 147, 252, 258, 303, 363, 369, 414, 474, 525, 585, 630, 636, 696, 741, 747, 852, 858, 963 samt 960. Totalt blir det 20 stycken.

18 E. $n = 37$

Om $n = 37$ så är $n - 2 = 35$ (ej primtal) och $n + 2 = 39$ (ej primtal), ett exempel som motsäger påståendet.

19 A. 0

Låt a, b och c vara godtyckliga tal. Då gäller som i figuren:



Med reglerna i uppgiften så är då $a = (a + b) + (a + c) + (a + b + c)$. Det ger $a = a + 2 \cdot (a + b + c)$ alltså $a + b + c = 0$. Talet i mitten måste vara 0 och oberoende av de kända värdena.

20 B. 24

De tre lexikonen kan hon placera på 3! (dvs. 3·2·1) sätt, novellerna på 2! sätt och de två grupperna av böcker på 2! sätt. Multiplikationsprincipen ger $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$.

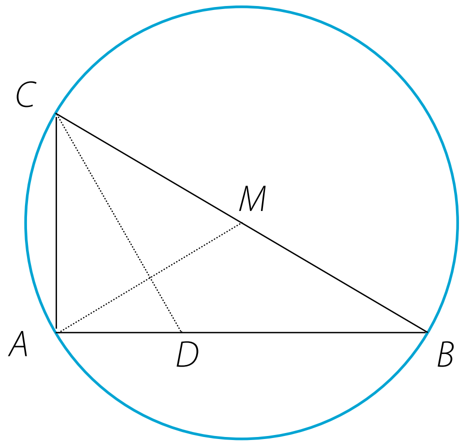
21 C. 2

Det finns 7 potenser av 2 (med naturliga exponenter) som är mindre än 100: 1, 2, 4, 8, 16, 32 och 64. Deras summa är 127. Summan av 6 av dem kan skrivas 127 – *p* där *p* är en av dessa 7 potenser. Bara 2 av dessa potenser är större än 27, nämligen 32 och 64. De tal som uppfyller villkoret är $127 - 64 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 63$ och $123 - 32 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 95$.

22 D. 3:2

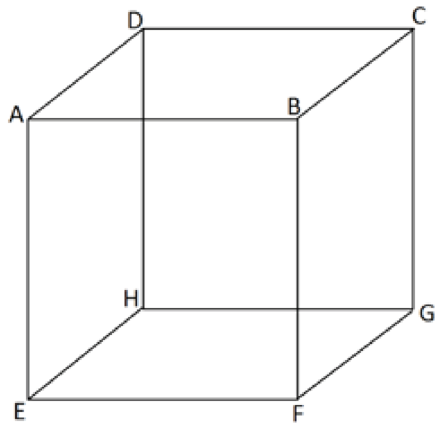
$BX/XA = 4/1$ ger $BX/BA = 4/5$. Kalla punkten där linjen genom *X* skär sidan *BC* för *D* och punkten där linjen genom *Y* skär sidan *BC* för *E*.
Då gäller att Arean (ΔBXD)/Arean (ΔBAC) = 16/25. Då är arean av fyrhörningen AXDC 9/25 av arean av triangeln ABC.
Alltså är Arean (ΔBYE)/Arean (ΔBAC) = 9/25 och $BY/BA = 3/5$.
Det ger $BY/YA = 3/2$.

23 C. $\sqrt{4}$



Vi ritar en rätvinklig triangel *ABC* och låter triangeln vara inskriven i en cirkel med medelpunkten *M* och radie *r*. Då bisektrisen *CD* är dragen gäller att $AD = 1$ och $DB = 2$. Bisektrissatsen ger $CA/1 = CB/2$. Eftersom $CB = 2r$ så är $CA = r$. Triangeln *ACM* är alltså liksidig. Då är triangel *ACD* en halv liksidig triangel och bisektrisen $CD = 2 \cdot AD = 2 = \sqrt{4}$.

24 D. 16



Det går tre kanter från varje hörn vilket medför att Oyla måste besöka varje hörn minst två gånger. I hörnet som hon startar ifrån ska hon befinna sig vid minst 3 tillfällen eftersom hon ska också avsluta sin promenad där. Kuben har åtta hörn, så det blir minst 17 ”hörnbesök” och hon får gå 16 kantlängder mellan ”hörnbesöken”. 16 kantlängder är också tillräckligt, Oyla kan till exempel gå följande väg: A --- B --- C --- D --- A --- E --- F --- B --- F --- G --- C --- G --- H --- D --- H --- E --- A