

Matematiken inför 2000-talet

Standards

I förra numret av Nämnaren berättade vi kort om ett Mölndalsseminarium i maj 1989 om amerikanskt kursplanearbete i matematik. Syftet med seminariet var att ta del av erfarenheterna från arbetet i USA, kritiskt granska innehållet i det omfattande dokumentet och ta ställning till vad som kan vara av värde för svenska förhållanden¹⁾. Den amerikanska projektgruppens ordförande professor Thomas A Romberg medverkade.

Seminariet hade ett 60-tal engagerade deltagare och kom att uppmärksammas av Olle Nordgren och Yngve Lindberg, SÖ. Detta ledde till en programpunkt vid höstens SÖ-konferens med länsskolnämndernas piloter för matematiksatsningen.

*Vi återger här sammanfattningar av de bidrag som presenterades på denna pilotkonferens av **Bengt Johansson, Ann Ahlberg, Ulla Runesson och Göran Emanuelsson.***

Arbete med förändringar i skolmatematiken

Bengt Johansson

Inte sedan slutet av 50-talet och början av 60-talet har arbetet runt om i världen med att utveckla skolmatematikens innehåll och utvärdering av matematikundervisning varit så intensivt som nu. En lång rad internationella konferenser som behandlat dessa frågor har nyligen ägt rum (Howson 1986, Steiner 1988, Walther 1988) och i flera länder, t ex Italien (Bazzini, 1988), England (ref) och USA (Romberg, 1984) har arbetet resulterat i nya riktlinjer för matematikämnet i skolan. I detta nummer skall vi försöka ge en bild av det nya amerikanska förslaget till "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics".

Det finns flera orsaker till att man i

USA just nu tagit fram ett underlag för kursplanearbete och utvärdering i matematik. Den viktigaste är de dåliga resultat på nationella och internationella test som amerikanska barn visat upp under 80-talet (NCEE, 1983).

American 13-year-old is ranked dead last (Jackson, 1989).

Det finns också en mycket utbredd uppfattning att matematikundervisningen inte följt med i utvecklingen och t ex inte utnyttjat de forskningsresultat, som kommit fram de senaste åren och som framförallt gäller elevernas begreppsutveckling och tänkande i matematik (Romberg, 1986).

Standards

Som ett svar på samhällets krav på reformering av matematikundervis-

¹⁾ En rapport om seminariet håller på att sammanställas.

ningen har den amerikanska matematiklärarorganisationen NCTM tagit initiativet till ett genomgripande arbete med att utveckla matematikämnet i skolan. 35 personer har arbetat under flera år med avbrott för ett antal mycket omfattande remissomgångar. Det amerikanska kursplanarbetet har genomförts på ett ytterst professionellt sätt och med en mycket stor öppenhet.

For the first time in the history of North American mathematics education, a set of standards was proposed for developing and evaluating mathematics programs in K-12 classrooms. (Schoen 1989)

Standards är ingen egentlig kursplan utan snarare ett dokument med kriterier för att utveckla och bedöma kursplaner, lärogångar och studiegångar — en *vision* om innehåll, inläring, undervisning och utvärdering i matematik i ett högteknologiskt samhälle.

Det övergripande syftet är att ge en sammanhängande bild av vad som menas med att vara *kunnig i matematik* och skapa medvetenhet om matematikens betydelse och styrka. Eleverna ska:

- **lära sig att värdera matematiken**
- **bli säkra på sin egen förmåga**
- **bli problemlösare**
- **lära sig kommunicera med matematik och använda logiska resonemang.**

Utvärdering av arbetet betonas starkt och det finns tre angivna nivåer:

- ☐ utvärdering av mål och allmänna riktlinjer
- ☐ utvärdering av elevernas kunskaper och färdigheter
- ☐ utvärdering av hela matematikprogrammet.

Referenser

- Bazzini, L. The new government programs for Italian primary schools. In: *Educ. Stud. Math.* 19, 1988, p 389—393.
- Howson, G & Wilson, B. (Eds) *School Mathematics in the 1990s*. Kuwait, 1986.
- Jackson, A. NCTM School Mathematical Standards. *American Mathematical society*. Vol 36. Number 4, 1989, p 380—382.
- Mathematics in the National Curriculum. Department of Education and Science and the Welsh office. London: Her Majesty's stationary office. 1989.
- National Commission on Excellence in Education. *A Nation at Risk: The Imperative for Educational Reform*. Washington, D C. US Government Printing Office, 1983.
- Romberg, Thomas A. School Mathematics: Options for the 1990s. *Chairman's Report of a Conference*. Washington, D C. US. Government Printing Office, 1984.
- Romberg, Thomas A and Carpenter, Thomas P. "Research on Teaching and Learning Mathematics: Two Disciplines of Scientific Inquiry." In *Handbook of Research on Teaching: A Project of the American Educational Research Association*, 3d ed, edited by MC Wittrock, pp 850—73. New York: Macmillan Co, 1986.
- Schoen, H. 1989. Beginning to implement the standards in grades 7-12. *Mathematics Teacher*, Sept 1989, 427. NCTM.
- Steiner, H-G. Deutsch-italienisches bilaterales Symposium zur Förderung des wissenschaftlichen Erfahrungsaustausches und der Zusammenarbeit im Bereich mathematikdidaktischer Forschung — Vorankündigung. In: *ZDM* 20, 1989, p 164—165.
- Walter, G. Deutsch-französisches bilaterales Symposium zur Didaktik der Mathematik — Luminy 1986. In: *ZDM* 20, 1988, p 48—58.

Standards för K—4 (5—9 år)

Ann Ahlberg

Barn och matematik

Skolmatematiken ska ta sin utgångspunkt i relationen mellan barn och matematik. Detta innebär att man i undervisningen måste ta vara på barns intuitiva, informella kunskaper och barnens språk. Det är elevernas intellektuella, sociala och känslomässiga utveckling som ska styra undervisningen.

Man ska uppmärksamma den kvalitativa dimensionen i barns lärande. Det är viktigare att eleverna förstår matematiska idéer än att de tillägnar sig en mängd färdigheter. Det läggs vikt vid att ge eleverna en uppfattning om vad matematik är och vad det innebär att använda matematik. Man ska bygga upp självförtroende hos eleverna när det gäller matematik.

Förändring och prioritering

I matematikundervisningen ska man betona grundläggande begreppsbildning. Man ska lägga ner avsevärd tid på att utveckla elevernas matematiska förståelse och på att relatera förståelse och färdighetsträning till varandra. Utgångspunkten för undervisningen ska tas i handling. Undervisningen ska betona att "göra" istället för att "veta". För att utveckla elevernas matematiska tänkande och matematiska resonemang måste undervisningen ge eleverna självförtroende när det gäller förmågan att tänka, kommuni-

cera, lösa problem, se mönster och analysera data. Eleverna ska upptäcka matematikens användbarhet. För att förstå att matematiken är användbar i vardagslivet måste eleverna utnyttja den i en mängd vardagsproblem. Eleverna ska möta ett brett utbud av matematiskt innehåll. Mätning, geometri, statistik och algebra är lämpliga områden för yngre barn. Genom ett informellt möte med varierande stoff kan man lägga grunden till kommande studier. Eleverna ska ha tillgång till miniräknare och datorer. Tillgången till teknologi är emellertid inte en garanti för att eleven ska bli matematiskt kunnig. Räknare och datorer underlättar arbetet men ersätter inte arbetet med papper och penna.

Standards bör ses som ett första steg i en pågående process att förändra skolmatematiken. Detta ska ske genom ett förändrat undervisningsinnehåll, förändring av elevernas aktiviteter och en förändrad lärarroll.

Eleverna ska ha ett problemorienterat arbetssätt och utforska, undersöka, diskutera, presentera, förmedla, konstruera och resonera logiskt.

Beskrivning av Standards för K-4

13 Standards presenteras här med en kort sammanfattning av målen med elevernas aktiviteter och vad som ska fokuseras.

Standards K-4

1. Matematik som problemlösning
2. Matematik som kommunikation
3. Matematik som ett sätt att resonera
4. Matematiska samband
5. Överslagsräkning
6. Taluppfattning och talsystem
7. Begrepp om operationer med hela tal
8. Beräkningar med hela tal
9. Geometri och rumsuppfattning
10. Mätning
11. Statistik och sannolikhetslära
12. Bråk och decimalform
13. Mönster och relationer

1 Problemlösning

Att lösa problem ska vara i fokus i matematikundervisningen eftersom problemlösning är målet med all matematikinläring. Eleverna ska lära sig att använda flera problemlösningssätt för att lösa olika typer av problem i olika situationer och sammanhang. De ska diskutera alternativa lösningssätt, se relationer mellan olika problem och lära sig värdera problemlösningssätt.

2 Matematik som kommunikation

Matematik kan ses som ett språk. Det måste vara meningsfullt om eleverna ska kunna kommunicera med och använda sig av matematik. Eleverna ska lära sig symbolspråket genom att relatera konkret material, bilder och diagram till matematiska idéer. De ska reflektera över sitt tänkande i olika situationer och relatera sitt vardagsspråk till det matematiska språket. Eleverna ska inse att en viktig del av matematik är att diskutera, skriva, lyssna, läsa och framställa.

3 Matematik som ett sätt att resonera

Centralt i undervisningen är att utveckla elevernas tro på sin egen matematiska förmåga. De ska uppfatta matematiken som meningsfull. Elevernas självförtroende utvecklas om de litar på sin förmåga att resonera i matematik, och om de kan försvara sitt matematiska tänkande. Eleverna ska träna sig i att dra logiska slutsatser. De ska använda sig av modeller, fakta och relationer för att förklara sitt tänkande och motivera lösningarna.

4 Matematiska samband

Eleverna ska förstå hur matematiska idéer är relaterade mellan och inom matematikens olika områden. Utan sådana samband måste eleverna lära sig alltför många isolerade begrepp och färdigheter istället för att känna igen generella principer som är relevanta för flera områden. Eleverna ska utnyttja matematiken inom andra skolämnen och anknyta till sitt vardagsliv, eftersom de då blir medvetna om matematikens användbarhet.

5 Överslagsräkning

Eleverna ska inse att matematik kan innebära någonting mer än enbart ett exakt svar. De ska utveckla strategier och metoder för överslagsräkning och kunna avgöra när metoderna är lämpliga att använda. När man arbetar med kvantiteter, mätningar, beräkningar och problemlösning ska eleverna utnyttja överslagsräkning för att bedöma rimligheten av ett resultat.

6 Taluppfattning och talsystem

För att förstå meningen med talens användning i vardagslivet måste ele-

verna förstå tal. Eleverna ska utveckla taluppfattningen genom erfarenheter i verkligheten och arbete med laborativt material. De ska lära sig förstå vårt talsystem genom att relatera räkning, gruppering och arbete till positionssystemet. De ska kunna tolka olika sätt att använda sig av tal som man möter i verkligheten.

7 Begrepp om operationer med hela tal

Eleverna ska förstå de grundläggande räkneoperationerna addition, subtraktion, multiplikation och division. De ska utveckla denna förståelse i en mängd olika problemsituationer och inse att ett stort antal problemstrukturer kan representeras med en enda operation. De ska relatera det matematiska symbolspråket till problemsituationer och vardagligt språk.

8 Beräkningar med hela tal

Beräkningar kan utföras på ett stort antal olika sätt. Eleverna ska ha en rimlig färdighet i tabellkunskaper och algoritmräkning. De ska lära sig att använda en mängd olika metoder i huvudräkning och överslagsräkning. De ska välja och använda lämpliga beräkningsmetoder för olika problemsituationer och använda miniräknare när det är lämpligt.

9 Geometri och rumsuppfattning

Geometri och rumsuppfattning är viktigt. Geometrisk kunskap är användbar i vardagslivet och har samband med andra delar av matematiken och med andra skolämnen. Eleverna ska beskriva, rita, klassificera och göra modeller av geometriska former. De ska undersöka och förutsäga resultat av kombinationer och

uppdelningar och relatera geometriska idéer till tal och mätningar. De ska känna igen och uppfatta geometri i omvärlden.

10 Mätning

Mätning är viktig på grund av att eleverna med hjälp av mätningar kan förstå matematikens användbarhet i vardagslivet. Mätning utvecklar också elevernas matematiska begrepp och färdigheter. Eleverna ska förstå vad som utmärker t ex längd, vikt, area, volym, tid och temperatur. De ska utveckla förståelse för mätningsprocessen och enheter. De ska framställa egna enheter och använda dessa och standardenheter i problem och vardagssituationer.

11 Statistik och sannolikhetslära

Att samla in, beskriva, sammanställa och tolka data är ofta mycket passande för barn, eftersom deras frågor om omvärlden kan besvaras genom detta arbete. Eleverna ska formulera och lösa problem som innefattar att samla in och analysera data. De ska konstruera, läsa och tolka datasammanställningar och de ska göra undersökningar med slumpmässiga försök. Statistik och sannolikhetslära är också en betydelsefull länk till andra ämnen.

12 Bråk och decimalform

Förståelse breddar elevens medvetenhet om talens användbarhet och ökar deras kunskap om talsystemet. Därför ska eleverna utveckla sina begrepp och kunskaper om bråk, tal skrivna i blandad form och decimalform. Eleverna ska använda modeller för att lära sig relationer och för att räkna med bråk och decimaltal. Ef-

tersom barn bygger upp dessa idéer långsamt är det viktigt att man använder laborativt material, diagram och vardagssituationer. Man måste göra fortlöpande ansträngningar för att relatera inlärnigen till talat språk och symboler.

13 Mönster och relationer

Mönster finns överallt. Barn som uppmuntras att leta efter mönster och ge dem ett matematiskt uttryck börjar förstå hur matematiken kan tillämpas i vardagslivet. Eleverna ska använda sig av laborativt material och bilder för att känna igen, beskriva, utvidga och skapa mönster och relationer. De ska framställa och beskriva matematiska relationer och undersöka användningen av variabler och öppna utsagor för att uttrycka relationer.

Några exempel

Låt oss se lite mer ingående på t ex *Matematik som ett sätt att resonera*. Målet är att eleverna ska resonera så att de kan:

- dra logiska slutsatser i matematik
- använda sig av modeller, fakta, egenskaper och relationer för att förklara och motivera sina svar och lösningsprocesser
- använda mönster och relationer för att analysera matematiska situationer
- uppfatta matematiken som meningsfull.

Tron på den egna förmågan får eleverna, när de inser att matematik inte är att minnas regler och procedurer, utan att matematiken är meningsfull, logisk och stimulerande. I klassrummet ska kritiskt tänkande vara kärn-

punkten i undervisningen. Uppgifter som eleverna ska arbeta med kan vara matematikgåtor som t ex

1 Vad är jag?

Jag har 3 eller 4 sidor.
Mina vinklar är lika.
Inte alla sidor är lika.

2 Vem är jag?

Jag är ett jämnt tal.
Jag är mer än 20 och mindre än 30. Jag är inte 25.
Summan av mina siffror är 8.

Uppgift 1 innehåller motsägende information eftersom trianglar med alla vinklar lika har lika sidor. I uppgift 2 finns onödig information som eleverna ska identifiera. De ska förklara sina svar och lösningsprocesser och använda mönster och relationer för att analysera matematiken. Alla svar ska ifrågasättas och man ska reagera på både lärarens och elevernas påstående. Man ska respektera varandras tänkande och eleverna behöver veta att det är viktigt att förklara och försvara sitt tänkande och att frågan om hur ett problem ska lösas är lika viktigt som lösningen. För att etablera detta förhållningssätt måste barn få tillämpa sin resonerande förmåga och få tillfälle att försvara sitt tänkande i en problemdiskussion.

Statistik och sannolikhetslära betonas starkt i jämförelse med Lgr 80.

Målet är att eleverna ska

- samla in, organisera och beskriva data
- konstruera, läsa och tolka sammanställningar

- formulera och lösa problem där man ska samla in och analysera data
- göra undersökningar med slumpmässiga försök.

Barns frågor om omvärlden kan ofta besvaras genom att man samlar in och analyserar data. När frågorna är ställda bestämmer man vilken information som behövs, hur den ska samlas in, sammanställas och tolkas för att ge svar på frågorna.

Någon elev frågar: Vilken glass är mest populär i klassen?

Eleverna ska diskutera och resonera om hur man ska sammanställa data för att få svar på de frågor man ställer.

Översikt	
Harry	Vanilj
Molly	Choklad
Ted	Choklad
.....	
Carol	Jordgubb
Favoritval	
Vanilj	X X X
Choklad	X X X X X
Jordgubb	X X

- 1 Hur ska man beskriva materialet för att få reda på vilken glass Molly tycker om?
- 2 Vilken tabell ska vi ha för att finna vilken glass som är populärast?

Från diskussionen om Standards

I gruppen som i maj diskuterade *Standards* fanns en positiv inställning till den stora betydelse man lägger vid begreppsbildning. Dessutom tyckte

man att det var bra att utgångspunkten i undervisningen ska tas i barns intuitiva, informella kunskaper och barnens språk. Det processinriktade förhållningssättet uppskattades och även den kraftiga betoningen på utvärdering.

En mer kritisk inställning till dokumentet kunde märkas när det gällde målen för den enskilde eleven. Frågan ställdes om Lgr 80:s övergripande mål och riktlinjer ryms inom *Standards*. Finns det utrymme för "En skola för alla"? Hur ska man hjälpa de barn som har matematiksvårigheter och hur ska individualisering av undervisningen genomföras? Man ställde sig också frågande till diskussionerna om sättet att verklighetsanknyta undervisningen och integreringen med andra ämnen. Det finns inte mycket anvisningar om tex temaarbete som verkligen innefattar en integrering av olika ämnen, där man utgår från ett problem i verkligheten och använder matematik som verktyg. Från förskolehåll framfördes att synen på undervisningen i den svenska förskolan starkt skiljer sig från detta dokument, eftersom man här hemma nästan uteslutande arbetar med teman.

Det framkom olika åsikter om det är riktigt att geometri ska ha en så framträdande plats i lågstadiets matematik. Även bråk och decimalform har en framträdande plats. Olika synpunkter framkom i gruppen om det är en riktig prioritering. De exempel som ges i *Standards* var enligt gruppen mycket avancerade och mest lämpade för äldre elever. Frågan om miniräknare och datorer i undervisningen diskuterades. Det var stark samstämmighet om att miniräknare och datorer bör ses som ett stöd i undervisningen, men att vi bör vara klara över till vad och varför vi använder dem.

Standards för 5—8 (10—13 år)

Ulla Runesson

Bakgrund till förändringar

Matematiken på detta stadium uppfattas av många elever i USA som tråkig och meningslös. Detta anses bl a bero på att man i undervisningen i alltför hög grad lägger tyngdpunkten på räknefärdigheter. Det som är karakteristiskt för ämnet matematik speglas inte i undervisningen. Innehållet är likadant från årskurs till årskurs. I läroböckerna återkommer samma moment med likartad presentation i alla årskurser. Väldigt litet talar då för att eleverna ska inhämta basfärdigheter i en viss årskurs, speciellt som man ofta använder metoder, som ledde till misslyckanden i tidigare årskurser.

I stället borde kursinnehållet breddas. Nya moment i undervisningen kan visa på behov av räknefärdigheter och erbjuda nya områden för tillämpning. Införandet av ny teknologi medför att begreppet basfärdigheter får en förändrad innebörd. Med ökad användning av miniräknare och datorer i samhället minskar kraven på papper och penna-räkning. Samtidigt ökar behoven av kunskaper inom vissa områden som t ex geometri och statistik.

Den tänkta breddningen av kursinnehållet framgår av översikten.

Kännetecknande skall vara:

- ☐ Inläring av begrepp och idéer skall utgå från problemlösningssituationer. Dessa skall ge en meningsfull kontext för elevens kunskaper. En idé eller modell, som

Standards grade 5—8

1. Matematik som problemlösning
2. Matematik som kommunikation
3. Matematik som ett sätt att resonera
4. Matematiska samband
5. Tal och talsamband
6. Talsystem och talteori
7. Räkning och överslagsräkning
8. Mönster och funktioner
9. Algebra
10. Statistik
11. Sannolikhetslära
12. Geometri
13. Mätningar

glömts bort, kan återskapas om man kan påminna sig situationen där den förekom.

- ☐ Kommunikation om och med matematik samt logiska resonemang skall ha stort utrymme.
- ☐ Undervisningen skall ha ett brett innehåll, som ger en integrerad helhet. Innehållet tillämpas på såväl vardagsproblem som andra områden, vilka kan vara relevanta för elever i denna åldersgrupp. Samtliga elever skall möta alla moment. Det är inte realistiskt att tro att alla elever kan lära lika mycket inom varje område, men ingen elev skall hindras att möta ett visst ämnesinnehåll, bara för att hon inte uppnått en viss nivå på ett annat.

- Datorer och miniräknare skall användas när det är lämpligt. Dessa ger möjlighet för eleverna att ägna sig mer åt problemlösning än åt beräkningar.

Undervisningen skall vara sådan, att den utgår från situationer, där eleverna ges möjlighet att formulera problem, ställa hypoteser, pröva dessa, lösa dem och dra slutsatser av resultaten. På detta sätt utmanas elevernas förkunskaper och kan utvecklas i nya och mer komplicerade situationer. Eleverna skall engageras såväl intellektuellt som via aktiviteter i inlärningsprocessen, i stället för att vara passiva mottagare av information.

Individuellt arbete kan växla med arbete i smågrupper eller med helklass, beroende på vad man arbetar med och vilket syfte man har med undervisningen. Speciellt framhålls fördelarna med s k "cooperative learning", då eleverna i grupper ges möjlighet att pröva och utveckla idéer tillsammans med andra. Eleverna kan använda sitt språk, både för att kommunicera med andra och för att få grepp över sitt eget tänkande. Dessutom ger det läraren tillfälle att lyssna och utröna hur eleverna uppfattar undervisningsinnehållet.

Det skall finnas gott om laborativ materiel i klassrummet. Varje elev skall ha en egen miniräknare och varje klassrum åtminstone en dator.

13 huvudmoment eller Standards

De fyra första är gemensamma i grade K-12 och anger ett förhållnings-sätt till matematik och matematikundervisning. Problemlösning är både mål och medel och ingår i alla huvudmoment. Öppna problem skapar möjlighet att kommunicera i och om

matematik. Samband mellan olika delar av matematiken belyses, liksom sambandet mellan matematik och andra skolämnen, så att symboler och operationer får en mening för eleven.

Arbetet med taluppfattning tar sin utgångspunkt i vardagserfarenheter och arbete med konkret material. I dessa årskurser är förhållande och proportionalitet områden som lämpar sig bra. Eleverna skall förstå att det finns olika representationer (namn) för samma tal (bråk, decimalform, procent t ex) och hur olika räkneoperationer är relaterade till varandra.

Kravet på räknefärdigheter med papper och penna, är nedtonat till förmån för huvud- och överslagsräkning samt beräkningar med miniräknare och datorer. Man framhåller vikten av att eleverna tränas i att göra medvetna val mellan dessa, och att de skall kunna avgöra om svaret är rimligt. Man påpekar vikten av tabellkunskaper, "basic facts" i detta sammanhang, och att det skall finnas utrymme för eleverna att utveckla egna algoritmer.

Ett centralt tema i matematiken är att kunna upptäcka mönster av olika slag. Det betonas redan i K-4. I grade 5—8 förskjuts nu tyngdpunkten till att undersöka mönster, för att utifrån dessa kunna studera matematiska modeller i form av funktioner. Dessa ska behandlas informellt, t ex i form av verbala beskrivningar, tabeller eller grafer.

Inom *algebra* är det viktigt att innehållet behandlas på ett undersökande och informellt sätt. Meningen är att man skall grundlägga en *begrepps-mässig* förståelse på detta stadium. Den formella behandlingen skall göras senare.

För att möta förändringar i samhället, betonas vikten av att statistik

och sannolikhetslära får stort utrymme. Sannolikhetslära är nödvändig för förståelse av mycket i samhället, från modern vetenskaplig forskning till morgondagens väderprognos. Undervisningen i statistik syftar till att eleven skall uppfatta styrkan i statistiska modeller, men också utveckla ett kritiskt förhållningssätt till dessa. Målet är att eleverna skall bli "intelligent consumers" och "informed citizens". Eleverna skall i undervisningen engageras i hela processen: formulera problem, samla in och medvetet välja sätt att representera data, analysera och göra förutsägelser.

Inom samtliga huvudmoment skall eleverna ges möjlighet att öva och tillämpa logiska resonemang. Fler elever måste komma till insikt om att matematiken är ett kraftfullt redskap när man vill organisera och förstå sin omvärld. Att "resonera" innebär att man kan föra induktiva och deduktiva resonemang, men också att ge hållbara argument för sina påståenden, att förstå och bedöma andras argument. Detta är knutet till elevernas mognad, såväl intellektuellt som

språkligt. Eleverna är mycket olika inom denna åldersgrupp. Även om de åldersmässigt närmar sig en nivå, då man kan förutsätta ett abstrakt tänkande, får undervisningen inte göras formell eller laborativt arbete uteslutas.

Gruppundervisning rekommenderas. Eleverna kan använda sitt vardagsspråk för att resonera kring frågor som: *Varför?*, *Vad händer om . . .?*, *Ge exempel på . . .*, *Ser du ett mönster?*, *Stämmer det alltid (ibland, aldrig)?*, *Hur vet du det?* osv.

Några exempel ur Standards

I figur 3.1 har eleverna efter att ha konstruerat en godtycklig triangel, kopierat i stort antal och undersökt om man kan täcka planet med dessa. Olika elever kommer då att göra olika reflektioner, allt från "det funkar" till att dra slutsatser om triangelns vinkelsumma. Genom att resonera och lyssna till andra, kan eleverna fördjupa sina kunskaper och förädla sitt tänkande.

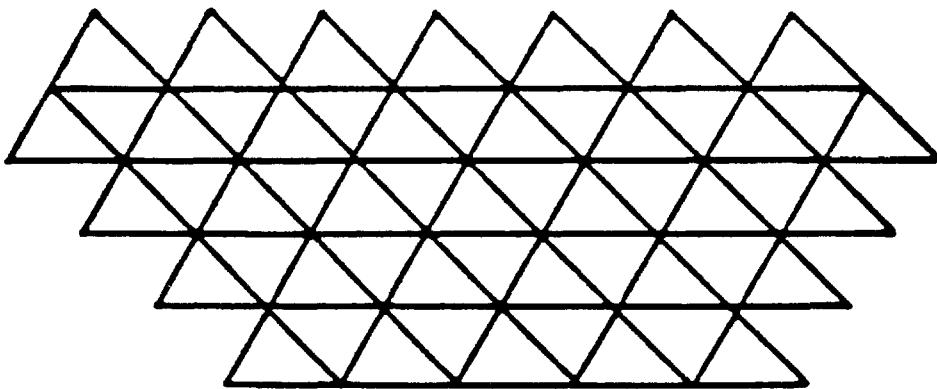
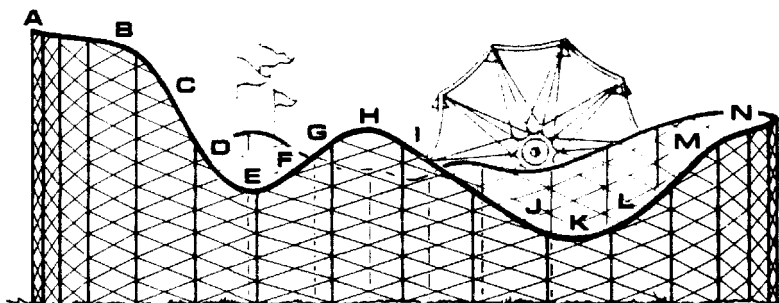


Fig. 3.1. Tiling method

Hur fort går vagnen i berg-och-dalbanan?

Students are given a carefully drawn picture of a roller-coaster track (fig. 3.2).



The challenge is to sketch a graph (with no numbers) to represent the speed of the roller coaster versus its position on the track.

Hur ser berg-och-dalbanan ut?

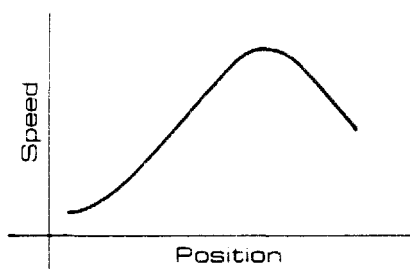


Fig. 3.3 Roller-coaster graph

Now, to reverse the problem, students are given a part of the graph of speed versus position for another roller coaster (fig. 3.3). The question becomes,

What does the roller-coaster track look like?

Exempel 3.2 och 3.3 visar på andra områden, där representation med hjälp av grafer ger rika möjligheter att diskutera vad som händer och varför.

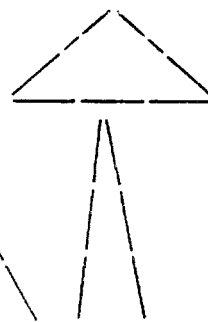
Kursplanen i *geometri* skall leda till att eleverna kan betrakta vår omvärld på ett meningsfullt sätt, men skall också få dem att inse att geometri är ett redskap för att lösa problem. Un-

dervisningen skall ägna mer tid åt att undersöka och använda geometriska idéer och samband och mindre tid till drill eller direkt tillämpning av formler och definitioner.

Det undersökande arbetssätt som tillämpats i grade K-4 ska fortsätta, men undersökningarna skall göras mer systematiserade på detta stadium.

Tabellen visar ett undervisnings-exempel. Eleverna får några lika långa tandpetare. De skall undersöka hur många trianglar man kan göra av olika antal tandpetare. Ur sådana situationer uppstår behovet av en korrekt terminologi. Figurerna ser olika ut. Det är lämpligt att ge dessa namn såsom liksidig eller likbent.

Sammanfattningsvis kan kursplanen i grade 5—8 sägas vara problem- och begreppsriktad. Den ger ett bredare innehåll än vad som varit fallet tidigare. Kravet på formalism och på räknefärdigheter utan sammanhang är nedtonat. Områden som fått större



No. toothpicks	3	4	5	6	7	...
Is triangle possible?	Y	N	Y	Y	Y	...
No. of triangles	1	0	1	1	2	...
Kind of triangles	equilateral		isosceles	equilateral	isosceles	...

tyngdpunkt är förhållande och proportionalitet, grafer och grundläggande algebra. Undervisningen skall utgå från problemsituationer och ge utrymme för kommunikation och logiska resonemang. Lärarens roll förändras från att vara överförare av kunskap till att fungera som "faciliator", dvs vara den som skapar förutsättningar för och underlättar inläring.

Från diskussionen i maj 1989

Vid seminariet diskuterades vilken relevans Standards innehåll kan ha med tanke på svenskt läroplansarbete. Gruppen av mellan- och högstadielärare ställde sig positiv till stora delar av innehållet och menade att mycket redan nu ryms inom Lgr 80.

Det som kändes speciellt tilltalande

är den helhetssyn som präglar den amerikanska planen. Problemlösning är det centrala och elevens tankar tas till utgångspunkt i undervisningen. Man framhåller begreppsbildningens betydelse innan matematiken formaliseras. Detta borde tydligare uttryckas i ett motsvarande svenskt dokument.

Man noterar det positiva i att utvärderingen präglas av samma kunskapssyn och att anvisningar om utvärdering presenteras tillsammans med kursplanen. Det är bra att inte bara eleverna skall utvärderas, utan också undervisningen. En viss besvikelse fanns över att det saknades anvisningar för hur resultatet av utvärderingen skall behandlas.

Tveksamheter och frågor gällde huruvida kursplanen kunde rymmas inom "en skola för alla" och om det är en matematik som har relevans för vardagslivet och svenska förhållanden. Gruppen ansåg den amerikanska kursplanen mer traditionellt ämnesriktad. Det verkar som om man oftare fört in verkligheten i matematiken än matematiken i verkligheten. Samverkan med andra skolämnen är inte tydligt beskriven.

Standards för 9—12 (14 — 17 år)

Göran Emanuelsson

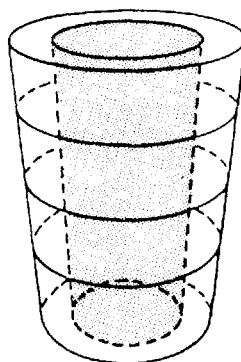
Anknytning till tidigare stadier. Differentiering

Det allra mesta av det som tidigare nämnts om Standards inriktning och prioriteringar i innehåll och undervisning gäller också avsnitten om grade 9—12. Mycket av det som berörts med informella metoder och induktiva arbetssätt ska nu — om möjligt — formaliseras och deduceras. Enligt Standards är matematikstudiernas syfte att ge kunskaper, färdigheter och tänkande i matematik som behövs — i vardagslivet, i arbetslivet och för vidare utbildning. Det stämmer väl i stort med målsättningen i Lgr 80 och gymnasieskolans matematiksupplement från 80 (NT), 81 (SoEk) och 83 (HSE). En noggrannare jämförelse med matematikens innehåll och inriktning i Standards kommer sannolikt att visa på mycket stora skillnader.

En nyhet som kommer in i 9—12-planen jämfört med tidigare stadier är resonemangen om en kärnplan "a core curriculum".

Kärnplanen speglar behoven för alla elever i en värld och ett samhälle där teknologi och kvantitativa metoder alltmer dominerar. Den ska ge en gemensam del av matematiska idéer, som *alla studerande* ska få möta. Differentiering anses ske bäst genom innehållsdifferentiering i termer av fördjupning och tillägg till det föreslagna innehållet, i stället för beskärningar. Höga, rimliga krav måste ställas.

Kärnplanen kan utvidgas beroende på behov, intressen och förmåga — och det finns klart angivet vad collegeinriktade elever ska studera (jfr Lgr 80:s kommentarer om matematikintensiva linjer). Detta är — vad jag förstår ett helt annat sätt att hantera individualiseringsproblemen än vad vi försökt oss på hittills i Sverige. I stället för nödvändiga/önskvärda kunskaper eller differentiering i olika kurser ger man signaler om individualisering byggd på didaktiska och metodiska principer. Denna ansats borde undersökas och utvecklas för svenska förhållanden. Kanske vi kunde komma ur den återvändsgränd vi hamnat i?

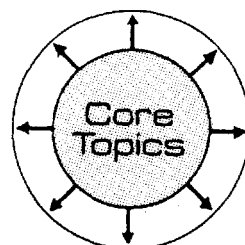


Grade 12

Grade 11

Grade 10

Grade 9



**A differentiated core
curriculum**

Studerande med exceptionell talang för matematik ska ges tillfälle att utveckla denna — men det utfärdas en stark varning för att skynda på elever på konstgjord väg. Bilden av kärnplanen ska också visa en förmodan att de matematiska idéerna kommer att mogna, växa och fördjupas under studiernas gång. Det sista årets studier "senior year" bör ge synteser, sammanfatta och konsolidera inför vidare utbildning eller yrkesverksamhet.

Studierna i grade 9—12 baseras på följande antaganden:

- ☐ Eleverna har räknefärdigheter motsv kraven i kursplanen för grade 5—8. Ingen elev ska på grund av bristande räknefärdigheter hindras att studera matematik enligt kursplanen.
- ☐ Standards tar inte direkt upp räknefärdighetskrav, men det förutsätts att dessa gradvis kommer att öka i tillämpningar och problemlösning.
- ☐ Eleverna ska ha ständig tillgång till miniräknare och en dator ska finnas i varje klassrum för demonstrationsändamål. Varje elev ska ha tillgång till dator för arbete individuellt eller i grupp.
- ☐ Alla elever ska studera matematik minst en årskurs i gymnasiet (åk 10). För elever som slutar efter åk 10 prioriteras vad gäller djup, bredd och tillämpningar. För universitetsstudier krävs minst två års gymnasiestudier i matematik.

Innehållet i Standards 9—12 är mycket omfattande, men man räknar med

Standards for grades 9—12

1. Matematik som problemlösning
2. Matematik som kommunikation
3. Matematik som ett sätt att resonera
4. Matematiska samband
5. Algebra
6. Funktioner
7. Syntetisk geometri
8. Analytisk geometri
9. Trigonometri
10. Statistik
11. Sannolikhetslära
12. Diskret matematik
13. Begrepp i elementär analys
14. Matematiska strukturer

att eleverna som genomgått åk 5—8 enligt de nya planerna ska ha bättre begrepp och färdigheter i algebra och geometri samt icke-formella men begreppsorienterade metoder att hantera data och osäkerhet. Vidare anses det möjligt att tjäna tid på att organisera kursplanen så att de studerandes inläring förbättras genom att elevernas kunskaper systematiskt ska vara inbäddade i och utvidgas i nya moment eller problemsituationer. I Standards betonas en förändring från vad man nu har av

- ☐ inläring av isolerade fakta och procedurer, papper och pennaskicklighet

till en undervisning som lyfter fram

- ☐ begreppsförståelse, olika representationer av samband och sammanhang, matematiska modeller och problemlösning.

I dessa sammanhang betonas integration av idéer från algebra och geometri, där den grafiska representationen spelar en sammanlänkande roll. *Graphing utilities* hänvisas det ofta till i *Standards*. Statistik, sannolikhetslära och diskret matematik lyfts fram.

Undervisningen i matematik

Det gäller att få en ändring till stånd vad gäller mönster i USA:s matematikundervisning — i elevens och lärarens roller. Lärarrollen ändras enligt Standards, från en som meddelar undervisning till en som underlättar inläring. Från ledarroll till katalysator och coach.

De studerande inriktar sig endera på inträde i arbetslivet eller vidare studier. Från K-8 har eleverna fått det mesta av strukturen "educational" från lärare. Erfarenheter av och förtroendet till intellektuell nyfikenhet och oberoende bör uppmuntra elever att internalisera synen på matematik som en process, ett kunskapsområde och ett av människor skapat ämne.

Nya moment ska presenteras i form av problem, som stimulerar eleverna att formulera och pröva gissningar, hypoteser, att visa generaliseringar, att kommunicera, tillämpa resultaten av undersökningar. Detta ska stärka elevernas självförtroende och färdighet i att "göra matematik" och att närma sig matematik på ett kreativt och fördomsfritt sätt.

Räknare och datorer med lämplig mjukvara anses förändra klassrummet till ett laboratorium. Lärarens uppgift blir att summera och skapa sammanhang med tidigare studerade

områden. Elever och lärare ska ses som partner i utvecklingen av matematik och vid problemlösning.

Utvärdering behandlas som en integrerad del av undervisningen och ska knytas till huvudaspekter som t ex användningen av teknologi.

Kärnplanen innebär att räknescvaga elever inte längre ska repetera åk 5-innehåll igen och igen. Genom att ta bort "the computational gate" så ska alla studerande erbjudas bättre möjligheter att skaffa sig kunskaper i matematik som man önskar och behöver. Detta innebär INTE att alla elever måste få innehållet presenterat på samma sätt eller på samma nivå. Men hur man än handskas med elevernas olika förutsättningar, förmåga, kunskaper, färdigheter och intresse, så är det väsentliga att *alla elever* får möta hela bredden i "kärnplanen" inklusive undervisningsmetoder och hjälpmedel.

Exempel på innehållsdifferentiering

Differentieringen gäller olika nivåer "levels". Den ska förstås så att eleverna stimuleras att arbeta på så hög nivå som möjligt, men så att den passar deras intresse och kapacitet att förstå. Detta kan innebära att en del elever återvänder till högre nivåer senare under skoltidens gång. Här följer delar av ett exempel ur *Standards*, som visar grundidén. Observera den stegvisa ändringen av notation och formalisering, övergången till mer generella metoder och användningen av undersökande arbetssätt t ex med räknare. Följande exempel är hämtat från *Standards*, s 132 ff.

A student deposits \$100 in a savings account earning 6% interest compounded annually. How much money will be in the account at the end of 10 years?

Level 1: With a calculator, all students should be able to determine the amount of money in the account each year by successively applying the following relationship:

Amount at end of year = Amount at beginning of year + .06 (Amount at beginning of year).

Applying this relationship will give the following:

Amount (in dollars) at beginning of year 1 (initial deposit) = 100

Year 1: Amount at end of year = $100 + .06(100) = 106$

Year 2: Amount at end of year = $106 + .06(106) = 112.36$

Year 3: Amount at end of year = $112.36 + .06(112.36) = 119.10$

.

.

.

Year 10: Amount at end of year = $168.95 + .06(168.95) = 179.08$

The use of a computer spreadsheet would be a natural extension of this activity and would give these students a powerful tool for further processing.

Students at this level also could use a pattern or template for processing:

Year 1: Amount at end of year: $100(1.06)^1$

Year 2: Amount at end of year: $100(1.06)^2$

.

.

.

Year 10: Amount at end of year: $100(1.06)^{10}$

They could verify this template by checking its results against corresponding values obtained by direct calculation. A discussion of how this template could be modified under different initial conditions would instill in the students further mathematical power. For example:

If the time is changed to 20 years, the final amount = $100(1.06)^{20}$.

If the starting amount is \$200, the final amount = $200(1.06)^{10}$.

If the annual interest rate is
changed to 12%, the final amount = $100(1.12)^{10}$.

Level 2: After completing the level 1 activities, students could generalize the results of their initial year-by-year calculations and use appropriate notation to assist in this process. Except for the use of technology to aid in processing, their approach as illustrated below would be traditional.

They could modify the original year-by-year table to be

$$A_0 = 100$$

$$A_1 = 100 + 100(.06) = 100(1.06)$$

or

$$A_1 = A_0 + A_0(.06) = A_0(1.06).$$

Similarly,

$$A_2 = A_1 + A_1(.06) = A_1(1.06)$$

$$A_3 = A_2 + A_2(.06) = A_2(1.06)$$

.

.

.

$$A_{10} = A_9(1.06).$$

Equation (1)

Combining

$$A_1 = A_0(1.06)$$

$$A_2 = A_1(1.06) = A_0(1.06)(1.06) = A_0(1.06)^2$$

$$A_3 = A_2(1.06) = A_0(1.06)^2(1.06) = A_0(1.06)^3$$

.

.

.

$$A_{10} = A_0(1.06)^{10}$$

and in general, $A_n = A_0(1.06)^n$, where n is the number of years.

Further generalizing would give

$$A_n = A_0(1 + r)^n,$$

Equation (2)

where A_0 is the initial deposit, r is the annual interest rate, n is the number of years, and A_n is the accumulated amount in the account after n years.

Level 3: After completing level 2, these students would further generalize equation (2) where r becomes the interest rate per interest period and n is the number of interest periods. This extension would allow students to explore problems in which the annual interest rate is compounded semiannually, quarterly, monthly, daily, and so forth.

It is important to note that all students at levels 1, 2, and 3 would use calculators or computers to address related problems such as the following and discuss their results. (1) Does the amount double if (a) the interest rate is doubled or (b) the time period is doubled? (2) What are the doubling periods for amounts invested at 7%, 10%, and 20%? (3) Some people use the rule of 72, $d = 72/100i$, to approximate the doubling period, d , for interest rate, i . Test the formula for different interest rates and report on its accuracy. (4) How much money would you need to invest today to have \$10 000 in 20 years? The solution methods for these problems could involve guessing and checking, generating a table by calculator or spreadsheet, graphing, and applying the compound interest formula. In each situation, lower-achieving students would reach their conclusions through additional numerical exercises.

Level 4: After completing level 3, students would, given three of the four variables in equation (2), solve for the fourth (e.g., $r = \sqrt[n]{A_n/A_0} - 1$).

Students at this level might also explore the derivation of the rule of 72 by solving equation (2) using natural logarithms.

A variety of further extensions are possible. Equation (2) could be generalized to problems in which compound growth provides an appropriate representation (e.g., in biology). Earlier results could be proved by mathematical induction. Instantaneous compounding could be investigated, which would in turn lead to the development and use of the constant e .

Från diskussionen om Standards

Under maj-seminariet var vi i stort överens om att Standards momentföreteckning är *relevant för svenska förhållanden*. Innehållet i de övergripande inledande fyra huvudmomenten känns naturligt — framförallt i grundskolan — kanske på grund av matematiksatsningen. När det gäller problemlösning, så ansåg några att det finns en retorik i Standards vad gäller "real-world-problems" — som inte svarar mot de uppgifter som presenteras i materialet. Mönsterexemplet har oftast inommatematisk anknytning eller en ganska lös skövarhistoria. Skälen är, enligt Romberg, att man i dagsläget prioriterat en bra struktur och utgångspunkter för att "göra matematik". Han höll emellertid med om att det behövdes arbete för att få fram bättre och mera verklighetsanknutna exempel. Konferensdeltagare som var inriktade på matematik som disciplin tyckte inte det var nödvändigt, medan de som ville se matematiken i ett vidare perspektiv utifrån de övergripande målen för skolans undervisning ville ha klarare anknytning till problemsituationer, som kan uppfattas som konkreta av eleverna.

En viss tveksamhet till den oerhörda *betoningen av begreppsbyggande*

framför träning av procedurer kunde spåras. Några av oss tror på en förstärkning av den ena genom den andra och ville se en ökad betoning av färdighetsträning i meningsfulla sammanhang.

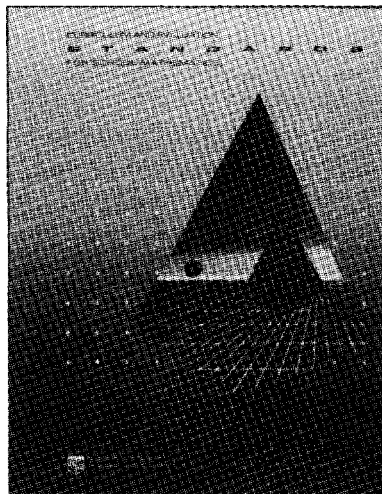
Är det verkligen en *medborgerlig utbildning* för grundskolan som skissas? Den frågan bör stötas och blötas. Det verkar som om flera matematikmoment kommer in tidigare i Standards än i svenska kursplaner. Vi diskuterade realismen i detta och det slogs fast att kursplaneomläggningar i framtiden måste föregås av försöksverksamhet, så att vi inte får en ny "ny matematik". Det finns skäl att tro att förändringar som motsvarar visionerna i Standards skulle kräva *mera tid för matematik* än den vi har nu. I Standards räknar man med att matematikundervisningen ska få lektionstid motsvarande en lektion per dag i alla årskurser, dvs en kraftig ökning mot vad vi har nu!

Vi såg fram emot *Standards för lärarutbildning*, som ska komma och hade en intressant diskussion om vilka kunskaper i traditionell ämnesteorin, i matematikdidaktik och -metodik som krävs av en lärare med den inriktning och det innehåll som föreslås. Dags för ny förlängning av lärarutbildningen?

Differentieringsfrågan har alltid varit ett sorgebarn i svensk matematikundervisning. Tankegångarna i Standards bör analyseras närmare — men väckte förhoppningar. I åk 9—12-planen så tänker man sig en kärna av områden, som alla ska möta. Bredd och djup blir olika för olika elever och det är inte säkert att elever med olika intressen eller förmåga ska ha undervisning i sammanhållen klass. Några ansåg att det finns en risk att studierna kan bli ytliga för en del elever. Vi var överens om att det är ett stort men stimulerande arbete att närmare exemplifiera de nivåer som antyds i Standards. Först beskriva manipulativ/konkret nivå, sedan kanske simulering, därefter generalisering med notation, symbolspråk följt av verifiering/bevis.

Tar Standards upp *de svagare elevernas problem* i tillräckligt hög grad? De flesta tyckte nog inte det. Några argumenterade för ett ja — vi måste tänka på civilingenjörsutbildningen — eller vi skulle tänka mer på de högpresterande. Men det kom starka mothugg. Vi hade en intressant diskussion, där flera vittnade om att intressanta vardags- eller yrkesproblem kan få elever, som tidigare misslyckats, att lära sig matematik. Många elever har idag ångest för matematik. Man kan fråga sig om negativa erfarenheter är det svåraste hindret för en del elever att övervinna. Komvuxlärare ansåg det . . . Det kan i viss mening betraktas som en ”utvärdering” av ungdomsskolans matematikundervisning som stämmer till eftertanke — men också pekar på möjligheter till förbättringar.

Matematikens betydelse, generalitet, intellektuella ekonomi och styrka i många sammanhang berördes. Standards sätt att betona detta föll alla på



läppen. I det amerikanska arbetet finns många argument som kan användas för att få skolbyråkrater och skolpolitiker att inse betydelsen av att matematikundervisningen inte betraktas som lättskött. Det framgick också av Thomas Rombergs avslutningsanförande, att man i USA satsar hårt och medvetet på att marknadsföra Standards. Denna del har vi mycket att lära av!

Svensk version av Standards?

Det lockar många att fortsätta diskussionen kring Standards, att pröva föreslagna uppgifter och grundtankar. I 9—12-gruppen föreslogs utarbetande av ett kommentarmaterial till Standards för svenska förhållanden. Någon ansåg, att ett sådant material skulle tas fram i Göteborg/Mölndal utifrån de indikationer som den här konferensen gett. Materialet skulle kunna användas i fortbildning och vid studiedagar och löpande revideras.

Standardsgrupp vid Matematikavdelningen i Mölndal

Inför arbetet med Mölndalsseminariet 18—20 maj -89 bildades arbetsgrupper för de olika delarna Standardsmaterialet. I dessa ingår ett 20-tal lärare och lärarutbildare som deltar i påbyggnadsutbildningar i matematikdidaktik vid Göteborgs universitet.

Matematikavdelningen har beviljats medel ur SÖ:s centrala anslag för matematiksatsningen. Vi kommer därför att fortsätta vårt arbete utifrån de diskussioner som ägde rum i samband med seminariet.

Vid *Matematikbiennalen 1990* kommer ett tema att behandla och fördjupa detta arbete med bl a internationella inslag. Samtidigt kommer deltagarna i detta tema att inbjudas att delta i utvecklingsarbetet.

Stadiegrupperna leds av:

Ann Ahlberg	(K—4)
Rolf Eriksson	(5—8)
Göran Emanuelsson	(9—12)

För frågor eller synpunkter skriv till någon av dessa eller

Bengt Johansson	(projektledare)
Bo Rosén	(avdelningsföreståndare)

Adress: Matematikavdelningen, Box 1010, 431 26 Mölndal. Telefon: 031-67 92 56 eller Eva Wennberg (sekr) 031-67 92 25



Thomas Romberg om arbetet med Standards i Arithmetic Teacher, maj -88:

"We believe that NCTM is the appropriate agency to develop a set of curricular and evaluative Standards. For too long we have abdicated this responsibility to others, including legislators, administrators, and textbook and test publishers. Knowledgeable mathematicians and educators, through the professional organization that best reflects their interests, should take responsibility for the development of Standards that closely affect their work and lives."