Svar och lösningar

1: D $200 \cdot 9 = 1800$
Om eleverna inte redan kan multiplicera med 200 kan lösningen förklaras via $100 \cdot 9 = 9 \cdot 100 = 900$. $200 \cdot 9$ är alltså dubbelt så mycket, 1800.
Vi kan också utesluta de andra alternativen 2009, 11, 191 och 209, som alla är udda tal.

2: B I cirkeln och kvadraten, men inte i triangeln.
Här handlar det både om att benämna de tre geometriska formerna och att kunna se att kängurun är i både cirkeln och kvadraten.
Problemet kan illustreras konkret eller med en bild och eleverna kan undersöka en form i taget.

3: B 6
Lösningen kan illustreras konkret och med bild. Låt eleverna beskriva operationerna med ord och symboler, så att sambandet mellan den konkreta handlingen, den språkliga beskrivningen och det tecknade uttrycket blir tydligt. $\frac{16}{2} = 8, 8 - 2 = 6$.

4: D 32
Att kunna tolka sådana här bilder är förvånansvärt svårt för många. Bygg bordet med klossar om det behövs och visa hur bordsskivan kan beräknas som $4 \cdot 5$ eller $5 \cdot 4$. Diskutera hur många ben som finns och hur många klossar varje ben har. Det är kanske inte uppenbart för alla att hörnklossen inte ska räknas två gånger.
Uttrycket $4 \cdot 5 + 4 \cdot 3$ aktualiserar också prioriteringsreglerna och kan fungera som en bra illustration till dem.

5: D 3
23 kan bara fås på ett sätt: $3 \cdot 6 + 5$. Här har man nytta av att känna igen 24 som ett tal i sexans tabell.

6: E De två bilderna är varandras motsatser, vit ruta motsvaras av grå.
Jämför rad för rad (eller ruta för ruta), anteckna mönstret med bokstäver eller klipp ur och prova.

7: D 18:53
Det spelar ingen roll när avbrotten sker, vilket kanske inte är helt självklart för eleverna. Den sammanlagda tiden är 90 min + 8 min + 5 min = 103 min. 103 min = 1 h 43 min.
17:10 är ett klockslag men talar ju också om hur lång tid på dygnet som förflutit. Därför kan man addera 17 h 10 min och 1 h 43 min, vilket ger 18 h 53 min, 18:53
Visa lösningen både med hjälp av en klocka och som en addition, så att eleverna ser sambandet.

8: B 2
Talet 7 kan bara delas upp på tre olika tal på ett sätt: $1 + 2 + 4$
Låt eleverna undersöka alla möjligheter och resonera om hur vi kan vara säkra på att detta är enda möjliga lösningen.

9: D 40

Här måste eleverna tänka sig rutorna och inse att hela chokladkakan är $8 \cdot 5$ rutor. Visa konkret och låt eleverna berätta hur hela kakan ser ut, med 8 rader med 5 i varje. Var tydlig med att en rad (åt endera hållet) kan ses som en enhet som upprepas,

10: C 46 dm

Mellan två mittpunkter är det lika långt som från kant till kant på en platta om de ligger kant mot kant. Alltså 5 plattlängder och 4 plattbredder. Varför bara 4 bredder? $5 \cdot 6\,\text{dm} + 4 \cdot 4\,\text{dm} = 46\,\text{dm}$. Jämför med $10 \cdot 3\,\text{dm} + 8 \cdot 2\,\text{dm}$.

11: A 6

Lös uppgiften konkret med klossar eller markörer av något slag och gör en tabell över hur antalet ökar. Resonera om att det från början är 6 pojkar fler och att flickorna närmar sig pojkarnas antal med 1 i veckan, alltså tar det 6 veckor tills de blir lika många.

12: A 6

Rita husraden eller markera med motsvarande tal, t ex

.., ..., 25, 26, 27, Ann 28, 29, 30, ...

Vi vet att det ska finnas 27 hus på ena sidan om Anns och 13 på andra sidan, dvs totalt $27 + 1 + 13 = 41$ hus. När vi vet att det finns 41 hus på gatan kan vi hitta mitten, 21. Mellan hus nummer 21 och hus nr 28 finns det 6 hus, likaså mellan hus 21 och hus 14. Om Ann bor i hus 14 eller 28 vet vi ju inte, det beror på från vilket håll vi räknar.

13: B 6

Rita rektangeln och sätt ut måtten 8 resp 4 cm. Omkretsen blir 24 cm. Eftersom en kvadrat är en rektangel med lika långa sidor måste varje sida vara 6 cm.
$2 \cdot (8 + 4) = 24$, $\frac{24}{4} = 6$. Jämför den aritmetiska lösningen med resonemanget så att eleverna ser att det är samma lösning uttryck på olika sätt.

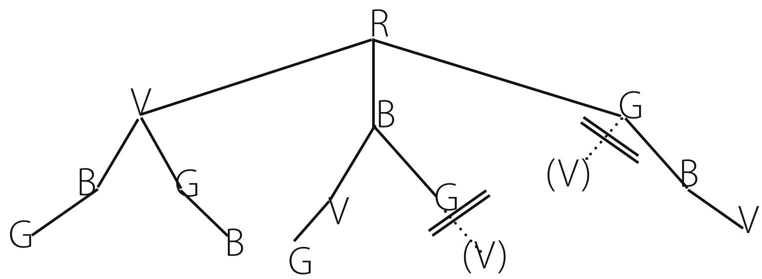
14: B 90

Korna har tillsammans 120 ben. 120 ben räcker till 60 kycklingar.
$30 \cdot 4 = 120$, $\frac{120}{2} = 60$, $60 + 30 = 90$
Om vi räknar ut antalet kycklingar genom att dividera 120 med 2 använder vi tankeformen innehållsdivision.
Ett annat sätt att resonera: Eftersom kycklingarna har hälften så många ben var måste de vara dubbelt så många som korna om antalet ben ska vara detsamma.
Visa sambandet konkret eller med bild.

15: E Problemet kan lösas konkret med dominobrickor eller med urklippta bilder av sådana. Man kan också resonera om hur prickarna är ordnade och jämföra med alternativen. Det som är avgörande är riktningen på de två och de tre prickarna.

16: D 4

Det enklaste är att illustrera med ett träddiagram.



Från den röda finns tre möjligheter: till den vita, till den blå och till den gula.
1) R-V
2) R-B
3) R-G

1) Från den vita fortsätter biet till den blå eller den gula, vilket ger två möjligheter R-V-B-G och R-V-G-B
2) Från den blå fortsätter det till den vita och sen den gula: R-B-V-G (det kan inte besöka den gula precis före den vita)
3) från den gula fortsätter biet till den blå: R-G-B-V

Man kan också ställa upp systematiskt:

R: V-B-G
V-G-B
B-G-V går ej
B-V-G
G-B
G-V går ej

17: B 24

Ställ upp en tabell och arbeta baklänges.
96 är summan av 60 och ett okänt tal: 96 – 60 = 36. 60 är antalet kort år 2008, och 36 är antalet 2007. 60 är summan av 36 och ett okänt tal: 60 – 36 = 24. 24 är antalet kort år 2006
När började Adam samla kort?

18: A 5

Här finns det flera strategier att använda. Resonera: Vi vet att det blir en sko i storlek 45 och en i storlek 36 över. Vi vet alltså att alla skostorlekar ligger inom detta intervall. För att få så få personer som möjligt utgår vi från att så många som möjligt har två storlekars skillnad: 36 + 38, 38 + 40, 40 + 42, 42 + 44 och 44 + 45 eller 45 + 43,43 + 42,41 + 39, 39 + 37 och 37 + 36. Åtminstone en person har bara ett nummers skillnad (eftersom vi får över ett jämnt och ett udda skonummer). Vi klarar att para ihop detta med 5 personer, vilket är det minsta alternativet.
Skriv upp skostorlekarna på två rader och para ihop:

36 37 38 39 40 41 42 43 44 45

36 37 38 39 40 41 42 43 44 *45*

Arbeta vidare med Ecolier

Vi hoppas att arbetet med lösningarna givit upphov till många bra diskussioner och också intressanta frågor. Kanske har ni tillsammans utvecklat frågeställningarna och gått vidare med liknande problem.

I samband med det gemensamma arbetet kan det vara lämpligt att uppmärksamma terminologin och passa på att lyfta fram vad de olika termerna innebär. Låt också eleverna själva få definiera olika begrepp. För definitioner hänvisar vi till den nyutkomna *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Vi har i detta dokument samlat några förslag på hur man kan arbeta vidare med problemen. Dela också gärna med dig av era egna idéer, som du kan skicka till kanguru@ncm.gu.se eller på papper till Kängurun, NCM Göteborgs universitet, Box 160, 40530 Göteborg.

Många problem återkommer i olika skepnader år från år. Bland de gamla problemen finns också förslag till hur de kan utvecklas. Alla gamla problem och dessa förslag finns tillgängliga på Kängurusidan på ncm.gu.se och är helt fria att använda.

Tal

Några problem handlar om grundläggande talkunskaper: E1, E3, E5, E8, E12.

Udda och jämnt

E1 behandlar udda och jämna tal. Vilka tal är udda och vilka är jämna? Vad får det för konsekvenser? Om inte eleverna redan undersökt vad som generellt gäller vid addition av udda och jämna tal kan de göra det. Visa gärna konkret varför två udda tal alltid kan läggas samman till ett jämnt. Betona att jämna tal är multiplar av 2. Hoppa på tallinjen. Denna bakgrund kan man bygga vidare på för att utveckla elevernas förståelse för vilka entalssiffror som blir resultatet av olika multiplikationer. Sådan talkunskap är värdefull t ex när man ska pröva tals delbarhet.

Hälften och dubbelt

Problem kring hälften och dubbelt förekommer ofta i Kängurun, så också i år i E3. Ofta har eleverna bra känsla för detta, men det behöver ändå diskuteras så att eventuella missuppfattningar kommer fram och kan åtgärdas. Ett något svårare problem är:
Kalle har hälften så många clementiner som Lena. Tillsammans har de 21 st, hur många har var och en?

Börja på 1 och dubblera successivt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ..... Den talföljden kommer eleverna att möta många gånger. Låt eleverna skriva talen som produkter av 2, och diskutera hur skrivsättet skulle kunna förenklas. Det kan vara ett lämpligt sammanhang för att introducera potensskrivning. Inte för att eleverna nu måste kunna det, utan för att de i ett sammanhang som de är engagerade i ser användningen. Nästa gång de ser det skrivsättet kanske de känner igen det. Det är bra att få möta procedurer, konventioner och begrepp innan man måste kunna dem.

Börja på 1 och halvera successivt $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$. Jämför dubbleringen och halveringen.

Vilket svar skulle vi få om vi adderade alla dessa delar: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$?

Arbeta gärna konkret med tårtbitar och bråkstavar inledningsvis och illustrera på tallinje.

Det finns en del gamla multiplikationsalgoritmer som bygger på dubblering, t ex egyptisk multiplikation och den ryske bondens metod. Exempel $23 \cdot 64$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 64 &= 64 \\ 2 \cdot 64 &= 128 \\ 4 \cdot 64 &= 256 \\ 8 \cdot 64 &= 512 \\ 16 \cdot 64 &= 1024 \qquad 23 = 16 + 4 + 2 + 1, \text{ så } 23 \cdot 64 = 1024 + 256 + 128 + 64 = 1472 \end{aligned}$$

Låt eleverna pröva denna metod för att multiplicera olika tal.

Antal tal emellan

Problem 12 handlar om att räkna hur många tal som finns emellan två tal. Det kan vara besvärligt om man vill utföra en subtraktion (eller räkna upp). Ofta blir lösningen mycket konkret, med fingerräkning, även av personer som helt behärskar subtraktion, även vuxna. Gör flera exempel, t ex hur många sidor har jag läst om jag började på 245 och slutar (längst ner) på 287? Resonera om vilka sidor som kan tas bort, som inte ingår i mängden. I årets Cadet, C 3, finns ett motsvarande problem med endast udda tal.

Tals uppdelning

E 5 och E 8 handlar om hur tal kan delas upp på olika sätt. För att lösa problem som E 5 är det förstås bra att ha säkra tabellkunskaper, så att man snabbt kan känna igen 23 som ett tal nära 24 som finns i sexans tabell. Gör flera exempel med tärningar. Sådana kunskaper är också viktiga för att kunna göra överslag, när man behöver hitta tal som är enkla att hantera. Låt också eleverna arbeta med att göra överslag och visa hur de kan använda sina tabellkunskaper. Diskutera skillnaden mellan överslag och exakta beräkningar. När används vilken metod? (Se t ex McIntosch, *Förstå och använda tal*).

E 8 handlar om att dela upp talet 7 som en summa av tre olika tal. Hade det i stället varit 6 nötter hade vi fått $1 + 2 + 3$ och 10 hade gett $1 + 2 + 3 + 4$. Vilka tal kan vi dela upp på detta sätt? Undersök triangeltalen, de är grundläggande och eleverna kommer att möta dem i olika sammanhang framöver. Se också B 11.

Arbeta med att skriva tal som summor av olika ensiffriga tal, som summor av tre olika ensiffriga tal. Vilket är det största tal vi kan skriva som en summa av tre ensiffriga tal?

Problem 9 är mycket utvecklingsbart både inom aritmetik och geometri. Det illustrerar också sambandet mellan multiplikation och area och aktualiserar betydelsen av att kunna uppfatta multiplikation som en area och inte bara som upprepad addition Fortsätt att dela chokladkakan efter samma mönster, kortsidan till brodern och långsidan till systern. Hur många bitar får de var? Hur stor del av kakan får de? Undersök också hur det blir om man börjar bryta efter långsidan. Pröva olika storlekar på kakor. Hur ska kakan se ut för att delning ska bli så rättvis som möjligt? Kan man få en helt rättvis delning?

Tidsberäkningar

E 7 handlar om att beräkna tid. Vi vet att denna typ av uppgifter ofta uppfattas som svåra, även om beräkningarna för de allra flesta skulle vara oproblematiska. Kanske är det osäkerheten om hur mycket klockan är när den är t ex 17:30 som gör att eleverna tror att uppgiften är svår. Kanske kan det vara att de vet att det är något speciellt med 60 minuter som skapar osäkerhet?

Det enklaste sättet att beräkna tid är att konkret ”se på urtavlan” och räkna uppåt. Så gör förmodligen de flesta av oss, även om vi kan utföra beräkningarna på andra sätt.

Att klockslag är ett mått på hur lång tid av dygnet som förflutit är inte uppenbart för alla. Detta förklarar att vi kan beräkna tidsdifferenser. Eftersom vi har 60 minuter på en timme fungerar inte vårt vanliga decimala system med växling från ental till tiondelar, eftersom minuterna inte uttrycks som tiondelar och hundradelar av timmen. Denna avvikelse från vårt vanliga sätt att räkna kan vara en utmärkt utgångspunkt för att diskutera och utveckla förståelse för positionssystemet och för växling och minnessiffror i våra standardalgoritmer.

Rumsuppfattning och geometri

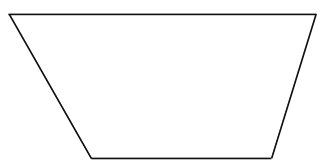
Problem 2 handlar både om att kunna identifiera geometriska former och om att tolka beskrivningen på ett korrekt sätt. Vad betyder *både* och *varken*?

Flytta kängurun till olika platser och låt eleverna beskriva var den är. Gör också beskrivningar och låt eleverna placera ut kängurun. Utveckla gärna uppgiften med fler figurer och gör den mer komplex. Låt eleverna göra egna liknande uppgifter, att formulera problemet kräver minst lika mycket som att lösa det.

Några grundläggande samband

E 10 rör mätning av sträckor. Ett liknande problem fanns 2007, B 16. Centralt i dessa problem är mittpunkten.

Som vanligt handlar några problem om enkla formers area och omkrets, E 13. Vi behöver ha vissa grundläggande faktakunskaper, t ex att en rektangel är en fyrhörning där alla vinklar är räta, och alltså motstående sidor parallella (vilket också innebär att en kvadrat är en rektangel). Låt eleverna arbeta med att definiera de geometriska figurer de känner till. Uppmuntra dem att vara så precisa och utförliga som möjligt. Ställ frågor som hjälper eleverna att se de avgörande skillnaderna och likheterna mellan olika former, t ex varför är inte detta en rektangel?

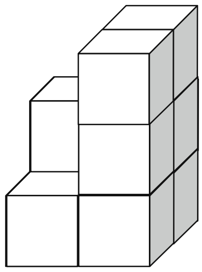


Två- och tredimensionella konstruktioner

Att kunna uppfatta de tre dimensionerna i en tvådimensionell bild, som i E 4, är förvånansvärt svårt för många elever i dessa åldrar. Det är en förmåga som måste bygga på konkreta erfarenheter och utvecklas med hjälp av samtal och att eleverna uppmärksammas på hur djupet vi kan se i verkligheten överförs till platta bilder.

Att kunna bedöma hur många klossar som finns i ett bygge är en viktig grund för volymbegreppet. Hjälp eleverna att utveckla påbyggbara strategier för att beräkna antalet, så att de systematiserar sina beräkningar radvis och kolumnvis. Att räkna antalet på ett ostrukturerat vis leder inte till förståelse för de grundläggande formlerna för area och volym. Den måste bygga på konkret erfarenhet av att systematiskt räkna antalet.

Låt eleverna bygga olika kroppar med kuber och rita dem från olika håll. Prata om vad man ser och hur det ser ut. En modell som kan användas är att bygga med olikfärgade kuber, t ex multilink, och sen rita bygget från fyra håll: framifrån, bakifrån, från vänster och från höger. Varje bygge beskrivs alltså av fyra ritningar. Eleverna kan arbeta i par och sen byta ritningar med ett par kamrater, som får i uppgift att bygga efter ritningarna. Årets Milou 12 handlar om att bygga efter en speciell sorts ritning, se exemplet:



2	3
1	3

Att rita tredimensionellt är inte lätt och eleverna behöver få ledning och stöd för det. Använd gärna ett isometriskt prickpapper, som finns att hämta på ncm.gu.se/node/2281.

Låt eleverna rita av något i omgivningen från ett annat perspektiv än de kan se, t ex huset ovanifrån. Använd tidningsbilder och låt dem rita motivet så som det skulle sett ut från ett annat håll. (Se Nämnaren 2, 1996. *Matematiken i bilden eller bilden i matematiken* och B 18, 2008)

Problem med klossbyggen har funnits i Kängurun varje år, i flera olika klasser. I år finns ett trevligt problem i Student, S 9. Det är användbart för elever i alla årskurser, även om arbetsformerna kan skilja sig åt.

Vridningar, rumsuppfattning

Det är viktigt att eleverna får tänka sig att figurer vrids, E 15. Att utföra operationerna konkret löser problemet, men lösningen i sig är inte det väsentliga. Det konkreta arbetet ska leda till att eleverna kan göra motsvarande operation mentalt.

Hur ändras riktningen på de ingående delarna när vi vrider ett föremål? Tärningar är lämpliga som exempel eftersom de är välkända och lättillgängliga. Gör egna exempel, rita figurer och bilder åt ett annat håll. Hur ser miniräknarens knappar ut om vi ser den från andra hållet? Hur ser bokstäverna ut om vi ser dem från andra hållet?

Arbeta med både vridningar och speglingar och jämför. Låt eleverna få uppleva skillnaden på en spegelbild och ett fotografi – i spegeln ser höger hand ut att vara vänster och eftersom de flesta av oss har ett asymmetriskt utseende ser vi inte likadana ut i spegel som på ett foto. Se också Milou 5 och J 3, 2008.

Problemlösningsstrategier

Flera av problemen aktualiserar användbara problemlösningsstrategier, t ex E 14, E 16, E 17 och E 18. En strategi är att rita en bild. Många gånger blir dock bilden onödigt utvecklad och tar alltför mycket kraft från problemlösningen. Bilden ska vara tillräckligt tydlig för att vara till hjälp, men inte så detaljerad att de väsentliga strukturerna skyms. (Se Hagland, *Rita en bild* i Nämnaren 3, 2007)

Problem 16 löser man kanske bäst med ett träddiagram. Med hjälp av träddiagram kan man illustrera kombinatoriska problem. Ett vanligt förekommande problem handlar om att kombinera olika smaker i en glass-strut:

I kiosken kan man köpa glass i kulor. Det finns tre smaker: vanilj, choklad och jordgubb. Hur många olika glassar kan få om man köper två kulor? Tre kulor? Variera antalet smaker och antalet kulor. Undersök vilken skillnad det blir om vi tar hänsyn till ordningen och betraktar jordgubb + vanilj som en annan glass än vanilj + jordgubb.

Se också C 11, 2004, som också handlar om att köpa glass.

En bra problemlösningsmetod är också att göra en tabell. I en tabell får man ordning på sina tal. Tabeller kan användas för olika typer av problem, inte bara där det handlar om att finna mönster. Säkert har någon elev gjort en tabell för att lösa E 17. Den kan man utgå från. Junior 9 är en motsvarande uppgift.

Litteratur

Hagland, K. (2007). Rita en bild. I *Nämnaren* 34(3), s27–31.
Kiselmn, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* NCM, Göteborgs universitet.
McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal.* NCM, Göteborgs universitet.
Nämnarenartiklar publicerade 1990–2006 finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade.
Alla tidigare Känguruproblem finns på *Kängurusidan*: ncm.gu.se/kanguru