Arbeta vidare med Student 2005

Det är vår förhoppning att du ska finna många intressanta uppslag bland årets Känguruproblem och att denna problemsamling ska kunna inspirera undervisningen under flera lektioner. Här ger vi några förslag till arbeten.

Många av känguruproblemen kan lösas med olika metoder t ex laborativa eller genom att man ritar och resonerar. Eleverna kan arbeta parvis eller i grupp och diskutera hur de tänkt och på så sätt komma fram till olika lösningsvarianter att jämföra och se vilken de finner enklast. De kan också formulera egna aktiviteter eller problem med anknytning till frågeställningar som kommer upp vid samtalen eller diskutera vad de lärt sig genom att fundera över exemplen. Jämföra problemen och göra kopplingar inom och utom matematik är en utvecklingsmöjlighet. Att kunna se likheter mellan olika problem, att kunna se vad som är gemensamt och generellt är en väsentlig del av problemlösning. Flera av problemen har anknytning till problem som varit med i tidigare omgångar. Vi visar på några sådan kopplingar, men det finns fler och också i andra tävlingsklasser. Alla tidigare problem finns att hämta på namnaren.ncm.gu.se

Det finns naturligtvis flera andra utvecklingsmöjligheter. Hör av er med idéer och förslag som vi kan publicera på Kängurusidan i Nämnaren eller på nätet.

1 Kan uttrycket förenklas innan man börjar fundera på lösningar? Vad händer om x närmar sig noll från positiva x, resp. från negativa x? Kommer grafen att träffa y-axeln? Hur skulle motsvarande funktion se ut? Diskutera utseendet och anknyt till begreppen kontinuitet och asymptot. Vilket värde får uttrycket för de andra svarsalternativen. Vilket minsta värde har uttrycket? Bestäm uttryckets definitionsmängd och värdemängd.

2 På hur många olika sätt kan man placera ut åtta kängurur i rutnätet? På hur många sätt kan man placera ut åtta kängurur så att det redan från början finns två i varje rad och kolumn? Problemet kan genomföras praktiskt med rutnät och knappar. Går det att tillfoga samma krav på diagonalerna? Försök formulera några villkor för att den här typen av problem skall vara lösbara. Liknande problem fast med kort fanns med på förra årets kängurutävlingar, se nr 4 på Cadet 2004, nr 17 på Junior 2004. 2)

3 Hur många gånger blir det om man bara får byta plats på två närliggande kort? Ändra kortordningen till 5 4 3 2 1 som ska sorteras till 1 2 3 4 5. Hur många omgångar behövs? Diskutera olika sorteringsprinciper. Hur ska man kunna veta att detta är minsta antalet byten? Vad blir motsvarande för sex kort? För n stycken kort? Hur många gånger blir det om man bara får byta med närliggande kort? Går det att formulera strategier för hur byten skall gå till?

4 Försök finna en strategi för att minimera antalet prövningar som behöver göras. Ett sådant är att ta kubikroten av 100 och ta alla heltal som ligger under. Kan man då uttrycka hur många tal mellan 2 och n som har en kub som är mindre än n? Bestäm antal kubiktal mellan 2 och 1000. Antal tal i fjärdepotens mellan 2 och 100. Ett problem med kvadrat- och kubiktal var nr 10 på Student 2004.

5 I denna uppgift är det kanske underförstått att n ska vara ett heltal. Vilka konsekvenser får detta för lösningsmetoden? Varför kan det vara effektivt att primtalsfaktorisera? Diskutera användandet av olika symboler i algebra för att signalera något om vad de står för, t ex i uttryck som $ax+by+c=0$. Vilken är den historiska bakgrunden till valet av symboler? Skriv om problemet som $888 \cdot 111 = 2 \cdot (6 \cdot n)^2$ och låt eleverna bestämma n. Primtalsfaktorisera VL. Vilka tal får man för de andra svarsalternativen? Liknande problem, se nr 23 på Junior 2005.

6 När vet man om ett tal är delbart med 4? Vilka rester kan man få vid division med 4? Vad vet man om summan av två på varandra följande konsekutiva tal? Visa att summan av tre på varandra följande tal alltid är delbar med 3. Modulusräkning. Undersök olika summor av udda antal konsekutiva tal. Ett mönster framträder att summan är lika med produkten av talet i mitten och antalet tal. Om antalet tal är 5 och mitten är n och vi tänker symmetriskt kring mitten får vi: $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n$. Vad blir motsvarande för ett jämnt antal konsekutiva tal? Kan mönstret uttryckas generellt algebraiskt? Liknande problem var nr 18 på Student 2004.

7 Undersök funktionen f (x). Bestäm f (0). Vilken värdemängd har den? Vilken typ av funktion är det? Använd grafritande räknare för att försöka se vilken slags funktion det är. Kan man genom resonemang bestämma vilken typ av funktion det är? Liknande problem var nr 30 på Student 2003.

8 Konstruera de två trådfigurerna och låt eleverna undersöka hur många delar de kan ha gemensamt. Finns det fler lösningar som ger längden 5? Hur vet man att en lösning är den bästa? På hur många sätt kan ett segment med åtta delar se ut om man begränsar det till rätvinkliga böjningar åt vänster eller höger? Kan man utveckla en strategi för hur man kan lösa denna typ av problem?

9 Hur lång tid tar det för mamman att varva Skutt om Skutt hade fortsatt att hoppa? Beskriv mammans respektive Skutts sträcka som funktion av tiden. Rita grafer som beskriver rörelsen. Liknande problem var nr 3 på Junior 2002, nr 20 på Student 2002.

10 Vad menas med förhållandet 2 : 1 respektiver 4 : 1? I vilka delar bör vi jämföra de två blandningarna? Gör liknande problem med andra förhållanden. Skulle det gå att lösa problemet om flaskorna var olika stora? Om förhållandet mellan flaskornas volym var 1 : 3? Skriv en generell formel för problemet om förhållandet mellan vatten och saft i flaskorna om detta är $a:b$ resp. $c:d$ samt förhållandet mellan flaskornas volym är $p:q$.

11 Låt eleverna laborativt genomföra denna uppgift genom att rita utvikta kuber, färglägga, klippa ut och vika ihop. Hur blir det med tre färger? Går det att utrycka ett generellt samband mellan antalet färger man får använda och hur många olika kuber som uppstår?

12 Låt eleverna lösa uppgiften med hjälp av tärningar och beskriva den ögonserie som kommer upp. Starta med ett annat antal ögon uppåt och gör motsvarande rullningar. Variera antalet gånger tärningen rullas och åt vilket håll. På hur många sätt kan man komma från ett givet startläge till ett givet slutläge med 7 stycken rullningar (ej baklänges)? Med n stycken rullningar?

13 Utgå från $r + b + v = 60$ och formulera påståenden algebraiskt. Hur många är de vita respektive röda biljetterna?

14 Rita in den skuggade cirkeln i figuren. Diskutera olika sätt att beräkna det skuggade området. Vilken area har det skuggade området om radien istället är r? Detta problem kan lösas genom att listiga hjälplinjer dras. En sådan lösning är att rita en rektangel där basen är sträckan AB och höjden 2 cm, dvs den skuggade halvcirkelns radie. Dela den grå snipen vertikalt på mitten och ”flytta” in bitarna i rektangeln. Finns det fler sådana konstruktioner som gör att man kan ”se och förstå” problemet utan att behöva räkna? Hur kommer det sig att talet *pi*, som ju alltid brukar vara med i samband med arean av cirklar eller delar av cirklar, inte finns med i svaret? Liknande problem, se nr 17 Junior 2003, nr 28 Junior 2001.

15 Markera de kända sidorna och påminn eleverna om likformighet. Hur skulle svaret se ut om rektangelns bas var *a* och punkten C låg *b* längdenheter från F? Vilka slutsatser kan man dra av detta svar? Ett liknande problem är nr 17 på CadetGy 2005 och nr 22 på Junior 2004.

16 Ändra frågan till produkten av tre olika heltal. På hur många olika sätt kan man faktorisera de olika talen? Liknande problem, se nr 24 på CadetGy 2005.

17 Låt eleverna förenkla olikheten med hjälp av potenslagarna. När gäller likhet? Vad händer när x —> –∞. Låt eleverna rita graferna till $y = 2^{4^x}$ och $y = 4^{2^x}$ på sina räknare. Tidigare problem med olikheter, se nr 5 på Student 2004.

18 Vilka nummer har de 17 kulorna? Ta upp vad som menas med en aritmetisk talföljd. Vilka summor kan man få om man tar upp två kulor på måfå? Hur stor är sannolikheten att få 2010 om man tar upp två kulor på måfå? Liknande problem är nr 14 på Junior 2005, nr 12 på Student 2004, nr 28 på Junior 2003.

19 Undersök vilka antal möjliga delare som produkten AB kan ha. Be eleverna ge exempel på tal som uppfyller villkoren. Jämför problem nr 23 på Junior 2005.

20 Förstora upp figuren. Hur stor är varje vinkel uttryckt i radianer i en regelbunden oktagon? Rita in trianglarna ABP, BCQ och PBQ och resonera om vinklarnas storlek uttryckt i radianer. Liknande problem, se nr 20 på Student 2004.

21 Låt eleverna algebraiskt skriva upp proceduren. Utgå från resultatet 2100 +1 efter 99 gånger och arbeta åt motsatt håll, dvs. addera 1 och dividera med 2

22 Rita av fyrhörningen och skriv in det som är givet. Repetera randvinkelsatsen. Hur kan den utnyttjas i lösningen om fyrhörningen är inskriven i en cirkel? Likartade geometriproblem, se nr 16 på CadetGy 2005, nr 3 på Student 2004, nr 5, 13 på Junior 2004.

23 Hur långt är det från punkt A och B? Liknande problem, se nr 24 Cadet 2002, nr 12 Junior 2003, nr 22 CadetGy 2004.

24 Repetera logaritmlagarna och konjugatregeln och visa på deras användbarhet. Liknande problem, se nr 15 och nr 24 Student 2004.