Svar och korta lösningar Benjamin 2006

3 poäng

1.	B	2006	2005 + 2007 är lika mycket som 2 · 2006.
2.	D	2 309 415 687	Det kort man lägger först längst till vänster, måste ha så litet tal till vänster som möjligt, dvs 2. Välj sedan varje gång kort som har minst tal i positionen till vänster. Svarsalternativ A, B och E går inte att lägga.
3.	B	16	Vid ett bord får 4 plats. För varje ytterligare bord blir det 2 platser till. Det får rum två vid varje bord, plus en vid varje kortsida på långbordet.
4.	B	200 kr	Två bollar och två klubbor kostar 1000 kr. Den extra bollen kostar då 200 kr.
5.	C	37	På gatunumren 1 – 34 finns 34 hus. På nummer 35, 37 och 39 finns 3 hus till.
6.	D		Hålen i kuben ligger på två kanter som ligger längst ifrån varandra – diagonalt motstående.
7.	C	8	Översta sexan är med i 1 sätt, sexan därnäst i 3, nästa sexa i 3 och den nedersta i 1 sätt.

4 poäng

8.	A	0,005	Hälften av 0,01 är 0,005 eftersom 2 · 0,005 = 0,01 eller 0,005 + 0,005 = 0,01. Hälften av en hundradel är fem tusendelar, då tio tusendelar är en hundradel.
9.	A	46	De tal som ger rest 2 är 8 och 38.
10.	D	1000	Skillnaden mellan 2 och 1 är 1, mellan 4 och 3 är 1 osv. Det innebär samma skillnad: 1 för alla 1000 paren av tal, totalt 1000.
11.	E	triangel	Vid vikning får vi en liksidig triangel med hörn i sexhörningens omärkta hörn.
12.	D	grön	Den nedersta raden är *l, r, v, b, g, l, r, v, b, g.*
13.	A	1/4 cm^2	Rektangeln har basen 1 cm och höjden 1/4 cm.
14.	E	1010101010	Differenserna av talen parvis uppifrån och ner:

$$\begin{array}{r} 1000000000 \\ 10000000 \\ 100000 \\ 1000 \\ 10 \end{array}$$

Summan av dessa tal är 1010101010.

5 poäng

15.	B	4	Delarna är 1 dm, 2 dm, 3 dm, 4 dm och 5 dm, vilket innebär 4 kapningar.
16.	A	2 dl	Kuben har 6 sidoytor, vardera med 9 småkvadrater. Det innebär att 1 dl räcker till 6 småkvadrater. Den vita ytan har 12 småkvadrater.
17.	B	3	Saras summa: 99 + 12 = 111. Alis summa: 98 + 10 = 108.
18.	B	20 g	Fyra figurer till vänster väger lika mycket som tre figurer till höger, dvs 120 g. Stjärnan väger dubbelt så mycket som rektangeln med frågetecken, som därför måste väga 20 gram.
19.	E	torsdagar	Från första till och med femte måndagen är det 29 dagar. Det innebär att en månad med 31 dagar kan börja tidigast på lördag eller sluta senast på onsdag.
20.	C	124	För att bygga den andra kvadraten behövs 8 (= 2 · 4) stickor till, för den 3:e kvadraten 12 (= 3 · 4) stickor fler än den andra, osv ... för den 31:a kvadraten 31 · 4 fler stickor än den trettionde.
21.	C	20 cm	Genom att placera cirkelns diameter längs den stora rektangelns diagonal ser man att diagonalen i en liten rektangel är 10/4 cm = 2,5 cm. Omkretsen är 8 · 2,5 cm = 20 cm.

Arbeta vidare med Benjamin 2006

Vi hoppas och tror att du finner många intressanta idéer bland årets Känguruaktiviteter och att denna problemsamling kan inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag att arbeta vidare med.

Eleverna kan lösa Känguruproblemen med olika representationer. De kan arbeta laborativt eller genom att rita bilder. De kan resonera språkligt, både skriftligt och muntligt och lösa problemen med uträkningar. Samma problem kan förstås lösas på flera olika sätt. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt. De kan gemensamt försöka finna olika lösningsmetoder, sedan jämföra och se vilken de finner enklast eller mest spännande. De kan formulera egna aktiviteter eller exempel med anknytning till frågeställningar som kommer upp vid samtalen eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över problem. Att jämföra olika uppgifter och göra kopplingar till händelser och upplevelser i eller utanför skolan är en bra utvecklingsmöjlighet. Att se likheter mellan olika problem, att se det som är gemensamt och generellt är en väsentlig del av problemlösning.

Flera av exemplen har anknytning till uppgifter som varit med i tidigare omgångar. Vi visar på några sådana kopplingar, men det finns fler och också möjligheter att gå vidare till andra Känguruklassers problemsamlingar. Alla tidigare problem, som varit med sedan starten i Sverige, finns att hämta på namnaren.ncm.gu.se

Det finns naturligtvis mycket annat att göra, än det vi tar upp här. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på *Kängurusidan* i Nämnaren eller på nätet.

1 Denna uppgift handlar om att se relationer mellan tal utan att behöva räkna.
$3 \cdot 2006 = 2006 + 2006 + 2006$, $2005 + 1 = 2006$ och $2007 - 1 = 2006$, vilket betyder att 2006 ska adderas för att den givna likheten ska bli riktig.

Ett annat exempel: När vi ska bestämma medelvärdet av 100 020, 100 024 och 100 019 kan vi bestämma medelvärdet av 20, 24 och 19 och sedan lägga till 100 000 eller t o m av 0, 4 och –1 och sedan lägga till 100 020.

Ett annat exempel är: Vad är summan av $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$ och $\frac{5}{6}$? Där kan man direkt se att summan av $\frac{1}{6}$ och $\frac{5}{6}$ är 1 och behöver inte göra liknämnigt.

Liknande problem är Benjamin 2004:1 och 6. Något svårare är Benjamin 2005:16.

2 Det kan vara bra att börja med ett enklare alternativ t ex med 9, 5, 8 och 3 på lappar och sedan kanske med t ex 19, 63, 24 och 217 för att diskutera hur positionssystemet fungerar. Då kan eleverna också fundera över hur lapparna ska läggas för att talet ska bli så *stort* som möjligt.

En utvidgning är att diskutera hur man med lapparna ska lägga två tal som har så liten eller så stor summa/differens som möjligt. En annan variant är att eleverna får sätta + eller – på alla tal och sedan addera/subtrahera för att komma så nära noll som möjligt.

Hur skulle lapparna se ut för att alternativ A skulle vara korrekt? Alternativ B?

Liknande, litet svårare, problem är Ecolier 2002:20.

3 Här är det lämpligt att se hur många platser det blir när vi sätter ihop två bord och sedan tre bord för att därefter generalisera och se att det blir 2 platser extra för varje bord. Uppmuntra eleverna att rita och dra slutsatser. När de sett hur det fungerar kan de fundera på hur många bord det behövs för t ex 28 eller 36 på skolfesten.

Att formulera en formel i ord är bra och förbereder för mer formellt, algebraiskt tänkande:
Antalet personer = 2 · antalet bord + 2 (på ändarna) dvs $p = 2 \cdot n + 2$ med symboler.
Antal bord som behövs = hälften av (antalet personer – 2) dvs $n = 1/2 \cdot (p - 2)$.

4 Ett sätt att lösa uppgifter av det här slaget är att gissa. Antag att bollen kostar 100 kr, då kostar klubban 400 kr enligt figuren till vänster, men det stämmer inte i den andra figuren. Sedan prövar vi med 200 kr osv. Annars kan vi ur den vänstra figuren se att två bollar och två klubbor kostar 1000 kr. Tar vi bort två klubbor och två bollar från den högra figuren så kostar återstoden, en boll, 200 kr. Vad kostar klubban?

Vilka priser skulle vi ha i figurerna om alternativ C skulle vara det korrekta?

Liknande problem är Benjamin 2004:18.

5 Det finns olika sätt att resonera. Det enklaste är kanske att konstatera att det finns hus på alla nummer från 1 till 35 och sedan lägga till antalet hus på 37 och 39. Men vi kan också undersöka hur många udda tal det finns 1 – 39 och hur många jämna från 2 till och med 34. Vi kan skriva upp alla talen i en följd och t ex först komma underfund med att från 1 till 10 finns det 5 udda och 5 jämna tal, sedan att från 1 till 34 finns det 17 udda och 17 jämna tal, från 1 till 40 finns det 20 udda och 20 jämna och utgå från det.

Liknande problem är Benjamin 2003:17.

6 Låt eleverna konstruera kuber utifrån alternativen A – D för att utveckla rymdseende och rumsuppfattning. Hur ska kuben tecknas för att alternativ A ska vara det korrekta?

Liknande problem har förekommit tidigare, t ex Benjamin 2001:2, 2003:10 och 2005:7.

7 Uppgiften är en bra utgångspunkt för att reflektera över hur vi kan arbeta systematiskt, för att få med alla möjligheter. Diskutera hur nätverket är uppbyggt och vilka pilar som ska följas för att vi ska få 2006.

En uppföljning är att bygga på mönstret med 1, till 20061. Hur många möjligheter ger det att få 20061? Hur får vi resultatet om vi utgår från antalet sätt att skriva 2006?

8 Detta problem aktualiserar hur vi blir ”vän med talen”. Olika flexibla kunskaper och strategier att tänka informellt med tal i vårt positionssystem blir allt viktigare genom den ökande användningen i samhälle och utbildning. Vad är hälften av en tiondel? Hälften av en tusendel? Fjärdedelen av en hundradel? Dubbelt mot en hundradel? Dubbelt mot fem tusendelar eller fem hundratusendelar? Låt eleverna göra egna spännande exempel inom olika talområden.

Ett liknande problem är Benjamin 2005:5.

9 Vad innebär det att ett tal är delbart med 6? Jo, att det kan skrivas som en heltalsfaktor gånger 6 t ex $18 = 3 \cdot 6$, $48 = 8 \cdot 6$. När vi dividerar 28 med 6 så får vi resten 4, $28 = 4 \cdot 6 + 4$ och när vi dividerar 38 med 6 får vi resten 2, $38 = 6 \cdot 6 + 2$. Vilka rester kan förekomma när man dividerar med 6? Tolka $a = k \cdot b + r$ om a och b är positiva heltal och r är resten, då a divideras med b.

Fler problem kring delbarhet finns i årets Benjamin:17, Junior:5 och Student:12.

10 Det är bra att skriva upp några tal i början av följderna t ex mellan 1 och 20 och studera:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

Det finns en olikhet mellan att betrakta skillnaden av udda och jämna tal mellan 1 och 1000 och att betrakta skillanden av de 1000 första talen av vardera slaget. Vilken?

11 Här passar det att klippa ut sexhörningen och göra den vikning som beskrivs.
Vad händer om man istället tar en kvadrat och viker den så att samtliga fyra hörn möts i mitten av kvadraten?

Liknande problem är Benjamin 2003:10 och Benjamin 2005:20, det senare litet svårare.

12 Vi kan börja med ett mindre rutnät, t ex 4 gånger 4 med två färger, gult och blått. Hur byggs mönstret upp? Vad blir det för färger i rader, kolumner och diagonaler? Hur blir det med ett rutnät på fem gånger fem med tre färger? Det finns olika upptäckter att göra genom att variera rutnätets storlek och antal färger.

Det ursprungliga problemet kan lösas på olika sätt: genom att följa en rad och sedan en kolumn (eller tvärtom) eller att följa diagonalen från övre vänstra hörnet till nedre högra.

Liknande, något enklare problem, är Benjamin 2003:2.

13 Endera kan vi bestämma längderna på sidorna i den skuggade rektangeln eller ta en sextondel av arean av rektangeln ABCD, som är 4 cm^2.

Eleverna kan undersöka relationer mellan areorna för rektanglar i figuren. Vad händer med arean om vi gör BC dubbelt så stor? Om vi gör både AB och BC dubbelt så stora, 8 cm respektive 2 cm?

Ett liknande problem är Benjamin 2001:19.

14 Det är bra att pröva hur uppställningen fungerar genom att göra en beräkning med två, fyra eller sex av de nedersta raderna. Vad blir resultatet om vi byter alla ettor i uppställningen mot tvåor? Mot treor? Hur kan uppställningen se ut om alternativ B ska ge det korrekta svaret?

Liknande men enklare är Benjamin 2004:1.

15 Hur är relationen mellan antalet delar och antalet kapningar? Jämför med antalet brädor och antalet mellanrum i ett staket.

Hur lång behöver en bräda minst vara för att det ska gå att dela den i 9 olika långa delar med mått i hela decimeter? I *n* olika?

Liknande problem finner du i Benjamin 2004:7.

16 Först en mer detaljerad lösning: För att måla den stora kubens 6 sidoytor med vardera 9 småkvadrater behövs 9 dl färg. Det innebär att det går åt 9/54 dl = ⅙ dl för en kvadrat. Det vita området består av 12 sådana. Totalt beövs alltså 12 · ⅙ dl = 2 dl.

Intressant att studera: Hur mycket färg behövs till en kub med sidan 4 längdenheter? Om den vita ytan i detta fall består av tre kvadrater med 3 × 3 småkvadater, hur mycket färg går det åt?

Hur blir det med motsvarande problem om kuben har sidan 5 längdenheter och de vita kvadraterna är tre med vardera 4 × 4 småkvadrater? Vilket/vilka mönster ser du?

17 Ett enklare problem är att först titta på ensiffriga tal. Efter att sedan ha löst problemet för tvåsiffriga kan man studera vad som händer med tre- och fyrsiffriga osv och se om det går att formulera ett generellt svar.

Undersök också resultaten då vi väljer att studera delbarhet med fyra, fem osv när det gäller två-, tre-, fyr-, femsiffriga tal.

Liknande problem är Benjamin 2002:9.

18 Problem av den här typen kan naturligtvis lösas med ekvation:
Antag att rektangeln med frågetecknet väger x gram och stjärnan y gram.
Eftersom mobilens olika pinnar hänger jämt så är $y = 2x$ och $2x + 2y = 120$.
$y = 2x$ insatt i den andra ekvationen ger: $2x + 4x = 120$, $6x = 120$, $x = 20$.
Här finns stora möjligheter till variationer som utvecklar förståelse för likhetstecknets innebörd och förståelse för ekvationstänkande. En del elever kan göra egna mobiler och be kamraterna ta fram obekanta vikter.

Liknande problem är Benjamin 2003:21.

19 Ett sätt att få underlag för resonemang och lösning är att göra en almanacka:

To	Fr	Lö	Sö	Må	Ti	On	To	Fr	Lö	Sö
				1	2	3	4	5	6	7
				8	9	10	11	12	13	14
				15	16	17	18	19	20	21
				22	23	24	25	26	27	28
				29	30	31				

Sedan kan vi fundera ut hur vi kan ”skjuta” dagarna (behåll alla datum) för att månaden fortfarande ska innehålla 5 måndagar. Hur går det om månaderna är 28, 29 respektive 30 dagar? Finns det alltid möjlighet till 5 måndagar eller t ex 5 söndagar?

Ett problem av ungefär samma slag är Benjamin 2004:15.

20 Låt eleverna bygga tändstickskvadraterna. Beskriv hur antalet tändstickor ökar från den 2:a till den 3:e och sedan från den 3:e till den 4:e. Försök se mönstret och formulera en regel och en formel för hur man kan beräkna ökningen av antal tändstickor när man bygger en ny kvadrat.

Pröva även nr 12 på Ecolier och utveckla det problemet till en formel för den *n*:te våningen. Liknande problem har förekommit i tidigare Kängurutävlingar, t ex Benjamin2002:24.

21 Här gäller det att tänka på, att ”se”, att även rektangelns diagonal är en diameter och alltså 10 cm. Exempel på undersökningar att arbeta vidare med:
Hur stor del av den stora rektangelns area utgör den markerade figuren?
Hur stor del av cirkelns area?
Om rektangeln har lika långa sidor, hur stor blir då den skuggade figurens area?

Ett annat problem som tar upp omkrets är Benjamin 2005:12.

Litteraturförslag

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem.* Stockholm: Liber.
Persson, U. & Toom, A. (2006). Ryska matematiska skolproblem i *Nämnaren 1, 2006.* s 19 – 27.
Nämnaren. Varje nummer innehåller Problemavdelningen, Kängurusidan och DPL, Dialoger om problemlösning, för lärares arbete med problemlösning.
namnaren.ncm.gu.se Kängurusidan, PDF-arkivet: Problemavdelning och DPL.