



## Tillämpningar från land och vatten

*Författaren kåserar kring hur matematiken kommer in i olika sammanhang både nära och långt borta, och visar på några modeller som fungerar mer eller mindre bra.*

**D**enna artikel påbörjas i augusti. Kvällarna har börjat bli mörka och på himlen framträder både planeter och stjärnor redan vid 21-tiden. Östersjön ligger blank som en spegel. En för mig främmande katt har klättrat upp i ett träd med ett dudbo och försöker ta de nu nästan flygfärdiga ungarna.

Min tid upptas bla av att fånga flodkräftor i egen grävd damm och att följa olympiaden i TV, dessutom läser jag kioskvältaren DA VINCI-koden, en thriller med matematiska inslag.

Huvudpersonerna ska leta upp "den heliga Graal" och behöver bla kunna tyda vissa koder för att komma vidare, således utnyttjas talföljden 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... den berömda Fibonacci-följden. För att komma vidare måste fem på varandra stående cylindrar vridas i rätt läge, en oerhörd massa alternativ där rätt kod visar sig vara Apple. En ytterligare pusselbit består av en modell av det äpple Newton använde för att komma på gravitationslagen.

### Kräfter

En vanlig problemtyp i gymnasiematematiken är att med given omkrets skapa ett område med maximal area - ett snöre av given längd ska formas till en plan figur med största möjliga area. Är omkretsen 16 cm får en rektangel med sidorna 5 cm resp 3 cm arean  $15 \text{ cm}^2$ , medan 6 cm och 2 cm ger  $12 \text{ cm}^2$ . Om man håller sig till "fyrkanter" ger en

kvadrat maximal area,  $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$ , men störst area, ungefär  $20 \text{ cm}^2$ , ger en cirkel. Då man ska gräva en kräftdamm utgår man från hur stor area den ska ha. Flertalet kräftor uppehåller sig längs stränderna. Det betyder att man med given vattenarea ska åstadkomma så mycket stränder som möjligt. Istället för en cirkulär eller kvadratisk damm är det således lämpligt att göra både inbuktningar och utvidgningar för att maximera omkretsen, vilket också rent estetiskt gör dammen vackrare.

Med hjälp av sannolikhetsläran kan jag få en uppfattning om hur många kräftor det finns i dammen genom att fånga tex 200 kräftor, märka dem med Tippex och sen kasta tillbaka dem.

Då jag efter några veckor återigen fångar 200 kräftor och av dessa 10 är märkta med Tippex, dvs tillhör de som fångats och märkts tidigare, "bör" dammen innehålla ca 4000 kräftor.

Det finns ett samband mellan en kräftas vikt (massa) och längd. Jag har både vägt och mätt hundratals flodkräftor, hanar, för att hitta detta samband. Med utgångspunkt från de uppmätta värdena gör jag antagandet att massan,  $m$  beror på längden  $l$  enligt  $m = a \cdot l^b$ . Således använder jag en potensfunktion som matematisk modell.

Bäst överensstämmelse får jag med  $a = 0,025$  och  $b = 3,26$ , dvs  $m = 0,025 \cdot l^{3,26}$ .

Volymen av en kub med sidan  $a$  cm är  $a^3 \text{ cm}^3$  och om kuben dessutom är homogen blir även massan proportionell mot kuben på sidan.

Detta förklarar kanske att exponenten, 3,26 i sambandet ovan, ligger nära det teoretiska värdet 3.

Längd (cm)	Uppmätt vikt (g)	Beräknad vikt (g)
7	13	14
8	22	22
9	29	32
10	43	45
11	63	62
12	83	82

## Höjder

Stefan Holm tog olympiaguld i höjdhopp på 236 cm. Han ser onekligen ganska mager ut, han väger 69 kg och är 181 cm lång. Det betyder att Stefans BMI (Body Mass Index) är  $69/1,81^2$ , dvs ca 21 – han kan således ej rubriceras som underviktig, gränsen går vid 20.

Då man räknar poäng i sjukamp för damer kan dessa ofta beräknas med potensfunktioner.

För höjdhopp gäller att poängen är  $1,84523(h - 75)^{1,348}$ . Det betyder att för sina 191 cm i Aten fick Carolina Klüft 1120 poäng i denna gren.

## Rymden

Planeterna går i svagt ellipsformade banor med solen i ena brännpunkten – följande de keplerska lagarna i, som det tycks, evigt kretslopp. Avståndet från solen till respektive planet kan beräknas med Titius-Bodes lag:  $a = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$  där avståndet solen – jorden sätts till 1.

Planet	$n$	$T-B$	Verkligt avstånd
Merkurius	$-\infty$	0,4	0,38
Venus	0	0,7	0,7
Jorden	1	1,0	1,0
Mars	2	1,6	1,52
Ceres	3	2,8	2,8
Ceres är en av asteroiderna			
Jupiter	4	5,2	5,2
Saturnus	5	10,0	9,54
Uranus	6	19,6	19,19
Neptunus	7	38,8	30,06

Det är tveksamt om denna lag har någon fysikalisk betydelse, troligtvis är formeln endast en matematisk tillfällighet och för Pluto stämmer den inte alls.

## Hav

Det kan blåsa rejält på Östersjön och för ett antal år sedan var man tvungen att ta en kataran mellan fastlandet och Gotland ur trafik, passagerarna tålde ej gungningarna. De som bygger stora passagerarbåtar bör ta hänsyn till Motion Sickness Index, eller på vanlig svenska den sk Spyformeln. Empiriska försök visar att andelen passagerare som spy,  $p$ , beror på vågornas amplitud,  $A$ , och frekvens,  $f$ , samt hur länge båtfärden varar,  $T$ , enligt formeln

$p = A(2\pi f)^2 T^{1/3} / 3$  där  $A$  anges i meter,  $f$  i hertz och tiden  $T$  i sekunder.

Således är illamåendet proportionellt mot amplituden, mot kvadraten på frekvensen och mot roten ur åktiden.

Med realistiska  $A = 1$  m,  $f = 0,1$  Hz och  $T = 3600$  s fås  $p = 8$  dvs 8 % av passagerarna spy, prova gärna med mera extrema vädersituationer!

Det kostar alldeles för mycket att bygga båtar så att ingen spy vid dåligt väder därför är man nöjd med båtar så konstruerade att "endast" 10 % spy vid hög sjögång, vilket gotlandskatamaranen inte klarade.

På tal om havsvågor så har man nu hittat en matematisk modell som kan förklara de 30 – 40 m höga sk Tsunamivågor som ibland helt oväntat dyker upp. De förklaras med en icke-linjär lösning till Schrödingerekvationen, en ekvation jag i min okunnighet alltid förknippat med kvantfysik dvs skeenden på atomnivå.

## Katts lut

Till slut ett logiskt/matematiskt bevis för att en katt har tre svansar:

*Ingen katt har två svansar, en katt har en svans mer än ingen katt, alltså har en katt tre svansar.*

Och jag erinrar mig nu att den katt jag betraktade i skymningen uppe vid duvboet den hade faktiskt, åtminstone antydande till, tre svansar.

**Kenneth Borg** är lektor vid Vaggaskolan i Karlshamn.