MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur
och kommunikation

Multiplikation och taluppfattning

En läromedelsanalys av hur framställning och strukturering av multiplikation kan påverka elevers taluppfattning.

Lina Johnsson och Maria Flodström

Ht 2010

Författare:
Maria Flodström
Lina Johnsson

Handledare:
Andreas Ryve
Examinator:
Andreas Ryve

Sammanfattning

Flera undersökningar har visat att svenska elevers kunskaper inom områdena taluppfattning och aritmetik har blivit sämre. I denna uppsats står därför taluppfattning, med multiplikation som utgångspunkt, i fokus. Syftet med det här arbetet har varit att analysera hur olika läromedels framställning av räknesättet multiplikation samt strukturering av inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna kan påverka elevers möjlighet att utveckla god taluppfattning. För att svara på vårt syfte har vi gjort en läromedelsanalys av fem olika läromedel i matematik, avsedda för åk 1-3. Resultatet pekar på att några av de analyserade läromedlen framställer multiplikation på ett begränsat sätt vilket kan antas ha negativ inverkan på elevers möjlighet att utveckla förståelse för räknesättet multiplikation och därmed också på taluppfattningen. Resultatet pekar också på att flera av läromedlen, genom sitt sätt att lyfta fram tankeformer och samband, strukturerar inlärningen av multiplikationskombinationerna så att elevers möjlighet att utveckla taluppfattning gynnas.

Nyckelord: läromedel, läromedelsanalys, matematik, multiplikation, taluppfattning

Abstract

Several studies have shown that Swedish students' knowledge of number sense and arithmetic have been deteriorating. In view of this number sense, with multiplication as a basis, is the focus in this composition. The purpose of this work has been to analyze how different textbooks description of multiplication and structure of learning the basic multiplication combinations can influence students' ability to develop number sense. To answer our purpose we made a textbook analysis of five textbooks in mathematics, for grade 1-3. The results indicate that some of the analyzed textbooks describe multiplication in a limited way which one can assume have negative impact on students' ability to develop understanding of multiplication and so developing number sense. The results also indicate that several of the textbooks, by the way they emphasize mental strategies and connections between numbers, structure the learning of the basic multiplication combinations in a way that support students' opportunity to develop number sense.

Keywords: mathematics, multiplication, number sense, textbook, textbook analysis

Innehåll

1. Inledning

Som blivande lärare med inriktning matematik är vi intresserade av hur elevers matematikkunskaper ser ut och hur dessa kunskaper kan utvecklas på bästa sätt. Skolverket har sammanställt flera internationella undersökningar som tittat på elevers kunskaper i bland annat matematik. Den senast publicerade rapporten är från undersökningen PISA *(Programme for International Student Assessment)* 2009. I denna undersökning har det framkommit att svenska elevers matematikkunskaper sjunkit jämfört med undersökningen som genomfördes 2003. I PISA 2003 var Sveriges resultat betydande över OECD-genomsnittet men så är inte längre fallet (Skolverket, 2010a). TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) 2007 visade också på liknande reslutat och där lyfts bristande taluppfattning fram som en av orsakerna till de försämrade matematikkunskaperna (Skolverket, 2008). Vi tycker att resultaten av undersökningarna är alarmerande och att orsaken till resultaten är tankeväckande. För oss är det är viktigt att man som lärare är medveten om hur man utvecklar god taluppfattning hos eleverna samt hur man kan hjälpa eleverna att utveckla goda tankeformer vid beräkningar inom de fyra räknesätten. Vi har därför valt att göra ett arbete kring taluppfattning.

1.1 Bakgrund

Den nuvarande läroplanen för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet, Lpo 94, (Skolverket, 2006) anger att skolan ansvarar för att varje elev ska behärska grundläggande matematiskt tänkande och att de ska kunna tillämpa detta i vardagslivet. I den nuvarande kursplanen i matematik (Skolverket, 2009) fastställs att elever efter det tredje skolåret ska ha uppnått grundläggande förståelse för de fyra räknesätten samt utvecklat strategier för att kunna räkna i huvudet och med hjälp av skriftliga räknemetoder. Det står också att eleverna ska uppnå viss grundläggande taluppfattning. Taluppfattning definieras i kommentarerna till kursplanen som ”relationer mellan tal och mellan tal och omvärld” (s. 14).

I den kommande kursplanen i matematik som gäller från hösten 2011 lyfts begreppet taluppfattning upp mer och har en egen rubrik ”Taluppfattning och tals användning”. (Skolverket 2010b, s. 31). Under den här rubriken framkommer att det centrala innehållet i undervisningen för årskurs 1-3 bland annat ska innehålla följande:

- Naturliga tal och deras egenskaper samt hur talen kan delas upp och hur de kan användas för att ange antal och ordning.
- Hur positionssystemet kan användas för att beskriva naturliga tal. Symboler för tal och symbolernas utveckling i några olika kulturer genom historien.
- Del av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal.
- Naturliga tal och enkla tal i bråkform och deras användning i vardagliga situationer.
- De fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer.
- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal, vid huvudräkning och överslagsräkning och vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. Metodernas användning i olika situationer.

- Rimlighetsbedömning vid enkla beräkningar och uppskattningar.

(Skolverket, 2010b, s. 31)

Taluppfattning hos elever utgör även en viktig del av vad som testas i internationella jämförande undersökningar, till exempel TIMSS. De svenska eleverna har, enligt TIMSS 2007 (Skolverket, 2008), problem med taluppfattning samt aritmetik, det vill säga de fyra räknesätten addition, subtraktion, multiplikation och division. I TIMSS 2007 lyfts dessutom fram att en anledning skulle kunna vara att undervisningen i Sverige bygger på läromedel i större utsträckning än många andra länder (Skolverket, 2008). Skolinspektionen (2009) har i sin kvalitetsgranskande rapport, *Undervisning i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*, kommit fram till att många elever i Sverige inte får den undervisning de har rätt till. Rapporten visar att elever endast får undervisning i begränsade delar av ämnet matematik och att enskilt arbete dominerar under lektionerna. Detta medför, enligt Skolinspektionen, att mekaniskt räknande i läroboken får för stort utrymme i förhållande till gemensamma samtal om matematiska fenomen. Konsekvensen av detta blir att många elever inte får förutsättning att till exempel utveckla förmågor att lösa matematiska problem, se samband, resonera och uttrycka sig matematiskt eller att hantera matematiska algoritmer och procedurer.

Hur läromedel i matematik väljer att presentera de fyra räknesätten samt hur de lägger upp arbetet med taluppfattning skulle således kunna ha stor inverkan på eleverna möjlighet att lyckas. Vi ställer oss därför frågan om det är läromedlen som inte ger lärarna och eleverna det stöd de behöver för att eleverna ska lyckas utveckla sina kunskaper i aritmetik och taluppfattning, eller om det är så att lärarna inte lyckas förmedla det läromedlen vill nå ut med.

Under vår utbildning har vi både läst om och sett flertalet tankeformer, för så väl addition som subtraktion, som bidrar till utvecklandet av elevens taluppfattning. Vi saknar däremot inblick i vilka tankeformer för multiplikation och division som förekommer. Vi har fått intrycket av att multiplikationsarbetet i skolan ofta handlar om att lära sig tabeller utantill. Utifrån denna bakgrund ville vi undersöka hur framställning och strukturering av multiplikation och de grundläggande multiplikationskombinationerna, det vill säga multiplikationskombinationer inom spannet $0 \cdot 0$ till $10 \cdot 10$, kan påkverka elevers möjlighet att utveckla taluppfattning. Eftersom den svenska matematikundervisningen enligt TIMMS bygger på läromedel i större utsträckning än andra länder har vi blivit extra nyfikna på hur just matematikläromedel presenterar multiplikation och de grundläggande multiplikationskombinationerna.

Om det nu är så att lärare i Sverige är väldigt läroboksbundna och att svenska elever har problem med aritmetik är det relevant att undersöka hur olika läromedel presenterar multiplikation. Eftersom svenska elever dessutom har problem med taluppfattningen är det också viktigt att undersöka hur läromedlens presentation av multiplikation kan bidra till elevens taluppfattning.

Vidare är det för oss som blivande lärare viktigt att undersöka det här problemområdet eftersom resultatet av undersökningen kan påverka vårt framtida val av läromedel utifrån hur de framställer och strukturerar arbetet med multiplikation. Vägen fram till resultatet kan också bidra till att vi lär oss att ställa relevanta och kritiska frågor vid framtida val av läromedel.

1.2 Syfte

Syftet med vårt arbete är att analysera hur de olika läromedlens framställning av räknesättet multiplikation samt strukturering av inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna kan påverka elevers möjlighet att utveckla god taluppfattning.

1.2.1 Frågeställningar

- Hur kan de analyserade läromedlens sätt att framställa räknesättet multiplikation påverka elevers möjlighet att utveckla god taluppfattning?
- Hur kan de analyserade läromedlens sätt att strukturera inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna påverka elevers möjlighet att utveckla god taluppfattning?

1.3 Arbetets disposition

Under rubriken **Läromedel i matematikundervisning** redogör vi för forskning kring läromedels användning och roll i matematikundervisningen.

I avsnittet **Taluppfattning** lyfter vi fram olika sätt att se på taluppfattning, vad som krävs för att utveckla taluppfattning samt vad som kännetecknar en elev med god taluppfattning.

Under rubriken **Analytisk teori och analytiska frågor** följer en teoretisk diskussion kring de centrala begrepp som legat till grund för vår studie. Här tar vi upp olika sätt multiplikation kan ses på samt situationer när multiplikation används. Vi tar även upp hur den kommutativa och distributiva lagen för multiplikation kan gestaltas samt teorier kring samband och tankeformer i förhållande till multiplikation. Dessa begrepp har varit vårt ramverk vid analysen av läromedlen och när vi diskuterat resultatet.

I **Metodologin** motiverar vi val av metod, beskriver hur läromedlen valts ut och hur vi begränsat omfattningen samt hur vi har gått tillväga när vi gjort analysen. Vi diskuterar även validitet och reliabilitet samt gör en kort beskrivning av de fem läromedlen som ingått i analysen.

Under rubriken **Resultat och analys** presenteras vi resultatet av läromedelsanalysen samt hur vi tolkar det utifrån den analytiska teorin. Resultatet och tillhörande analys är uppdelad i de två avsnitten Multiplikation och Samband och tankeformer. Varje avsnitt är i sin tur indelat i underrubriker i form av våra analysfrågor.

Diskussionen är indelad i en resultatdiskussion där vi läromedel för läromedel svarar på våra frågeställningar och syftet med arbetet samt en slutdiskussion där vi diskuterar resultatet mer allmänt och återkopplar till inledningen och avsnittet om läromedel. Vi ger avslutningsvis konkreta förslag på fortsatt forskning.

2. Läromedel i matematikundervisning

Eftersom vi har valt att göra en läromedelsanalys och syftet med arbetet är att se hur de olika läromedlens framställning och strukturering av multiplikation kan påverka elevers taluppfattning är det relevant att titta på vilken forskning det finns kring läromedels användning och roll i matematikundervisningen. Innan vi går in på forskning om taluppfattning, vilket är vårt övergripande område, gör vi därför en kort redogörelse för vad vi funnit angående läromedel i matematikundervisningen.

2.1 Läromedlets roll

Enligt Nobel (2001) ökade produktionen av läromedel i Sverige kraftigt i mitten av 1900-talet i samband med införandet av enhetsskolan, senare kallad grundskolan. Enhetskolans införande ledde till större skolenheter med många nya oerfarna lärare som följd. För att stötta dessa lärare utformades heltäckande läromedelssystem. Enligt Nobel (1979) skulle läromedlen, som utgjordes av självinstruerande arbetsböcker, öka lärarnas möjlighet att individualisera undervisningen. Enligt TIMSS (Skolverket, 2008) har läroboken fortfarande en mycket stark roll i svenska skolor och undervisningen bygger här på läromedel i större utsträckning än många andra länder.

Skolverket genomförde under åren 2001 och 2002 en nationell kvalitetsgranskning som utmynnade i rapporten *Lusten att lära – med fokus på matematik*. Även i denna rapport beskrivs att matematikundervisningen är starkt beroende av en lärobok. För många elever och lärare är matematik helt enkelt det som står i läroboken och läroboken avgör vad som ska behandlas under lektionerna. Det vanligaste förhållningssättet när det gäller matematikundervisningen är att låta läromedlet stå för måltolkning, arbetsmetoder och uppgiftsval. (Skolverket, 2003)

En förklaring till varför undervisningen i matematik är så läromedelsstyr kan vara att den är så traditionstyngd både till innehåll och till arbetsform (Skolverket, 2003). Johansson (2006) menar att matematikboken har en djupt rotad tradition i den svenska skolan. Många elever, föräldrar och lärare förutsätter att lärare använder matematikboken i undervisningen för att säkerställa att eleverna får lära sig alla delar i matematiken som är nödvändiga att behärska för den fortsatta skolgången. Enligt Skolverkets nationella kvalitetsgranskning (2003) ser lärare som sin huvuduppgift att strukturera och gå igenom ett digert undervisningsinnehåll för att eleverna ska kunna nå kunskapsmål och betygskrav samt klara nationella prov. I detta arbete är det lättare att falla tillbaka till traditionen än att ta tid till att utforma nya arbetsmetoder och arbetsmaterial. Även Brändström (2002) menar att förklaringen till att läromedlet har så stor betydelse i matematikundervisningen är att det är traditionen som styr. I Lgr 80 (Skolöverstyrelsen, 1980) lyfts läroboken upp som en komponent som ska spela en viktig roll ”för att ge fasthet och sammanhang i studierna” (s. 50). Enligt Brändström (2002) ges inte läroboken denna roll i den nuvarande läroplanen, Lpo 94. Där läggs istället ansvaret på elever, lärare och rektorer att tillsammans komma överens om vilka metoder som ska användas för att nå de strävans- och uppnåendemål som matematiken har. Brändström skriver vidare att det som ny lärare kan vara lättare att ta efter de äldre och mer rutinerade lärarnas arbetssätt än att förändra undervisningssättet på skolan. Hon menar att detta leder till att läroboken fortfarande får styra undervisningen. I Skolverkets nationella kvalitetsgranskning (2003) påpekas också att många lärare tror att det krävs en lärare med mycket erfarenhet för att klara av en matematikundervisning utan lärobok eller där läroboken har en underordnad betydelse.

2.2 Läromedlets användning

Läroboken ges ofta en central roll redan i de tidiga skolåren. Den dominerande undervisningsformen i matematik är individuellt arbete och eftersom eleverna oftast arbetar på egen hand, i sin egen takt och diagnostiserar samt rättar sig själv med hjälp av lärobokens facit är risken stor att undervisningen går ut på att ”räkna så många tal som möjligt” (Skolverket, 2003, s. 19). Forskare menar att det kan vara negativt för inlärning av matematik om det görs en allt för stark betoning på räkning i undervisningen innan eleverna mött matematikens idéer eftersom eleverna då kan överger sina personliga och informella lösningsstrategier till förmån för en formaliserad matematik. Valet att låta läromedlet styra undervisningen är dock inte bara av ondo och vilken inverkan läroboken får på elevernas lust till ämnet matematik beror i hög grad på hur den används. Lärare som har valt läromedel utifrån målen i kursplanen anser att de har kunnat förändra sitt arbetssätt på ett sätt som främjar lusten att lära. (Skolverket, 2003)

Brändström (2003) menar att läromedlet är ett bra hjälpmedel för både lärare, elever och föräldrar. Hon skriver vidare att en viktig del av läromedlet är lärarhandledningen. Brändström anser dock att författarna till läromedlen inte utnyttjar lärarhandeldningen på ett optimalt sätt. Enligt henne innehåller lärarhandeldningen ofta ”bara kopieringsunderlag till prov, diagnoser och uppgifter i form av knep och knåp” (s.23). Brändström tycker att lärarhandledningen borde utformas mer som en metodbok där läraren ska kunna få förslag på material som finns utanför läroboken. Detta material borde kunna inspirera lärarna i deras planering av lektionerna samt ge dem mer information vad de bör lära sig mer om. På detta sätt skulle, enligt Brändström, fokuset på läromedlet kunna minska.

3. Taluppfattning

Taluppfattning är ett av matematikens grundläggande områden jämsides med problemlösningsförmåga och geometrisk uppfattning (Magne, 1998). Taluppfattning är också ett omfattande område som är svårt att skilja från såväl huvudräkning som överslagsräkning (McIntosh, Reys & Reys, 1997). Utifrån det perspektivet är det inte svårt att förstå att det finns många sätt att se på, beskriva och definiera begreppet taluppfattning. Under den här rubriken lyfter vi fram flera sätt att se på och strukturera taluppfattning, vad som krävs för att utveckla taluppfattning samt vad som kännetecknar en elev med god taluppfattning.

3.1 Sätt att se på och strukturera taluppfattning

Taluppfattning innebär att behärska tal och deras egenskaper samt att ha en känsla för talen på ett sätt som gör att operationer med dem kan ske med flyt. Det kan jämföras med att kunna läsa då läsning kräver snabb avkodning av bokstäver för att förstå innebörden av vad man läser. God taluppfattning krävs för att kunna utföra räkneoperationer med lätthet. (Löwing, 2008)

Enligt Löwing (2008) ingår följande områden i taluppfattning:

- behärska talens ordning och grannar
- behärska positionssystemet med basen 10
- behärska och kunna använd de grundläggande räknelagarna; kommutativa lagen, associativa lagen och distributiva lagen.
- behärska tals uppdelning i termer och faktorer
- kunna avgöra tals storleksordning, avrunda tal och arbeta med runda tal

Emanuelsson och Emanuelsson (1997) lyfter istället upp följande sex aspekter av taluppfattning som i mångt och mycket påminner om de områden av taluppfattning som Löwing beskriver.

1. *Förståelse av tals betydelse och storlek* – i detta ingår förståelse för positionssystemet med basen 10 samt platsvärden för talen som ingår i detta system. Det ingår också att förstå relationer mellan tal samt att kunna jämföra tals storlek.
2. *Förståelse och användning av olika representationer av tal* – förståelsen för att tal kan uttryckas på olika sätt och att man kan tänka på och arbeta med tal på många sätt för att gynna ett visst syfte.
3. *Förståelse av operationers innebörd och funktion* – förståelsen för hur operationer fungerar och vad de innebär. I detta ingår också bedömning av ett resultats rimlighet.
4. *Förståelse och användning av ekvivalenta uttryck* – förmågan att tolka uttryck och kunna bedöma, ompröva och effektivisera beräkningar. I detta ingår också att förstå och kunna använda aritmetiska egenskaper, såsom likhetstecken och räknelagar, för att förenkla och utveckla lösningsstrategier.

5. *Strategier för beräkning och antalsbestämning* – att kunna uppskatta, räkna i huvudet, göra skriftliga beräkningar samt göra beräkningar med miniräknare för att kunna formulera och lösa problem.
6. *Referenspunkter vid mätning och rimlighetsbedömningar* – förståelsen för och förmågan att använda standardiserade, icke standardiserade och personliga måttreferenser.

McIntosh, Reys och Reys (1992) presenterar ytterligare ett sätt att se på taluppfattningens beståndsdelar. De har strukturerat upp allmänt godtagna komponenter av grundläggande taluppfattning genom att dela in dem i tre områden. De kallar dessa områden för: ”Knowledge of and facility with numbers”, ”Knowledge of and facility with operations” och “Applying knowledge of and facility with numbers and operations to computational settings”. Varje område innehåller en samling förståelser som eleverna kan finna lämpliga och praktiska användningar för.

Det första området, ”Knowledge of and facility with numbers”, innehåller fyra grupper av förståelser. Första förståelsen, ”Sense of orderliness”, innebär att man har en förståelse för hur vårt Hindu-Arabiska talsystem är uppbyggt. Det innefattar bland annat att man har förståelse för positionssystemet och kan se det upprepade mönstret i den muntliga och skrivna talföljden. Den andra förståelsen ”Multiple representations for numbers” innebär att man förstår och kan se att samma tal kan representeras på olika sätt. Ett exempel är att 2 + 2 + 2 + 2 också kan också skrivas som $4 \cdot 2$. Detta är en användbar koppling mellan addition och multiplikation. En elev som utvecklat den här förståelsen kan vid en räkneuppgift, till exempel 25 + 27, se på talen och finna en annan mer lämplig representation för något av talen. 27 kan delas upp i 25 och 2 vilket ändrar räkneuppgiften till 25 + 25 + 2. Två tjugofemmor är 50 och sen lägger vi till 2, alltså får vi 52. Den tredje förståelsen inom detta område är ”Sense of relative and absolute magnitude of numbers” vilken innebär att man har en förmåga att känna igen värdet på ett tal eller antal i relation till ett annat tal och att man därigenom har förmågan att uppskatta ett tals eller en mängds storlek. Detta kan endera ske genom att man relaterar rent matematiskt till ett annat tal eller genom att man relaterar till något mer fysiskt, till exempel antal dagar. För att en elev ska få en uppskattning av hur stort talet tusen är kan man sätta det i relation till verkligheten och fråga hur lång tid det tar att räkna till tusen eller fråga om elev tror att den har levt fler eller färre än 1000 dagar. Genom sådana samtal, där eleven får komma i kontakt med talet 1000 i olika sammanhang, kan eleven skapa sig en bättre förståelse för talets storlek. Den fjärde förståelsen, ”System of benchmarks”, innebär att man använder sig av mentala referenser, hållpunkter, när man tänker på tal. En vanlig numerisk hållpunkt är ½ eller 50 %, men vilket värde som helst kan användas som hållpunkt förutsatt att eleven har en säker förståelse för hållpunktens värde. De hållfasta punkterna kan utvecklas dels genom erfarenhet och dels genom givna instruktioner. (McIntosh et al, 1992)

Det andra området, ”Knowledge of and facility with operations”, innehåller tre grupper av förståelser. Den första förståelsen är ”Understanding the effect of operations” och innebär att man har en förståelse för den funktion en matematisk operation har på olika tal, så väl heltal som rationella tal. För att eleverna ska bygga upp en förståelse för hur en matematisk operation fungerar är det vanligt att man använder sig av olika modeller. Räknesättet multiplikation kan till exempel ses utifrån modellen upprepad addition. Genom modellen kan eleven bilda sig en uppfattning om vad multiplikation är samt utifrån det utföra en multiplikationsoperation. Det är av stor vikt att olika modeller av multiplikation presenteras samt att eleverna får upptäcka de olika modellernas styrkor och begränsningar. Om man endast ser multiplikation som upprepad addition kan man komma fram till en felaktig generalisering av multiplikation så som att multiplikation till exempel alltid gör saker och ting större. En variation av olika modeller av multiplikation, så som upprepad addition, tallinje och rektangulär area, är att föredra eftersom eleverna då får uppleva multiplikation på flera olika sätt och i flera olika kontexter. Den andra förståelsen, ”Understanding mathematical properties”, innebär att man har en förståelse för matematiska egenskaper så som kommutativitet, associativitet och distributivitet. Dessa egenskaper har länge varit en del av skolmatematiken men har dessvärre oftast lärts ut i form av regler utan koppling till en praktisk användning. En sådan presentation av de matematiska egenskaperna gör att eleverna inte förstår nyttan av egenskaperna och därmed inte heller kommer att utnyttja dem när de ska lära sig multiplikationskombinationerna. Det är alltså av stor vikt att man kopplar ihop den praktiska nyttan av de matematiska egenskaperna för att eleverna ska utveckla en förståelse för dem och därmed känna sig trygga med att använda dem. Den tredje förståelsen, ”Understanding the relationship between operations”, handlar om att se och dra nytta av samband mellan operationer för att kunna skapa sig en uppfattning om och lösa problem. Detta innefattar att eleven ser sambanden samt känner sig bekväm med att utnyttja sambanden mellan addition och multiplikation, subtraktion och division, addition och subtraktion samt multiplikation och division. (McIntosh et al, 1992)

Det tredje området, ”Applying knowledge of and facility with numbers and operations to computational settings”, innehåller fyra grupper av förståelser. Den första förståelsen, ”Understanding the relationship between problem context and the necessary computation”, innebär att man förstår att typen av uträkning som krävs för att lösa ett problem påverkas av situationen som problemet presenteras i samt hur problemfrågan formuleras. Låt oss säga att man handlar äpplen för $2.88, bananer för $2.38 och apelsiner för $3.76. Om man frågar efter hur mycket man får betala för frukten krävs ett exakt svar. Man kan då välja på flera olika metoder så som huvudräkning, skriftlig räkning eller miniräknare för att komma fram till svaret. Om det istället frågas efter om $10 räcker för att betala frukten krävs det endast överslagsräkning för att snabbt kunna svara på problemfrågan. Den andra förståelsen ”Awareness that multiple strategies exist”, innebär att man är medveten om att det finns många olika sätt att lösa ett och samma problem, samt att man kan tänka ut och använda en ny strategi om man märker att den första verkar ineffektiv. Den tredje förståelsen, ”Inclination to utilize an efficient representation and/or method”, innebär att man är medveten om att vissa strategier och räkneverktyg är mer tidseffektiva än andra och att man därför tenderar att använda sig av dessa strategier och räkneverktyg framför mer tidskrävande sådana. Uppgiften 7 + 8 går att lösa genom att räkna en och en men det är mer effektiv att tänka dubbelt av 7 är 14 och så 1 till, alltså 15. Den fjärde förståelsen, ” Inclination to review data and result” innebär att man när man kommit fram till ett svar har förmågan att gå tillbaka till ursprungsproblemet för att se om svaret verkar begripligt och rimligt. För att avgöra detta tittar man dels på hur problemfrågan formulerats och dels på de ingående talen i problemet. (McIntosh et al, 1992)

3.2 Vad krävs för att utveckla god taluppfattning?

Reys och Reys (1995) menar att god taluppfattning utvecklas och mognar med erfarenheter och kunskaper samt att läraren har en betydande roll för att elever ska kunna utveckla god taluppfattning. De menar att undervisningen kräver medvetenhet hos läraren för att bygga upp förståelse hos eleverna samt ge dem möjlighet att se samband mellan tal.

Den viktiga roll som läraren har för att utveckla god taluppfattning hos eleverna betonas också av McIntosh, Reys och Reys (1997). En person som har en utvecklad taluppfattning kan bland annat utveckla och använda effektiva strategier för att hantera tal och operationer med tal. McIntosh et al har kommit fram till fyra slutsatser om hur lärare kan hjälpa eleverna att utveckla sådana tankeformer, det vill säga strategier för räkning, och därmed också hur läraren kan bidra till utveckling av taluppfattning hos eleverna. De fyra slutsatserna är:

- gör klart för eleverna att det är ett värdefullt arbete att utveckla och använda tankeformer
- be alltid eleverna att förklara hur de utfört en huvudräkning
- erbjud flera olika räknemetoder för att uppmuntra eleverna att använda strategier som skiljer sig från algoritmräkning
- lev som du lär, det vill säga praktisera de ovanstående punkterna. Dela med dig av tankeformer till eleverna och tänk högt när du räknar.

3.3 Vad kännetecknar god taluppfattning hos eleverna?

Reys och Reys (1995) menar att god taluppfattning ger en intuitiv känsla för tal, hur de tolkas och hur de används. God taluppfattning gör att det är lättare att värdera noggrannheten i uträkningar, att upptäcka räknefel vid uppskattning samt att hantera och använda tal med sunt förnuft. De beskriver vad som kännetecknas hos elever som har god taluppfattning. De menar att dessa elever

- ”tittar på ett problem i sin helhet, innan han/hon går in på detaljer”…
- ”letar efter samband mellan tal och operationer och tar hänsyn till problemens sammanhang”…
- ”väljer eller hittar på en metod som stämmer med den egna förståelsen av sambandet mellan tal, eller mellan tal och omvärld och strävar efter den mest effektiva representationen eller tolkningen av den givna uppgiften”…
- ”använder hållpunkter, ”benchmarks”, för att bedöma tals storlek.”…

- ”känner igen orimliga resultat på uträkningar när man på vanligt sätt reflekterar över svar.”

(Reys & Reys, 1995, s. 28-29)

4. Analytisk teori och analytiska frågor

Den analytiska teorin speglar våra frågeställningar och är indelad i två områden: Multiplikation samt Samband och tankeformer. Varje område utmynnar i de analysfrågor som vi utgått från vid analysen av läromedlen. Den analytiska teorin har sedan, tillsammans med den presenterade forskningen om taluppfattning, använts för att svara på frågeställningarna och syftet i resultatdiskussionen.

4.1 Multiplikation

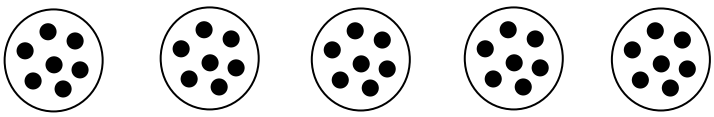
För att ta reda på hur räknesättet multiplikation framställs i olika läromedel är det relevant att först beskriva vad multiplikation innebär. I det här ingår att presentera hur multiplikation kan ses och i vilka situationer multiplikation uppträder. Det är också viktigt att beskriva de räknelagar för multiplikation som är användbara i arbetet med de grundläggande multiplikationskombinationerna.

> ”Begreppet multiplikation genomsyrar stora delar av matematiken och utgör därmed en nödvändig förkunskap inom många områden.”
>
> (Löwing, 2008, s.163)

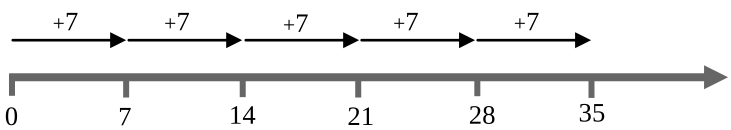
4.1.1 Hur kan multiplikation ses?

McIntosh (2009) beskriver att multiplikation kan ses som endera endimensionell eller tvådimensionell. Den endimensionella multiplikationen är upprepad additionen och kan representeras genom flera grupper med lika många i varje (figur 1) eller på en endimensionell tallinje (figur 2). McIntosh menar att de endimensionella representationerna är helt korrekta men att de ger en begränsad tolkning av multiplikation. Den tvådimensionella representationen, som motsvaras av ett rutnät (figur 3), är, enligt McIntosh, viktig för att eleverna ska utveckla en djupare förståelse för multiplikation. Rutnätet synliggör för eleverna att två tal som multipliceras utgör två oberoende dimensioner. Den tvådimensionella representationen går också att generalisera till multiplikation av alla rationella tal vilket inte är möjligt med de endimensionella representationerna. McIntosh poängterar att det är viktigt att betona denna rektangulära, tvådimensionella representation för eleverna samt att utnyttja de exempel på detta som finns naturligt i elevernas omgivning.

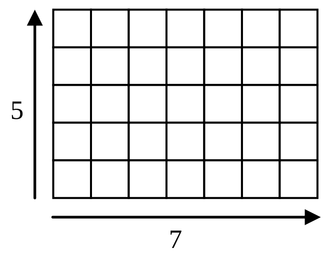
Figur 1



Figur 2



Figur 3



4.1.2 Situationer när multiplikation används

Greer (1992) lyfter fram fyra övergripande situationer där multiplikation och division med heltal används. Den första är *lika grupper* vilket inbegriper situationer där det är ett antal grupper med lika många i varje grupp. Han tar upp två exempel på detta:

> ”3 children have 4 cookies each. How many cookies do they have altogether?”
>
> (s.276)
>
> “If there are 4 cookies per child, how many cookies do 3 children have?”
>
> (s.277)

I båda exemplen har talen 3 och 4 olika roller. Det ena talet är multiplikator som verkar på det andra talet som är multiplikand. Detta gör att två typer av division är möjliga, dels delningsdivision och dels innehållsdivision. (Greer, 1992)

I den andra situationen som Greer (1992) presenterar har de ingående talen också olika roller. Den andra situationen kallar han *multiplikativ jämförelse* och uttrycks som ”n gånger så många som” (s 277, vår översättning). Han ger exemplet:

> “John has 3 times as many apples as Mary. Mary has 4 apples. How many apples has John?”
>
> (s.277)

Situationen kan också uttryckas i termer av en flera-till-ett korrespondens där John får tre äpplen för varje av Marys äpplen. (Greer, 1992)

Den tredje situationen som Greer (1992) tar upp är *Cartesian product*. Cartesian product kan beskrivas som antalet möjligheter att bilda par under förutsättningen att elementen i varje par tillhör två olika grupper, där den ena gruppen innehåller m element och den andra gruppen n element. Antalet möjliga par bestäms då av m × n. Greer ger här exemplet:

> “If 4 boys and 3 girls are dancing, how many different partnerships are possible?”
>
> (s.277)

I situationer av Cartesian product är det tydligt att de ingående talen har lika roller, vilket också gör att det bara kan skapas en sorts divisionsproblem. (Greer, 1992)

Den fjärde och sista situationen som Greer (1992) beskriver är *rektangulär area*. Om sidorna på rektangeln är heltal, till exempel 3 cm och 4 cm, går det att dela in rektangeln i hela kvadratcentimeter. Genom att räkna dessa kvadrater får man lätt reda på att arean är 12 kvadratcentimeter. Situationen rektangulär area omfattar också rektangulära formationer av objekt i rader och kolumner, så som till exempel 3 rader med 4 objekt i varje rad. Båda dessa varianter av rektangulär area är användbara för eleverna eftersom de på ett naturligt sätt visar egenskaper hos multiplikation så som till exempel kommutativitet. Liksom i situationer av Cartesian product, så har de ingående talen i situationer av rektangulär area, lika roller och det förekommer därför bara en sorts divisionsproblem.

Enligt Anghileri (2000) är det viktigt att eleverna kan tänka på multiplikation på alla de fyra sätt som Greer beskriver samt att eleverna fullt förstår att alla situationerna kan utryckas med en och samma numeriska operation. Förståelse av de abstrakta förhållandena mellan talen i en operation gör att eleverna kan utnyttja effektiva tillvägagångssätt. Det innebär att eleverna förstår att de kan lyfta ur den numeriska operationen ur sin situation och använda ett annat tillvägagångssätt för att lösa operationen.

4.1.3 Kommutativa och distributiva lagen för multiplikation

En förutsättning för att kunna utföra beräkningar med flyt är att man har god taluppfattning. En viktig del i taluppfattningen är att behärska och kunna tillämpa de grundläggande räknelagarna. (Löwing, 2008)

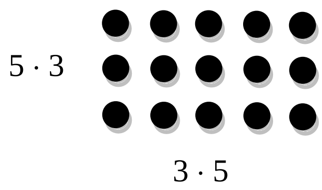
En av de viktigaste räknelagarna för multiplikation är den distributiva lagen. Den lyder $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Den distributiva lagen binder samman addition och multiplikation och är nyckeln till både huvudräkning och skriftlig räkning. (Löwing, 2008)

En annan grundläggande lag som är viktig att kunna är den kommutativa lagen. Den kommutativa lagen för multiplikation lyder $a \cdot b = b \cdot a$ och den används i första hand för att kunna göra delberäkningar i en ordning som gör uträkningen enklare. $23 \cdot 3$ kan räknas ut med upprepad addition som 3+3+3+3+3...+3 (23 stycken treor adderas) men med hjälp av den kommutativa lagen kan man istället räkna $3 \cdot 23 = 23+23+23 = 69$. (Löwing & Kilborn, 2003)

En person som ser multiplikation som upprepad addition kan enligt Anghileri (2000) ha svårt att förstå varför den kommutativa lagen gäller. $2 \cdot 50 = 50 \cdot 2$ omskrivet till addition ger uttrycket $50 + 50 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2...$ femtio gånger, vilket inte ger någon ledtråd varför likheten gäller. Det finns också studier (Schliemann, Araujo, Cassundé, Macedo & Nicéas, 1998) som visar att barn som använder sig av upprepad addition för att lösa multiplikationsproblem inte använder sig av den kommutativa lagen i lika stor utsträckning som barn som löser uppgiften med multiplikation. Samma studier visar att användandet av upprepad addition till och med kan hindra eleverna från att upptäcka och börjar använda kommutativiteten.

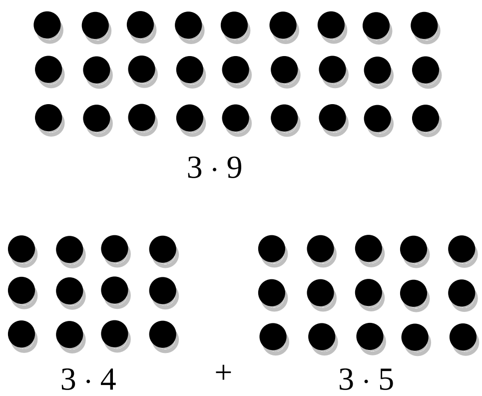
Den tvådimensionella representationen av multiplikation kan enligt McIntosh (2009) med fördel användas för att illustrera den kommutativa och distributiva lagen för multiplikation. Den kommutativa lagen blir synlig genom att man väljer att endera betrakta den rektangulära formationen utifrån raderna eller utifrån kolumnerna.

Figur 4



Den distributiva lagen kan synliggöras genom att man delar upp de rektangulärt formerade prickarna i två delar. Den ursprungliga rektangeln innehåller då lika många prickar som de två nya rektanglarna gör tillsammans. (McIntosh, 2009)

Figur 5



4.1.4 Analytiska frågor om multiplikation

Utifrån ovanstående teorier om multiplikation har vi kommit fram till följande analysfrågor:

- Hur presenterar de olika läromedlen multiplikation?
- Vilka situationer av multiplikation presenteras i lärarhandledning och elevboken?
- Hur tydliggörs och används den kommutativa lagen i lärarhandledningen och elevboken?
- Hur tydliggörs och används den distributiva lagen i lärarhandledningen och elevboken?

4.2 Samband och tankeformer

För att ta reda på hur läromedlen tydliggör samband mellan och tankeformer för de grundläggande multiplikationskombinationerna är det relevant att beskriva teorier kring samband och tankeformer.

För att göra det lättare att hantera olika moment inom matematiken måste eleven, enligt McIntosh (2009), ges möjlighet att se samband inom matematiken. Matematiken bygger på samband mellan begrepp, idéer, fakta och processer och en viktig komponent när det gäller undervisning inom matematiken är att få eleven att förstå dessa samband. Genom att förstå sambanden går det att ”härleda kombinationer som glömts bort eller inte framträder snabbt och säkert” (s. 4).

Så här skriver Löwing (2008) om multiplikationstabellen.

> ”Elever har i flera generationer försökt att lära sig den här tabellen utantill genom att rabbla den rad för rad. Det har tagit tid, men det har faktiskt fungerat. Genom att analysera tabellens struktur kan man emellertid göra inlärningen enklare samtidigt som eleverna ges möjlighet att lära sig matematik.”
>
> (Löwing, 2008, s. 165)

Med en tabell menas i det följande alla multiplikationskombinationer där multiplikanden är den samma. 3:ans tabell består alltså i $1 \cdot 3$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 3$, $4 \cdot 3$ och så vidare. Enligt McIntosh (2009) finns det pedagogiska nackdelar med att lära ut multiplikationskombinationerna som tabeller. Detta beror på att eleverna då inte får möjlighet att upptäcka sambanden mellan olika tabeller och sambanden inom enskilda tabellerna. Han poängterar att forskning visar att just sådana kopplingar är viktiga för utvecklingen av elevens räknefärdigheter och uppmanar därför läraren att alltid lyfta fram de kopplingar som är möjliga.

För att bygga upp tabellkunskaper utifrån samband och strategier kan, enligt McIntosh (2009), två strukturer användas. Varje multiplikationskombination kan därför alltid beräknas på två olika sätt. Om man använder sig av det första sättet, struktur ett, väljer man att fokusera på multiplikanden och gör talföljdsräkning. Talföljdsräkning, också kallad skutträkning, innebär att eleverna rabblar multiplerna av ett tal, till exempel 5, 10, 15, 20, 25, 30 och så vidare. Eleven kan då se multiplikationen $6 \cdot 5$ som den sjätte multipeln av talet 5. Det andra sättet att beräkna en multiplikationskombination, struktur två, är genom en speciell tankeform för varje multiplikator. Nedan visas ett utdrag ur McIntoshs (2009) bok *Förstå och använda tal – en handbok* som lyfter fram de tankeformerna för varje multiplikator som antagligen är vanligast förekommande bland eleverna.

Multiplikator	Tankeform	Exempel
2	Dubbelt	$2 \cdot 7$: dubbelt 7 är 14
3	Dubbelt och en mängd till	$3 \cdot 7 = 14 + 7$
4	Dubbelt dubbelt	$4 \cdot 7 = 2 \cdot 14$
5	Hälften av tio gånger	$5 \cdot 7$ = hälften av 70
6	Fem gånger plus en mängd till	$6 \cdot 7 = 35 + 7$

7	Fem gånger plus två mängder till	$7 \cdot 7 = 35 + 14$
8	Dubbelt, dubbelt och dubbelt igen	$8 \cdot 7 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 7))$
9	En gång mindre än tio gånger	$9 \cdot 7 = 70 - 7$
10	Begreppsförståelse av tiobassystemet	$10 \cdot 7 = 70$

(McIntosh, 2009, s. 105)

McIntosh (2009) lyfter fram att multiplikationskombinationerna inte måste introduceras i en bestämd ordning, men för att eleverna ska kunna utnyttja sambandet mellan multiplikationskombinationerna bör de introduceras i en ordning som möjliggör det. Syftet med tankeformer är, enligt McIntosh, Reys och Reys (1997) att omvandla en räkneuppgift som man inte kan beräkna till en räkneuppgift som man kan beräkna genom att utnyttja samband mellan tal och räkneoperationer.

En elev som endast kan utföra en multiplikation som en upprepad addition saknar strategier att hantera multiplikation. Detta innebär att eleven kan få svårt att multiplicera större tal, i huvudet så väl som skriftligt. Av denna anledning är det viktigt att läraren uppmärksammar vilken tankeform eleverna använder sig av när de multiplicerar. (Löwing, 2008)

Löwing (2008) beskriver att det är vanligt att man vid introduktion av multiplikation utgår från situationer av typen *lika grupper*, samt att eleverna får rabbla talföljdsräkningen som en ramsa, i syfte att underlätta för eleverna att känna igen de olika stegen. Löwing betonar att det är viktigt att läraren är medveten om att dessa tankeformer endast skildrar multiplikation som upprepad addition och därmed döljer den kommutativa, distributiva och associativa egenskapen hos multiplikation.

4.2.1 Analytiska frågor om samband och tankeformer

Utifrån ovanstående teorier om samband och tankeformer har vi kommit fram till följande analysfrågor:

- Hur presenteras multiplikationskombinationerna?
- I vilken ordning presenteras multiplikationskombinationerna?
- Vilka samband mellan grupperna av multiplikationskombinationer förekommer i respektive läromedel och tydliggörs dessa samband?
- Vilka tankeformer för varje grupp av multiplikationskombinationer förekommer i respektive läromedel?

5. Metodologi

För att kunna svara på vårt syfte har vi genomfört en läromedelsanalys. I detta avsnitt tar vi upp hur läromedlen har valts ut samt hur analysen har genomförts. Vi beskriver också validiteten samt ger en kort beskrivning av läromedlen.

5.1 Avgränsning och urval av läromedel

Läromedelsanalysen genomfördes på fem olika läromedelsserier men endast på lärarhandledningar och elevgrundböcker för åk 1-3. Eftersom vårt arbete är avgränsat att handla om multiplikation har vi bara analyserat de avsnitt eller sidor som behandlar multiplikation i läromedlen.

Vi bestämde oss för att analysera fem läromedel för att på så sätt kunna bilda oss en uppfattning om hur olika läromedel kan påverka elevers möjlighet att utveckla taluppfattning. Vi ville analysera vanligt förekommande läromedel och valde därför fyra läromedel som vi kände till och som vi visste används i flera skolor i Sverige. Det femte läromedlen är finskt och rekommenderades till läromedelsanalysen av en lärare på högskolan.

5.2 Tillvägagångssätt

Inledningsvis läste vi litteratur såsom artiklar, rapporter och examensarbeten som kändes relevanta för vårt arbete. Efter detta sammanställde vi vår analytiska teori för att kunna skapa ett analysinstrument. Den analytiska teorin speglar våra frågeställningar och utmynnar i de analysfrågor som vi utgått från vid analysen av läromedlen. När vi valt ut vilka sidor som skulle analyseras startade vi vår analys.

För att få en struktur på analysen skapade vi ett protokoll för varje analysfråga där frågan besvaras läromedel för läromedel. Vi började analysen med att titta på hur multiplikation framställs i respektive läromedlen. Sedan tittade vi på vilka samband och tankeformer som förekommer i respektive läromedel. Vi analyserade läromedlen tillsammans och analysen genomfördes analysfråga för analysfråga.

5.3 Validitet och reliabilitet

Validiteten och reliabiliteten i ett arbete är grundläggande för dess värde. Validiteten visar om forskaren mäter det som avses mätas och reliabiliteten om mätningarna är tillförlitliga (Stukát, 2005). För att kunna uppnå vårt syfte valde vi att göra en läromedelsanalys. Vi skulle dock ha kunnat gå ut och observerat hur några lärare använder läromedlen i arbetet med multiplikation, samt gjort för- och eftertester av elevernas taluppfattning. Genom en sådan metod skulle vi kunna se hur lärares användning av läromedlen i samband med multiplikation kan påverka elevers taluppfattning. Den tid som finns till förfogade skulle dock begränsa oss till att endast kunna observera och för- och eftertesta ett få antal lärare och elever vilket också skulle begränsa antalet läromedel till ett eller två stycken. Vi motiverar också vårt val av läromedelsanalys som metod utifrån att de resultat vi nu presenterar blir relevanta för ett stort antal lärare eftersom de läromedel vi analyserat används av ett stort antal lärare. Om vi istället hade observerat och gjort för- och efter teseter av elevers taluppfattning hade det resultatet varit mest intressant för de berörda lärarna då det är deras sätt att tolka och använda läromedlet som vi skulle observerat och inte vad läromedlet i sig uttrycker.

Våra analysfrågor har i detta arbete fungerat som vårt mätinstrument. Vi utgick från den analytiska teorin för att formulera analysfrågorna och vi anser att dessa frågor utgjort ett väl fungerande mätinstrument för vår undersökning. Detta eftersom svaren på de analytiska frågorna ger en bred bild av hur multiplikation framställs och struktureras i läromedlen. Stukát (2005) menar att reliabiliteten i ett arbete blir hög om resultaten från två mätningar, gjorda med samma mätmetod, överensstämmer. Vi bedömer att våra analysfrågor kan användas av andra för att analysera de läromedel vi analyserat och att de resultaten med stor sannolikhet skulle överensstämma med våra.

Stukát (2005) påpekar att alla undersökningar innehåller någon form av brist. Eftersom ingen av oss gjort en läromedelsanalys tidigare insåg vi att en brist i vår undersökning skulle kunna bli tillvägagångssättet av och en skiftande noggrannhet vid analysen. För att undvika att detta utgick vi från ett protokoll där varje analysfråga besvarades för alla läromedel innan vi gick vidare till nästa analysfråga. Med det här tillvägagångssättet att gå analysfråga för analysfråga istället för läromedel för läromedel undvek vi risken att det första läromedlet som analyserades inte skulle göras på samma sätt som det sista. Risken hade annars varit stor att vi i slutet av analysen blivit mer inarbetade och därför blivit mer noggranna vid analysen av det sista läromedlet jämfört med det första.

Även om vi båda har läst alla läromedel noggrant finns det dock ändå en risk att vi kan ha missat information i läromedlen när vi har läst. Risken för att vi har missat information borde vara störst i läromedel *Matte Mosaik* eftersom multiplikationsarbetet där inte är samlat under bestämda kapitel utan utspritt i hela läromedlet.

Eftersom vi begränsat oss till att endast titta på de sidor som behandlar multiplikation finns det en risk att relevant information presenterats på något annat ställe i läromedlet. Det skulle kunna vara så att lärarhandledningen till ett läromedel presenterat den kommutativa lagen för multiplikation i samband med att den kommutativa lagen för addition presenteras. Om lärarhandledning inte presenterar lagen igen i samband med multiplikationsavsnittet kommer det i vår analys att framgå att lärarhandledningen inte alls presenterar den kommutativa lagen för multiplikation.

5.4 Beskrivning av läromedlen

Nedan följer en kort beskrivning av de läromedel vi analyserat. Vi har hämtat informationen från respektive förlags hemsida och vidare information om läromedlen kan hämtas där. Av praktiska skäl använder vi i den fortsatta texten beteckningen *lärarhandledning* för alla läromedel trots att vissa kallar sin lärarpärm eller lärarbok.

Detta gäller även elevernas grundböcker. Dessa kommer vi i fortsättningen att benämna *elevbok*.

5.4.1 Eldorado

Eldorado ges ut av förlaget Natur och Kultur. Läromedlet finns för åk F-3. Böcker för åk 4-6 håller på att framställas.

Läromedlet för åk 1-3 består av:

- Grundbok (A och B)
- Bonusbok röd (A och B), uppgifter i samma nivå som grundboken för de elever som behöver öva mer på samma sak som tagits upp i grundboken.
- Bonusbok blå (A och B), uppgifter med högre svårighet för de elever som behöver större utmaningar.
- Läxbok (A och B)
- Facit (A och B)
- Extra färdighetsträning
- Lärarbok (A och B)

Grundbok, lärarbok och facit för 3B har inte kommit ut på marknaden ännu. Vi har fått ta del av utkast till det avsnitt som behandlar multiplikation för att kunna göra vår analys.

5.4.2 Matematikboken

Matematikboken ges ut av förlaget Liber. Läromedlet sträcker sig från åk F – 9.

Läromedlet för åk 1-3 består av:

- Elevbok (A och B)
- Läxbok (A-B)
- Lärarbok (A och B)
- Kul och klurigt
- Träna
- Facit (3A och 3B)

5.4.3 Matte Direkt

Matte Direkt ges ut av förlaget Bonnier utbildning. Matte Direkt finns för åk F-9.

Läromedlet för åk 1-3 består av:

- Elevbok (A och B)
- Läxbok (A och B)
- Lärarhandledning (A och B)
- Interaktiv Whiteboard (skollicens)
- Interaktiv elevbok, 3A, (elevlicens)

5.4.4 Matte Mosaik
Matte Mosaik ges ut av förlaget Liber. Läromedlet sträcker sig från åk F – 6.

Läromedlet för åk 1-3 består av:

- Grundbok (A och B)
- Läxbok (A och B)
- Lärarpärm
- Facit (A och B)
- Träna blå (åk 1)
- Träna röd (åk 2)
- Träna grön (åk 4)
- Sifferboken (åk 1)
- Räkna med uppställning (åk 2)

5.4.5 Min matematik
Min matematik ges ut av förlaget Schildts. Min matematik är ett finskt läromedel med svensk text. Läromedlet sträcker sig från åk 1-6.

Läromedlet för åk 1-3 består av:

- Lärobok (A och B)
- Lärarhandledning (A och B)
- Facit (3A och 3B)

6. Resultat och analys

I detta avsnitt visas resultatet av vår läromedelsanalys. Resultatet presenteras utifrån analysfrågorna och under varje rubrik analyseras resultatet med hjälp av analysteorin.

6. 1 Multiplikation

Nedan presenteras hur de olika läromedlen framställer multiplikation.

6.1.1 Hur presenterar de olika läromedlen multiplikation?

Multiplikation kan, som beskrivs i den analytiska teorin, ses som endera endimensionell eller tvådimensionell. Den endimensionella representationen kan ses endera i form av lika grupper eller som en tallinje. Tabell 1 ger en överblick över vilka av dessa representationer de olika läromedlen innehåller. Efter tabellen ges kortfattade kommentarer om hur multiplikation presenteras i respektive läromedel samt hur det kan tolkas utifrån den analytiska teorin.

	Endimensionell ”Lika grupper”	**Endimensionell Tallinje**	**Tvådimensionell**
Eldorado	x	x	x
Matematikboken	x		x
Matte Direkt	x		x
Matte Mosaik	x		x
Min matematik	x	x	x

Tabell 1. Hur multiplikation presenteras

Eldorado presenterar både den endimensionella och den tvådimensionella synen på multiplikation. I lärarhandledningen beskrivs multiplikation som flera grupper med lika många i varje, som tallinje med lagda pilar längsmed samt som rutnät. I elevböckerna finns alla dessa presentationer med, men tallinjen används inte för att illustrera en multiplikation utan istället för att göra såkallad ”skutträkning”. Den tvådimensionella representationen visas också genom rektangulära formationer av föremål.

Matematikboken presenterar både den endimensionella och den tvådimensionella synen på multiplikation. I lärarhandledningen står det att multiplikation kan ses både som flera lika grupper och som rutnät. I elevboken förekommer båda dessa representationer.

Matte Direkt presenterar både den endimensionella och den tvådimensionella synen på multiplikation. Den endimensionella synen presenteras i form av lika grupper. Den endimensionella synen är kraftigt dominerande, vilket speglar läromedlets syn på vad multiplikation är ”Det är viktigt att eleverna förstår att multiplikation är detsamma som upprepad addition” (*Matte Direkt, lärarhandledning 2A,* s. 128). Den tvådimensionella synen på multiplikation framträder på en sida i läromedlet och då i form av en diskussionsbild där det visas ett fönster med 3 · 4 rutor. Som förslag på samtal finns i lärarhandledningen angivet att läraren kan prata med eleverna om hur man kan räkna ut hur många rutor fönstret har.

Matte Mosaik presenterar både den endimensionella och den tvådimensionella synen på multiplikation. Den endimensionella synen presenteras genom lika grupper. I läromedlet knyts den endimensionella och tvådimensionella synen på multiplikation samman genom arbetet med talstavar. En talstav består av ett antal kvadrater som staplats på varandra. Fyra kvadrater staplade på varandra motsvarar talet fyra, fem kvadrater talet fem och så vidare. I elevboken 1B visas hur flera lika talstavar adderas, vilket motsvarar den endimensionella synen på multiplikation, och därefter hur dessa talstavar förs samman och bildar ett rutnät, vilket motsvarar den tvådimensionella synen på multiplikation.

Min matematik presenterar både den endimensionella och den tvådimensionella synen på multiplikation. Den endimensionella synen presenteras i form av flera lika grupper samt som tallinje. Tallinjen används dock inte för att illustrera en multiplikation utan istället för att göra såkallad ”skutträkning”. Den tvådimensionella synen presenteras genom rutnät och genom rektangulära formationer av föremål.

Enligt McIntosh (2009) ger det eleverna en begränsad syn på multiplikation om endast den endimensionella representationen av multiplikation presenteras. Den tvådimensionella representationen menar McIntosh är viktig för att eleverna ska utveckla en djupare förståelse för multiplikation. Alla de analyserade läromedlen innehåller både den endimensionella och den tvådimensionella representationen. I alla läromedel är den endimensionella representationen tydligt presenteras och i fyra av läromedlen är också den tvådimensionella representationen tydligt presenterad. I *Matte Direkt* förekommer dock ingen tydlig presentation av den tvådimensionella representationen. Det kan därför tolkas som att *Matte Direkt* inte ger eleverna samma möjlighet, att utveckla en djupare förståelse för multiplikation, som de fyra andra läromedlen som tydligt presenterar den tvådimensionella representationen gör.

6.1.2 Vilka situationer av multiplikation presenteras i lärarhandledning och elevboken?

I den analytiska teorin lyfts det fram att multiplikation kan uppträda i fyra olika situationer. Tabell 2 visar vilka av dessa situationer som förekommer i de olika läromedlen. Efter tabellen ges kortfattade kommentarer om hur dessa situationer framträder i respektive läromedel samt hur resultatet kan tolkas utifrån den analytiska teorin.

	Lika grupper	Multiplikativ jämförelse	Cartesian product	Rektangulär area
Eldorado	x	x		x
Matematikboken	x			x
Matte Direkt	x			x
Matte Mosaik	x	x	x	x
Min matematik	x	x		x

Tabell 2. Situationer av multiplikation

I *Eldorado* är situationerna lika grupper och rektangulär area mest frekventa. Dessa situationer finns med i såväl handledning som i elevbokens uppgifter. Situationen multiplikativ jämförelse förekommer endast i lärarhandledningen. I *Eldorado Lärarbok 1B* finns exempel på räknehändelser som innefattar multiplikativ jämförelse. Dessa räknehändelser utgår från en bild i elevboken. I lärarboken står det:

> ”Katten har använt 10 röda legobitar. Musen har gömt undan tre gånger så många bakom legolådorna. Hur många har musen gömt? Tänk om musen har hunnit gömma fyra gånger så många. Hur många hade det varit? Fem gånger? Sex gånger? Sju gånger?”
>
> (*Eldorado 1B, lärarbok*, s.104)

I *Matematikboken* är situationen lika grupper mest frekvent, därefter rektangulär area. Båda dessa situationer finns med i såväl lärarhandledning som i elevbokens uppgifter.

I *Matte Direkt* är situationen lika grupper dominerande. Situationen rektangulär area förekommer vid ett tillfälle i läromedlet och då i form av en diskussionsbild där det visas ett fönster med 3 • 4 rutor. Som förslag på samtal finns i lärarhandledningen angivet att läraren kan prata med eleverna om hur man kan räkna ut hur många rutor fönstret har.

I *Matte Mosaik* är situationerna lika grupper och rektangulär area mest frekventa. Dessa situationer finns med i såväl handledning som i elevbokens uppgifter. Situationen multiplikativ jämförelse förekommer en gång i elevböckerna. Det finns däremot inget exempel på multiplikativ jämförelse i lärarhandledningen, eller någon kommentar till textuppgiften i elevboken. I *Grundbok 2B* står det:

> ”Räven och Igelkotten samlar också frimärken. Räven har 20 märken. Igelkotten har fyra gånger fler. Hur många har Igelkotten?”
>
> (*Matte Mosaik, Grundbok 2B*, s.23)

I *Matte Mosaik Grundbok 3B* presenteras situationen Cartesian product genom att eleverna får ett smörgåsproblem att lösa. De ska ta reda på vilka olika sorters smörgåsar som är möjliga utifrån ett visst antal sorters bröd och ett visst antal sorters pålägg. De får rita och måla de olika smörgåsarna. I *Lärarpärm 3* beskrivs att den här typen av multiplikation brukar kallas kombinatorik och att eleverna kan upptäcka att problemen kan ses som multiplikation genom det praktiska arbetet.

I *Min matematik* är situationerna lika grupper och rektangulär area mest frekventa. Dessa situationer finns med i såväl lärarhandledning som elevbokens uppgifter. I lärarhandledningarna till *Min matematik* finns dessutom flera förslag till både huvudräkning och problemlösning som innefattar multiplikativ jämförelse. Här är ett exempel:

> ”Ronja är 3 år. Axel är fem gånger så gammal som Ronja. Kim är två år äldre än Axel. Hur gammal är Kim?”
>
> (*Min matematik 2b, Lärarhandledning*, s.6)

Den här typen av multiplikativ jämförelse som finns i lärarboken förekommer däremot inte som textuppgifter i elevböckerna.

Anghileri (2000) menar att det är viktigt att eleverna kan tänka på multiplikation utifrån alla fyra situationerna. I läromedel som presenterar många eller alla situationerna av multiplikation torde möjligheten för eleverna att utveckla en förståelse för att multiplikation kan uppträda i många olika situationer öka, och därmed också deras sätt att tänka på multiplikation i olika situationer. *Matte Mosaik*, men även *Eldorado* och *Min matematik* kan därför tolkas ge fördelar för eleverna eftersom läromedlen presenteras flera olika situationer av multiplikation. I läromedel som presenterar få eller bara en enda situation av multiplikation torde möjligheten för eleverna att utveckla en förståelse för att multiplikation kan uppträda i många olika situationer inte vara lika stor, och därmed inte heller deras sätt att tänka på multiplikation i olika situationer. *Matematikboken* och *Matte Direkt* kan därför tolkas begränsa elevernas möjlighet att utveckla en förståelse för att matematik kan uppträda i olika situationer. Denna begränsning kan antas vara störst hos *Matte Direkt* eftersom detta läromedel nästan uteslutande presenterar en situation av multiplikation.

6.1.3 Hur tydliggörs och används den kommutativa lagen för multiplikation i respektive läromedel?

Den kommutativa lagen för multiplikation kan visas genom endera genom en endimensionell representation eller en tvådimensionell representation. Tabell 3 visar om och hur de olika läromedlen visar den kommutativa lagen för multiplikation samt om lagen används för att göra uträkningar enklare. Efter tabellen ges kortfattade kommentarer om hur respektive läromedel visar och använder lagen samt hur det kan tolkas utifrån den analytiska teorin.

	Visas genom endimensionell representation	Visas genom tvådimensionell representation	Används för att göra uträkningar enklare
Eldorado	x	x	x
Matematikboken		x	x
Matte Direkt	x		x
Matte Mosaik		x	x
Min matematik	x	x	x

Tabell 3. Kommutativa lagen för multiplikation i läromedlen

I *Eldorado* visas den kommutativa lagen genom rutnät som vrids och ses från två håll samt genom bilder som visar att till exempel fyra grupper med två i varje är lika mycket som två grupper med fyra i varje. Läromedlet använder sig av något de kallar talfamiljer vilket bygger på att eleverna inom multiplikation ska lära sig utnyttja att till exempel 3 · 2 och 2 · 3 ger samma produkt. I lärarhandledningen beskrivs den kommutativa lagen som en förkunskap som krävs för att kunna använda effektiva metoder och strategier i matematik.

I lärarhandledningen till *Matematikboken* beskrivs att eleverna ska kunna se multiplikationer kommutativt i rutnät. I elevboken får eleverna arbeta utifrån rektangulära fönster och chokladkakor och uppmanas att se på fönster respektive chokladkakor från två håll, för att därmed upptäcka kommutativiteten. På en bild uttrycker ett barn ”Jag se 5 rader med rutor” och ett annat barn ”Jag ser 2 staplar med rutor” till ett fönster med 5 · 2 rutor (Elevbok 2B, s. 89). I Matematikboken används den kommutativa lagen för att underlätta beräkningar endast i samband med att kommutativa lagen presenteras.

I *Matte Direkt* förklaras den kommutativa lagen genom bilder som till exempel visar tre grupper med två i varje är lika mycket som två grupper med tre i varje. För att eleverna ska lära sig använda kommutativa lagen sammanförs i avsnittet uppgifter som 10 · 4 och 4 · 10. I elevboken finns dessutom multiplikationsuppgifter ur tabeller eleverna inte lärt sig än, men som de bör kunna lösa med hjälp av den kommutativa lagen, eftersom dessa uppgifter hör till tränade tabeller om faktorerna byter plats.

I *Matte Mosaiks* visas de kommutativa lagen genom att ett rutnät vrids. I elevbok 2A finns det en liten text nertill på sidan 14 där det står att genom att eleverna får upptäcka kommutativiteten kan de ”använda kunskaper de redan har som utgångspunkt för nya kunskaper”. I lärarhandledningen förklaras också vikten av att eleverna lär sig använda den kommutativa lagen för att kunna lösa en uppgift på det enklaste sättet.

I *Min Matematik* visas lagen dels genom rutnät och dels genom bilder av ett bestämt antal föremål som grupperats på olika sätt; tre stycken tvåor är lika mycket som två stycken treor. I lärarhandledningen påpekas dock att det är viktigt att eleverna förstår att uttrycken är olika även om svaren är lika. I elevboken får eleverna ta hjälp av den kommutativa lagen eftersom multiplikationskombinationerna ur tabeller som inte presenterats än förekommer. Dessa kombinationer är sådana som skulle höra till den aktuella tabellen om faktorerna bytt plats.

En viktig del i taluppfattningen är att man behärskar och kan tillämpa de grundläggande räknelagarna och en av dessa lagar är den kommutativa lagen för multiplikation (Löwing, 2008, Emanuelsson & Emanuelsson, 1997, McIntosh et al, 1992). Lagen används i första han för att göra delberäkningar i en ordning som underlättar beräkningen (Löwing & Kilborn, 2003). Alla de analyserade läromedlen presenterar den kommutativa lagen för multiplikation och alla använder den också för att göra delberäkningar i en ordning som underlättar beräkningen. *Matematikboken* använder dock endast den kommutativa lagen för att göra delberäkningar i en ordning som underlättar beräkningen i det avsnitt som behandlar den kommutativa lagen. Detta kan tolkas som att de övriga fyra läromedel, som genomgående utmanar eleverna att använda den kommutativa lagen för att underlätta beräkningar, ger eleverna större möjlighet att utveckla den del av taluppfattningen som handlar om att behärska och tillämpa grundläggande räknelagar.

I den analytiska teorin framgår att det kan vara svårt att förstå varför den kommutativa lagen gäller om multiplikation ses som upprepad addition (Anghileri, 2000) samt att användandet av upprepad addition kan hindra eleverna från att upptäcka och börjar använda kommutativiteten (Schliemann et al, 1998). Den tvådimensionella representationen kan därför med fördel användas för att illustrera den kommutativa lagen (McIntosh, 2009). Alla läromedel utom *Matte Direkt* använder en tvådimensionell representation för att illustrera den kommutativa lagen och det kan därför tolkas som att dessa läromedel ger eleverna större möjlighet att förstå, upptäcka och börja använda lagen jämfört med läromedlet *Matte Direkt*.

6.1.4 Hur tydliggörs och används den distributiva lagen för multiplikation i lärarhandledningen och elevboken?

Den distributiva lagen för multiplikation kan visas endera genom en endimensionell representation eller en tvådimensionell representation. Tabell 4 visar om och hur de olika läromedlen visar den distributiva lagen för multiplikation samt om lagen används för att göra uträkningar enklare. Efter tabellen ges kortfattade kommentarer om hur respektive läromedel visar och använder lagen samt hur det kan tolkas utifrån den analytiska teorin.

	Visas genom endimensionell representation	Visas genom tvådimensionell representation	Används för att göra uträkningar enklare
Eldorado	x	x	x
Matematikboken			x
Matte Direkt			
Matte Mosaik		x	x
Min matematik		x	x

Tabell 4. Distributiva lagen för multiplikation i läromedlen

I *Eldorado* visas den distributiva lagen tvådimensionellt när 7:ans och 8:ans tabeller presenteras. Detta görs med hjälp av en kulram med tydligt femtal. Eleverna får med hjälp av kulramen lösa multiplikationerna i 7:ans alternativt 8:ans tabell genom att använda 5:ans och 2:ans eller 3:ans tabeller. Den endimensionella representationen av distributiva lagen presenteras i samband med tabell 9. Här visas tio stycken kort med fyror och under det nio stycken kort med fyror. Till bilden finns en pratbubbla med texten ”10 · 4 = 40 Då är 9 · 4 = 40 - 4” (*Eldorado Elevbok 3B, s. 26*).

I *Matematikboken* visas inte den distributiva lagen. Däremot används den som tankeform i lärarhandledningen när sambandet mellan talen 2, 5 och 7 samt talen 9 och 10 utnyttjas. I elevboken används inte den distributiva lagen.

I *Matte Direkt* visas eller används inte den distributiva lagen.

I *Matte Mosaik* visas den distributiva lagen tvådimensionellt tillsammans med tankeformer, läromedlets ledord, så som till exempel Fem gånger och en gång till. Ledorden används genom hela läromedlet och därmed också den distributiva lagen. Så här står det i lärarhandledningen:

> ”Då kan de upptäcka hur man kan räkna genom att addera bra bitar av multiplikationen, d.v.s. ta de delar som man redan är säker på för att lära sig nya multiplikationer med säker taluppfattning som grund.”
>
> (*Matte Mosaik, Lärarpärm 3*, 4:37-38)

I *Min matematik* visas den distributiva lagen tvådimensionellt i lärarhandledningen i samband med att 7:ans tabell presenteras. I lärarhandledningen beskrivs att 7:ans tabell kan fås ”genom att addera svaren i femmans och tvåans tabeller” (*Min matematik Lärarhandledning 3a*, s. 44). Denna tankeform används i boken när eleverna får fylla i ett schema över 2:ans, 5:ans och 7:ans tabell. Eleverna kan där komma fram till svaret i 7:ans tabell genom att addera svaren i 2:ans och 5:ans tabeller som fyllts i ovanför i schemat.

En viktig del i taluppfattningen är att man behärskar och kan tillämpa de grundläggande räknelagarna och en av dessa lagar är den distributiva lagen för multiplikation. Den distributiva lagen binder ihop addition och multiplikation och är nyckeln till både huvudräkning och skriftlig räkning (Löwing, 2008). En tvådimensionell representation kan med fördel användas även för att illustrera den distributiva lagen för multiplikation (McIntosh, 2009). De tre läromedlen *Eldorado, Matte Mosaik* och *Min matematik* visar den distributiva lagen och binder på så sätt ihop addition och multiplikation. De tre läromedlen använder en tvådimensionell representation för att visa lagen samt använder lagen för att göra uträkningar enklare. I *Matematikboken* visas inte den distributiva lagen men den används för att göra uträkningar enklare och i *Matte Direkt* varken visas eller används lagen. Detta kan tolkas som att de tre läromedlen *Eldorado*, *Matte Mosaik* och *Min matematik* ger eleverna större möjlighet att utveckla sin förmåga behärska och tillämpa den distributiva lagen än de andra två läromedlen, men att *Matematikboken* ger större möjlighet jämfört med *Matte Direkt*.

6.2 Samband och tankeformer

Nedan presenteras hur de olika läromedlen strukturerar inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna.

6.2.1 Hur presenteras multiplikationskombinationerna?

I nedanstående tabell visas hur läromedlen presenterar multiplikationskombinationerna (tabell 5). Efter tabellen kommenteras resultatet och tolkas utifrån den analytiska teorin.

	Som tabeller	**Med multiplikatorn som utgångspunkt**
Eldorado	x *	
Matematikboken	x	
Matte Direkt	x	
Matte Mosaik		x
Min matematik	x **	

* *Eldorado* presenterar multiplikationskombinationerna som tabeller förutom för multiplikation med 0 och 1.
** I *Min matematik* presenteras multiplikation med 0 och 1 inte som tabeller.

Tabell 5. Hur multiplikationskombinationerna presenteras

4 av 5 läromedel presenterar multiplikation som tabeller. Dessa är *Eldorado, Matematikboken, Matte Direkt* och *Min matematik*. McIntosh (2009) menar att det kan vara en pedagogisk nackdel att presentera multiplikationskombinationerna som tabeller eftersom eleverna då inte får samma möjlighet att se samband än om de presenteras utifrån strategier och tankeformer.

Matte Mosaik presenterar multiplikationskombinationerna utifrån ledord, det vill säga tankeformer, som i stort sett helt utgår från multiplikatorn. När till exempel multiplikation med 3 introduceras är det kombinationerna $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $3 \cdot 4$ och så vidare. I elevbok 3B repeteras däremot multiplikationskombinationerna som tabeller. Sättet *Matte Mosaik* presenterar multiplikationskombinationerna tydliggör sambanden mellan multiplikationskombinationerna vilket, enligt McIntosh (2009), är att föredra i utvecklandet av elevers räknefärdigheter.

Om vi endast tittar på hur läromedlen presenterar multiplikationskombinationerna kan det tolkas som att *Matte Mosaik* ger eleverna bättre möjligheter att utveckla sina räknefärdigheter än de övriga läromedlen gör. För att få en tydligare bild om hur strukturen av inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna kan påverka elevernas utveckling av taluppfattning krävs dock en mer djupgående analys än att bara titta på om läromedlen presenterar multiplikationskombinationerna utifrån tabeller eller med multiplikatorn som utgångspunkt.

6.2.2 I vilken ordning presenteras multiplikationskombinationerna?

Den ordning grupperna av multiplikationskombinationer presenteras i de olika läromedlen visas i nedanstående tabell (tabell 6). Talen i tabellen står för den gruppen av multiplikationskombination som presenteras. För alla läromedel utom *Matte Mosaik* innebär gruppen en tabell, till exempel 2:ans tabell. *Matte Mosaik* delar istället in multiplikationskombinationerna i grupper utifrån multiplikatorn. Talet 2 står där för gruppen multiplikationskombinationer med 2 som multiplikator. Efter tabellen kommenteras resultatet och tolkas utifrån den analytiska teorin.

Eldorado	2	10 & 5	4	3 & 6	0	1	7	8	9	
Matematikboken	2	10	1	5	3	4	6	7	8	9
Matte Direkt	2	5	10	3	4	6	7			
Matte Mosaik	10	multiplikationer upp till 5 × 5	0, 1 & 10	2 & 3	4	5	9	6	7	8
Min matematik	2	10	5	3	4	8	6	9	7	0, 1 & 10

Tabell 6. Ordningen multiplikationskombinationerna presenteras

I *Eldorado* presenteras tabellerna var och en för sig med undantag när 10:an och 5:ans samt 3:an och 6:ans tabeller presenteras.

I *Matematikboken* presenteras tabellerna var och en för sig.

I *Matte Direkt* presenteras tabellerna var och en för sig. Multiplikation med talet 0 förekommer inte alls med motiveringen att det är för ”abstrakt och mest används i multiplikationer med större tal” (*Matte Direkt Lärarhandledning 3A,* s.98). Övriga tabeller presenteras inte i årskurs 1-3.

I *Matte Mosaik* presenteras först multiplikation med talet 10, multiplikationer upp till 5 · 5, och sedan multiplikationer med 0, 1 och 10. Efter det inleds arbetet med multiplikationskombinationerna utifrån ledord för multiplikatorn. Innan multiplikation där multiplikatorn är 9 presenteras, presenteras multiplikation där multiplikanden är 9.

Min matematik presenterar inledningsvis tabellerna var och en för sig. Vissa tabeller återkommer när nya introduceras och tabellerna presenteras då samtidigt.

McIntosh (2009) menar att det inte spelar någon roll i vilken ordning multiplikationskombinationerna presenteras. Han påpekar dock att det är en fördel om multiplikationskombinationerna presenteras i en ordning som gör det möjligt för eleverna att utnyttja de samband som finns mellan multiplikationskombinationerna. I alla läromedel vi har analyserat presenteras multiplikationskombinationerna i en ordning som vi anser gör det möjligt att utnyttja sambanden mellan grupperna av multiplikationskombinationer. Det är dock olika hur läromedlen utnyttjar dessa samband vilket presenteras i nästa avsnitt.

6.2.3 Vilka samband mellan grupperna av multiplikationskombinationer förekommer i respektive läromedel och tydliggörs dessa samband?

De samband mellan grupperna av multiplikationskombinationer som presenteras i de olika läromedlen visas i nedanstående tabell (tabell 7). Efter tabellen kommenteras resultatet och tolkas utifrån den analytiska teorin.

Eldorado	5 & 10	2, 4 & 8	3 & 6	2, 5 & 7	3, 5 & 8	9 & 10		
Matematikboken	1 & 2	2 & 4	3 & 6	4 & 8	5 & 10	2, 5 & 7	3, 6 & 9	9 & 10
Matte Direkt	5 & 10							
Matte Mosaik	1, 2, 4 & 8	3, 6 & 9	5 & 10	1, 5 & 6	2, 5 & 7	1, 9 & 10		
Min matematik	2 & 4	4 & 8	3 & 6	3 & 9	2, 5 & 7	5 & 10	9 & 10	

Tabell 7. Samband mellan grupperna av multiplikationskombinationer

Eldorado påvisar tydligt sambanden mellan grupper av multiplikationskombinationer direkt när de introduceras, i såväl lärarhandledning som i elevbok. 5:ans och 10:ans tabell samt 3:ans och 6:ans tabell presenteras samtidigt i syfte att eleverna ska kunna utnyttja sambanden mellan tabellerna.

I lärarhandledningen till *Matematikboken* finns sambanden mellan talen 2 och 5 och 7, 3 och 6 och 9 samt 9 och 10 nämnda men dessa utnyttjas inte i elevboken. Det sambandet som framställs både i lärarhandeldning och i elevbok är det som bygger på dubbelt. Istället för att lyfta fram kopplingar mellan tabeller lyfts kopplingar fram utifrån vilken multiplikator multiplikationskombinationen innehåller. När tabellerna presenteras, till exempel 6:ans tabell, jämförs alltid $1 \cdot 6$ med $2 \cdot 6$, $2 \cdot 6$ med $4 \cdot 6$, $3 \cdot 6$ med $6 \cdot 6$, $4 \cdot 6$ med $8 \cdot 6$, $5 \cdot 6$ med $10 \cdot 6$.

Matte Direkt tydliggör inga samband mellan grupperna av multiplikationskombinationer i elevböckerna men det finns en notering i lärarhandledning 2B (s.106) där det står ”Upptäcker eleverna att man ska ta talet 5 dubbelt så många gånger som talet 10 för att få samma svar?”.

Matte Mosaik påvisar tydligt olika samband mellan grupper av multiplikationskombinationer direkt när de introduceras, i såväl lärarhandledning som i elevbok. Läromedlets ledord förtydligar sambanden mellan multiplikationsgrupper och bygger nya grupper av kombinationer på redan presenterade kombinationer. Ledorden används som rubriker i elevboken för att ständigt påminna eleverna om tankeformerna. I *Matte Mosaik* grupperas multiplikationskombinationerna utifrån multiplikatorn.

Min matematik lyfter fram tydliga kopplingar mellan grupperna av multiplikationskombinationer, både i lärarhandledning och i elevbok. Detta görs dock efter att majoriteten av grupperna redan presenterats.

McIntosh (2009) lyfter fram att matematiken bygger på samband och för att eleverna lättare ska kunna hantera moment inom matematik så måste eleven ges möjligheter att upptäcka dessa samband. Arbetet med att få eleverna att förstå dessa samband menar han därför är en viktig komponent i matematikundervisningen. Det finns stor variation i hur de analyserade läromedlen lyfter fram och tydliggör sambanden mellan grupperna av multiplikationskombinationer, vilket kan tolkas som att de olika läromedlen ger eleverna olika förutsättningar att upptäcka och förstå sambanden. Som tabellen visar lyfter alla läromedel utom *Matte Direkt* fram många samband mellan grupperna av multiplikationskombinationer. Rent kvantitativt skulle det därför kunna tolkas som att dessa fyra läromedel ger eleven bra förutsättningar och ungefär samma förutsättningar att upptäcka samband. Om vi istället går in och tittar på hur sambanden tydliggörs i respektive läromedel, det vill säga ser till kvalitén, kan tolkningen bli mer nyanserad. I *Eldorado, Matte Mosaik och Min matematik* tydliggörs alla eller nästan alla av sambanden i både lärarhandledningen och elevboken. I *Matte Direkt* tydliggörs enbart det enda sambandet i lärarhandledningen. I *Matematikboken* lyfts sambandet dubbelt upp i både lärarhandledning och elevbok medan övriga samband endast tydliggörs i lärarhandledningen. Detta kan tolkas som att de tre läromedlen *Eldorado, Matte Mosaik och Min matematik* därför är mer fördelaktig för eleverna jämfört med *Matematikboken* och ännu mer fördelaktig jämfört med *Matte* Direkt, i arbetet med att få eleverna att upptäcka och förstå sambanden.

Genom att eleverna förstår samband kan de, enligt McIntosh (2009), härleda en multiplikationskombination som de inte direkt kommer ihåg. McIntosh poängterar också att sambanden är viktiga för utvecklingen av elevens räknefärdigheter. Eftersom *Eldorado, Matte Mosaik och Min matematik* tydligare visar samband jämfört med *Matematikboken* och *Matte Direkt*, kan det tolkas som att de tre läromedlen ger eleverna bättre förutsättningar att utveckla sina räknefärdigheter samt att kunna utnyttja strategin att härleda glömda kombinationer.

6.2.4 Vilka tankeformer för varje grupp av multiplikationskombinationer förekommer i respektive läromedel?

På sidan 36 (tabell 8) visas en sammanställning av vilka tankeformer läromedlen presenterar för varje grupp av multiplikationskombinationer. Utifrån tabellen kommenteras resultatet och tolkas utifrån den analytiska teorin.

I läromedlet *Eldorado* presenteras tankeformerna tydligt i lärarhandledningen. I elevboken uppmanas eleven att hitta mönster och samband som gör att de kan upptäcka tankeformer. För multiplikation med talet 2 presenteras tankeformerna

	Eldorado	Matematik-boken	Matte Direkt	Matte Mosaik	Min matematik
Multiplikation med talet 0	•Utnyttja kunskapen om vad multiplikation är	•0 gånger något är alltid 0	- *	•Tänk "stycken"	•Då du multiplicerar ett tal med noll, är svaret alltid noll
Multiplikation med talet 1	•Utnyttja kunskapen om vad multiplikation är	•Upprepad addition	•Det finns en mängd **	•Tänk "stycken"	•Då du multiplicerar ett tal med ett, är svaret lika med talet
Multiplikation med talet 2	•Upprepad addition •Dubbelt	•Upprepad addition •Dubbelt	•Upprepad addition •Dubbelt	•Dubbelt	•Upprepad addition
Multiplikation med talet 3	•Upprepad addition •3:ans tabell är hälften av motsvarande i 6:ans tabell	•Upprepad addition •Dubbelt	•Upprepad addition •Dubbelt och en gång till	•Dubbelt och en gång till	•Upprepad addition
Multiplikation med talet 4	•Jämför med tvåans tabell	•Upprepad addition •Dubbelt	•Upprepad addition •Dubbelt plus dubbelt	•Dubbelt och dubbelt igen	•Upprepad addition •Svaret i 4:ans tabell är alltid dubbelt så stort som svaret i 2:ans tabell
Multiplikation med talet 5	•Upprepad addition •Ta hälften av multiplikation med 10	•Upprepad addition •Dubbelt	•Upprepad addition •Talen slutar på 0 eller 5	•Fem är halva 10	•Upprepad addition •Talen slutar på 0 eller 5
Multiplikation med talet 6	•Upprepad addition •6:ans tabell är dubbelt av motsvarande i 3:ans tabell	•Upprepad addition •Dubbelt •Utnyttjar distributiva lagen	•Upprepad addition	•Fem gånger och en gång till	•Svaret i 6:ans tabell är alltid dubbelt så stort som svaret i 3:ans tabell
Multiplikation med talet 7	•Distributiva lagen genom 5:ans och 2:ans tabeller •Dubbelt •Hälften	•Upprepad addition •Dubbelt •Utnyttjar distributiva lagen	•Upprepad addition	•Fem gånger och två gånger till	•Distributiva lagen genom 5:ans och 2:ans tabeller
Multiplikation med talet 8	•Distributiva lagen genom 5:ans och 3:ans tabeller •Dubbelt motsvarande produkt i 4:ans tabell	•Upprepad addition •Dubbelt •Utnyttjar distributiva lagen	- ***	•Dubbelt, dubbelt och dubbelt igen	•Svaret i 8:ans tabell är alltid dubbelt så stort som svaret i 4:ans tabell
Multiplikation med talet 9	•Distributiva lagen genom 10 gånger minus en mängd	•Upprepad addition •Dubbelt •Distributiva lagen genom 10 gånger minus en mängd	- ***	•Nio, nästan tio	•Svaret i 9:ans tabell är alltid tre gånger så stort som svaret i 3:ans tabell •Distributiva lagen genom 10 gånger minus en mängd
Multiplikation med talet 10	•Upprepad addition	•Upprepad addition •Dubbelt	•Upprepad addition	•Upprepad addition •Tänk "stycken" och använd kommutativa lagen	•Upprepad addition •Då du multiplicerar ett tal med tio skriver du en nolla efter talet •Svaret i 10:ans tabell är alltid dubbelt så stort som svaret i 5:ans tabell

* Multiplikation med talet 0 förekommer inte. **Multiplikation med talet 1 som multiplikator. *** Multiplikation med talen 8 och 9 behandlas inte i åk 1-3.

Tabell 8. Tankeformer för varje grupp av multiplikationskombinationer upprepad addition i form av 2-hopp samt dubbelt. Lärarhandledningen påpekar dock att 2-hopp inte är en lika bra strategi eftersom eleven då måste hålla reda på hur många gånger de adderat två. Vid multiplikation med talet 7 utnyttjas den distributiva lagen och 7:ans tabell delas upp i 5:ans och 2:ans. När tankeformer som bygger på en distributiva lagen används, till exempel vi multiplikation med talet 7, finns den tankeformen även presenterad i elevboken i form av en kulram med tydligt femtal samt utskrivet ”$4 \cdot 7 = 4 \cdot$ __ $+ 4 \cdot$ __ $=$ __ för varje tal som multipliceras med 7. Eleverna får fylla 5 och 2 och sedan svaret. Eleverna uppmuntras också att komma med egna förslag samt att vid multiplikationskombinationer där det är möjligt utnyttja dubbelt och hälften som tankeform.

I *Matematikboken* är de övergripande tankeformerna upprepad addition och dubbelt. Vid tankeformen dubbelt lyfts kopplingar fram utifrån den multiplikator multiplikationskombinationen innehåller. Tankeformen dubbelt utnyttjas i tabellerna 2-10 och visar sambanden mellan multiplikation med talen 1 och 2, 2 och 4, 3 och 6, 4 och 8, samt 5 och 10. När tabellerna presenteras, till exempel 4:ans tabell, jämförs alltså $1 \cdot 4$ med $2 \cdot 4$, $2 \cdot 4$ med $4 \cdot 4$, $3 \cdot 4$ med $6 \cdot 4$, $4 \cdot 4$ med $8 \cdot 4$, $5 \cdot 4$ med $10 \cdot 4$. För att lösa den andra uppgiften skulle eleverna kunna använda sig av den första och tänka dubbelt. Hur man kan utnyttja dubbelt förklaras dock inte i elevboken utan tydliggörs endast i lärarhandledningen Varje tabell delas in i ”Lilla tabellen”, upp till fem gånger, och ”Stora tabellen”, upp till tio gånger. Genom tankeformen dubbelt kan eleverna således utnyttja ”Lilla tabellen” när de lär sig vissa av ”Stora tabellens” multiplikationskombinationer. När tabell 6 introduceras ges förslag på en tankeform som bygger på distributiva lagen.

$7 \cdot 6 = 42 \qquad 5 \cdot 6 = 30 \qquad 2 \cdot 6 = 12$

$30 + 12 = 42$

Denna tankeform presenteras även för tabell 7 och 8. Även här utnyttjas den ”Lilla tabellen” ($5 \cdot 6$ och $2 \cdot 6$) när den ”Stora tabellen” ($7 \cdot 6$) ska läras. De tankeformerna som bygger på den distributiva lagen förekommer bara i lärarhandledningen och utnyttjas inte i elevboken, medan tankeformen dubbelt förkommer både i lärarhandledning och i elevbok.

I *Matte Direkt* är den övergripande tankeformen upprepad addition. I elevboken är det den enda tankeformen eleverna möter. Tankeformerna 2 gånger är dubbelt, 3 gånger är dubbelt och en gång till samt 4 gånger är dubbelt plus dubbelt presenteras i lärarhandledningen.

I *Matte Mosaik* kallas tankeformerna för ledord. Ledorden presenteras inte bara i lärarhandledningen utan används systematiskt i elevboken. I elevboken används ledorden som rubriker för att ständigt påminna eleverna om tankeformerna. Ett tankesätt som presenteras i både lärarhandledning och elevbok är att eleven ska tänka ordet *”stycken”* istället för multiplikationstecknet. Detta utnyttjas framförallt vid multiplikationer med 0, 1 och 10. Om det står $0 \cdot 3$ eller $1 \cdot 3$ kan eleven tänka 0 stycken treor är ingenting och 1 stycken trea är 3. Vid $10 \cdot 3$ kan eleven använda den kommutativa lagen och sen tänka $3 \cdot 10$ som 3 stycken tior är 30. Eleverna har innan arbetet med multiplikation fått träna på att räkna tiohopp i elevboken. Tankeformerna för multiplikation med talen 3, 6, 7 och 9 bygger alla på den distributiva lagen för multiplikation.

I *Min matematik* används de tankformer som presenteras i lärarhandledningen även i elevboken bortsett från tankeformen för tabell nio som bygger på de distributiva lagen. Vissa tankeformer presenteras dock inte förrän andra gången tabellen behandlas.

McIntosh (2009) menar att om en elev kan se och förstå sambanden så har eleven också lättare att hantera olika moment inom matematiken samt lättare att kunna rekonstruera kunskap som eventuellt glömts bort. Arbetet med att lära sig multiplikationskombinationer utifrån samband och strategier kan enligt McIntosh ske på två sätt, dels genom talföljdsräkning och dels genom speciella tankeformer. I alla de analyserade läromedlen förekommer både talföljdsräkning i form av upprepad addition och speciella tankeformer, vilket gör att alla läromedel har potential att lägga upp arbetet kring multiplikationskombinationer utifrån samband och strategier. Hur de olika läromedlen valt att utnyttja talföljdsräkning och tankeformer varierar dock. Löwing (2008) menar att om elever endast lär sig talföljdsräkning, som är en form av upprepad addition, när de lär sig multiplikationskombinationerna kan de få svårt att hantera multiplikation och därmed också få svårt att multiplicera större tal. Detta beroende på att tankeformen talföljdsräkning, eller upprepad addition, inte visar alla egenskaper hos multiplikation, så som kommutativitet och distributivitet. Läromedel som enbart bygger inlärningen av multiplikationskombinationerna utifrån upprepad addition kan därför antas ge eleverna svårigheter att hantera multiplikation. Inget av de analyserade läromedlen använder sig uteslutande av upprepad addition. I läromedlet *Matte Direkt* är dock den övergripande tankeformen upprepad addition vilket skulle kunna utgöra ett hinder för elever att hantera multiplikation. Även i *Matematikboken* har tankeformen upprepad addition en framträdande roll vilket skulle kunna bli ett hinder för eleverna om inte läraren tydligt lyfter fram de tankeformerna som presenteras i lärarhandledningen. I *Eldorado*, *Matte Mosaik* och *Min matematik* tydliggörs utöver upprepad addition flera tankeformer för grupperna av multiplikationskombinationer vilket gör att dessa läromedel kan antas bidra till att elever utvecklar ett sätt att hantera multiplikation.

7. Diskussion

Nedan följer en resultatdiskussion där vi svarar på frågeställningarna samt syftet med vårt arbete. Vi inleder resultatdiskussionen med att återkoppla till vad forskare anser gynna taluppfattning hos elever samt hur vi utifrån det tolkar att ett läromedel bör framställa och strukturera inlärningen av multiplikation för att bidra till elevers taluppfattning. Diskussionen görs sedan läromedel för läromedel för att ge en samlad bild över hur respektive läromedels framställning av räknesättet multiplikation samt strukturering av inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna kan påverka elevers möjlighet att utveckla god taluppfattning. Efter resultatdiskussionen görs en slutdiskussion där vi diskuterar resultatet mer allmänt och kopplar detta till inledningen och avsnittet om läromedel i matematikundervisning. Avslutningsvis ger vi förslag på fortsatt forskning.

7.1 Resultatdiskussion

Läromedel som presenterar både den endimensionella och den tvådimensionella synen på multiplikation bidrar till att elever får uppleva multiplikation på flera sätt och i flera kontexter. Detta torde påverka elevers möjlighet att utveckla god taluppfattning positivt eftersom McIntosh et al (1992) menar att en variation av olika modeller för multiplikation kan bidra till förståelse för att använda räknesättet multiplikation vilket utgör en av taluppfattningens komponenter. En annan viktig del av taluppfattning är förståelsen för och förmågan att använda de grundläggande räknelagarna (Löwing, 2008, Emanuelsson & Emanuelsson, 1997, McIntosh et al, 1992). Läromedel som visar på multiplikationens egenskaper såsom kommutativitet och distributivitet borde därför kunna påverka elevernas möjlighet att utveckla god taluppfattning på ett gynnsamt sätt.

För att utveckla god taluppfattning är det viktigt att elever får möjlighet att se samband mellan tal (Reys & Reys, 1995). Det är också viktigt att eleven lär sig utveckla och använda sig av effektiva strategier för att hantera tal och operationer med tal (McIntosh et al, 1997). Elever med god taluppfattning letar efter samband mellan tal och operationer och tar hjälp av detta för att lösa problem och uppgifter. De väljer också metoder som stämmer överens med den egna förståelsen av sambanden samt strävar efter att använda den mest effektiva metoden att lösa problemen (Reys & Reys, 1995). Läromedel som påvisar samband mellan tal och operationer torde då bidra till att utveckla elevers taluppfattning på ett fördelaktigt sätt.

7.1.1 Eldorado

Eldorados sätt att i lärarhandledningen presentera multiplikation genom att visa den endimensionella synen med hjälp av lika grupper och tallinje samt den tvådimensionella synen med hjälp av rutnät ger lärare goda förutsättningar att beskriva för elever vad multiplikation är för något. I elevböckerna får elever får dock inte möta den endimensionella synen med hjälp av tallinje vilket gör att de är beroende av att läraren tydliggör detta för dem. I *Eldorado* visas tre av fyra situationer multiplikation kan uppträda i. Detta kan bidra till elevers möjlighet att utveckla god taluppfattning eftersom de får uppleva multiplikation på flera sätt och i flera kontexter. *Eldorado* visar den kommutativa lagen genom rutnät som vrids och ses från två håll samt genom bilder som visar att till exempel fyra grupper med två i varje är lika mycket som två grupper med fyra i varje. Detta gör att elever får möta den kommutativa lagen på flera olika sätt vilket torde göra att deras förståelse för lagen ökar. Även arbetet med talfamiljer bör bidra till detta då de på ett systematiskt sätt får se att dessa multiplikationskombinationer får samma produkt oavsett i vilken ordning talen står. Genom att konkretisera den distributiva lagen med hjälp av en kulram samt att förtydliga den både i ord och i bild borde elevers möjlighet att utveckla sin förståelse för lagens användbarhet öka.

I *Eldorado* struktureras inlärningen för de grundläggande multiplikationskombinationerna genom att presentera dessa som tabeller. Tabellerna presenteras var och en för sig med undantag för tabellerna 10 och 5 samt 3 och 6. Dessa tabeller presenteras samtidigt i syfte att elever ska kunna utnyttja sambanden mellan tabellerna. Läromedlet påvisar både sambanden mellan grupper av multiplikationskombinationer och tankeformerna för multiplikationskombinationerna tydligt. Detta bör sannolikt leda till att elever får goda möjligheter att upptäcka och förstå sambanden mellan tal. Eftersom flera tankeformer presenteras för de flesta grupper av multiplikationskombinationer borde sannolikt läromedlet också ge elever goda förutsättningar att utveckla sin taluppfattning samt att kunna använda strategin för att härleda glömda kombinationer samt lära ny kunskap.

Sammanfattningsvis kan sägas att *Eldorado* ger en väl sammansatt bild av multiplikation vilket är en förutsättning för att elever ska utveckla sin förståelse för när och hur räknesättet multiplikation kan användas. Även sättet att strukturera inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna torde ge elever goda möjligheter att utveckla god taluppfattning.

7.1.2 Matematikboken

Matematikboken presenterar den endimensionella synen på multiplikation genom representationen lika grupper samt den tvådimensionella synen på multiplikation. När det gäller situationer presenteras två av fyra. Elever torde genom *Matematikbokens* sätt att framställa multiplikation få möjlighet att utveckla sin taluppfattning men eftersom läromedlet varken innehåller situationen multiplikativ jämförelse eller Cartesian product kan man tänka sig att eleverna får en något begränsad inblick i vilka situationer multiplikation kan uppträda i. *Matematikboken* visar multiplikations egenskaper genom både den kommutativa och den distributiva lagen för multiplikation. Eftersom *Matematikboken* visar den kommutativa lagen genom olika representationsformer kan taluppfattningen gynnas men i och med att lagen endast används för att underlätta beräkningar i de avsnitt lagen presenteras torde elevernas förståelse för lagens användbarhet bli begränsad. Den distributiva lagen visas inte för eleverna men lärarhandledningen ger läraren möjlighet att lära eleverna hur den kan användas i tankeformer vilka underlättar beräkningar. Det är med andra ord helt upp till läraren om eleverna får möjlighet att bekanta sig med den distributiva lagen.

I *Matematikboken* struktureras inlärningen för de grundläggande multiplikationskombinationerna genom att presentera dessa som tabeller som presenteras var och en för sig. Istället för att lyfta fram kopplingar mellan tabeller lyfter läromedlet fram samband utifrån vilken multiplikator multiplikationskombinationen innehåller och det samband som framställs är det som bygger på dubbelt. De övergripande tankeformerna är den som bygger på dubbelt och upprepad addition. Sättet att dela in varje tabell i ”Lilla tabellen”, upp till fem gånger, och ”Stora tabellen”, upp till tio gånger bidrar till att tankeformen dubbelt blir så dominerande. Genom att *Matematikboken* i stort sett bara använde sig av ett samband och två olika tankeformer antar vi att elever som använder läromedlet inte får samma möjlighet att upptäcka och förstå samband mellan tal samt utveckla sin taluppfattning som elever som får möta fler samband och tankeformer.

Sammanfattningsvis kan sägas att *Matematikboken* ger en ganska väl sammansatt bild av multiplikation vilket är en förutsättning för att elever ska utveckla sin förståelse för när och hur räknesättet multiplikation kan användas. Sättet att strukturera inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna kan dock ge elever en begränsad möjlighet att utveckla god taluppfattning eftersom de får möta så pass få samband och tankeformer.

7.1.3 Matte Direkt

Matte Direkts syn att multiplikation är detsamma som upprepad addition gör att den endimensionella synen och situationen lika grupper dominerar sättet räknesättet multiplikation framställs på. Detta gör i sin tur att elever inte får uppleva multiplikation på så många olika sätt eller i olika kontexter vilket kan göra att elevers förståelse för multiplikation inte blir lika utvecklad som elever som använder läromedel som visar fler sätt. Även när det gäller multiplikation och dess egenskaper visas endast den endimensionella representationen. Genom att den kommutativa lagen används i multiplikationsuppgifter ur tabeller eleverna inte lärt sig än får eleverna dock återkommande träna på att använda lagen. I *Matte Direkt* visas eller används inte den distributiva lagen vilket torde göra att eleverna inte får en fullständig bild av multiplikationens egenskaper.

I *Matte Direkt* struktureras inlärningen för de grundläggande multiplikationskombinationerna genom att presentera dessa som tabeller som presenteras var och en för sig. Genom att *Matte Direkt* inte tydliggör några samband mellan grupperna av multiplikationskombinationer för eleverna och endast gör en notering i lärarhandledningen angående sambanden mellan talen 5 och 10 förmodar vi att elever som använder läromedlet inte får samma möjlighet att upptäcka och förstå samband mellan tal som elever som använder läromedel där många samband presenteras. När det gäller tankeformer tydliggörs endast tankeformen upprepad addition i elevboken. Övriga tankeformer presenteras bara i lärarhandledningen vilket gör att eleverna är beroende av att lärarna presenterar dessa tankeformer för att få möta dem. Eftersom det är viktigt att elever lär sig utveckla och använda sig av effektiva strategier för att hantera tal och operationer med tal för att utveckla god taluppfattning torde elever som använder *Matte Direkt* inte få samma möjlighet till detta som elever som får möta fler tankeformer.

Sammanfattningsvis kan sägas att *Matte Direkt* ger en ganska svag bild av multiplikation vilket kan utgöra ett hinder för att elever ska utveckla sin förståelse för när och hur räknesättet multiplikation kan användas. Även sättet att strukturera inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna kan ge elever en begränsad möjlighet att utveckla god taluppfattning eftersom de får möta så pass få samband och tankeformer.

7.1.4 Matte Mosaik

Matte Mosaik sätt att knyta ihop den endimensionella och tvådimensionella synen på multiplikation med hjälp av bilder av talstavar som förs samman till ett rutnät konkretiserar båda sätten att se på multiplikation. *Matte Mosaik* visar alla situationer multiplikation kan uppstå i. Detta gör att elever som använder *Matte Mosaik* får uppleva multiplikation på flera sätt och i flera kontexter vilket torde bidra till att elevernas taluppfattnings utvecklas positivt. *Matte Mosaik* visar inte multiplikationens egenskaper genom de matematiska lagarna på det endimensionella sättet utan bara genom det tvådimensionella sättet. Läromedlet är dock tydligt med att förklara hur den kommutativa lagen kan användas. Den distributiva lagen används kontinuerligt i läromedlets ledord. Läromedlet poängterar också att elever genom att använda sig av ledorden, och därmed den distributiva lagen, kan lära sig nya multiplikationskombinationer genom att addera delar de redan är säkra på. De menar att eleverna då lär sig nya multiplikationskombinationer med säker taluppfattning som grund. Detta innebär att elever torde få en bra förståelse för både den kommutativa och den distributiva lagens användbarhet.

I *Matte Mosaik* struktureras inlärningen för de grundläggande multiplikationskombinationerna genom att multiplikationskombinationerna presenteras utifrån ledord, det vill säga tankeformer, som i stort sett helt utgår från multiplikatorn. Sättet *Matte Mosaik* presenterar multiplikationskombinationerna förtydligar sambanden mellan multiplikationsgrupper och bygger nya grupper av kombinationer på redan presenterade kombinationer. Detta gör att elever som använder *Matte Mosaik* torde få goda möjligheter upptäcka samband mellan tal samt lära sig effektiva strategier för att hantera tal och operationer.

Sammanfattningsvis kan sägas att *Matte Mosaik* ger en väl sammansatt bild av multiplikation vilket är en förutsättning för att elever ska utveckla sin förståelse för när och hur räknesättet multiplikation kan användas. Även sättet att strukturera inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna torde ge elever goda möjligheter att utveckla god taluppfattning.

7.1.2 Min matematik

Min matematik presenterar både den endimensionella, genom lika grupper och tallinje, och den tvådimensionella synen på multiplikation, genom rutnät och rektangulära formationer av föremål. Tallinjen används dock inte för att illustrera en multiplikation utan istället för att göra såkallad ”skutträkning”. I *Min matematik* visas tre av fyra situationer multiplikation kan uppträda i. Multiplikativ jämförelse förekommer bara i lärarhandledningen men eftersom situationen beskrivs ett flertal gånger i sammanhang kring huvudräkning och problemlösning kan vi anta att eleverna får möta situationen genom läraren. Sättet *Min matematik* presenterar multiplikation och visar vilka situationer multiplikation kan uppträda i kan bidra till elevers möjlighet att utveckla god taluppfattning eftersom de får uppleva multiplikation på flera sätt och i flera kontexter. I *Min Matematik* visas den kommutativa lagen både endimensionellt, genom bilder av ett bestämt antal föremål som grupperats på olika sätt, och tvådimensionellt, genom rutnät. Den distributiva lagen visas genom en två dimensionell representation. Båda lagarna används för att förenkla uträkningar. Detta gör att elever som använder läromedlet torde få en god förståelse för hur lagarna kan användas.

I *Min matematik* struktureras inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna genom att dessa presenteras som tabeller vilka inledningsvis presenteras var och en för sig. Då läromedlet presenterar flera tankeformer för de flesta grupper av multiplikationskombinationer kan vi anta att läromedlet också ger elever goda förutsättningar att utveckla sin taluppfattning samt att kunna använda strategin för att härleda glömda kombinationer samt lära ny kunskap.

Sammanfattningsvis kan sägas att *Min matematik* ger en ganska väl sammansatt bild av multiplikation vilket är en förutsättning för att elever ska utveckla sin förståelse för när och hur räknesättet multiplikation kan användas. Sättet att strukturera inlärningen av de grundläggande multiplikationskombinationerna kan ge eleverna goda möjligheter att utveckla taluppfattning eftersom eleverna får möta många samband och tankeformer.

7.2 Slutdiskussion

Inget av läromedlen ger en fullständig bild av multiplikation men det är kanske inte heller något vi kan kräva av ett läromedel för åk 1-3. Tittar man på vad läroplanen och kursplanen i matematik lyfter fram som centralt innehåll för åk 3 så framgår dock att räknesättens egenskaper och användning i olika situationer ska vara en del av undervisningen för år 1-3 (Skolverket, 2010b). Därför borde vi som lärare kunna räkna med att läromedel för åk 1-3 lyfter fram egenskaper hos multiplikation samt olika situationer som multiplikation framträder i på ett mer fullständigt sätt än vad några av de analyserade läromedlen gör.

Ett annat centralt innehåll för åk 1-3 är att undervisningen ska behandla metoder för beräkningar med naturliga tal (Skolverket, 2010b) vilket skulle kunna tolkas som det vi valt att kalla tankeformer. Vi hade därför förväntat oss att tankeformer skulle ha stort utrymme i alla läromedlen men vårt resultat visar att det är en stor variation i hur läromedlen valt att utnyttja tankeformer. Vissa läromedel går i linje med kursplanen och presentera många tankeformer för multiplikationsberäkningar medan det i andra läromedel nästan saknas helt.

I avsnittet Läromedel i matematikundervisning har beskrivits att många elever, föräldrar och lärare förutsätter att en matematikbok används i undervisningen för att säkerställa att eleverna får lära sig alla delar i matematiken som är nödvändiga för den fortsatta skolgången (Johansson, 2006). Vårt resultat visar dock att flera av de läromedel vi analyserat inte lever upp till dessa krav eftersom de inte ens ger alla de nödvändiga delar som behövs inom området multiplikation. Resultatet av vår analys pekar därför delvis på det som beskrivits i rapporten *Undervisning i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet* (Skolinspektionen, 2009) där det framgår att elever endast får undervisning i begränsade delar av ämnet matematik.

Som beskrivits i inledningen framgår av TIMSS (Skolverket, 2008) att läroboken har en mycket stark betydelse i svenska skolor att undervisningen här bygger på läromedel i större utsträckning än andra länder. I Skolverkets nationella kvalitetsgranskning (2003) framgår också att många lärare är av uppfattningen att det krävs en mycket erfaren lärare för att klara av att helt gå ifrån läroboken eller ge läroboken en underordnad roll i undervisningen. Utifrån den här kännedomen borde därför majoriteten av läromedlen göras så heltäckande som möjligt eftersom de med största sannolikhet kommer att bli huvudutgångspunkten i undervisningen i matematik. Vårt resultat pekar dock på, som vi diskuterat i stycket ovan, att flera av läromedlen saknar viktiga moment inom multiplikation och därför inte ens kan räknas som heltäckande inom området multiplikation.

Lärares sätt att undervisa samt hur mycket läromedlet styr undervisningen har naturligtvis stor inverkan på vilka möjligheter elever har att utveckla god taluppfattning. Utifrån vår analys kan vi dock säga att några av läromedlen behöver kompletteras med moment som inte är initierade av läromedlet för att elever ska få bästa möjliga förutsättning att utveckla god taluppfattning. I avsnittet Läromedel i matematikundervisning framgår dock att det är mycket vanligt att lärare låter läromedlet stå för så väl måltolkning, arbetsmetoder och uppgiftsval (Skolverket, 2003) och vi ifrågasätter därför hur troligt det är att läraren kommer att komplettera läromedlet med de moment som saknas. Vi menar självklart inte att ansvaret bör lyftas bort från läraren och läggas på läromedelstillverkarna men utifrån vad vårt resultat visar frågar vi oss om det inte krävs en noggrannare granskning av läromedel i matematik.

Vi avslutar denna diskussion med att återknyta till den fråga vi ställde oss i inledningen nämligen om det är läromedlen som inte ger lärarna och eleverna de stöd de behöver för att eleverna ska lyckas utveckla sina kunskaper i aritmetik och taluppfattning eller om det är så att lärarna inte lyckas förmedla det läromedlen vill nå ut med. Utifrån vårt resultat och vår analys går det inte att säga att det ena eller det andra stämmer generellt för alla de analyserade läromedlen. Vi bedömer att vissa av läromedlen, trots avsaknad av en del moment, i det stora hela ger lärarna och eleverna de stöd de behöver för att eleverna ska lyckas utveckla sina kunskaper inom multiplikation samt bidra till ökad taluppfattning, medan andra läromedel inte ger detta stöd.

7.3 Fortsatt forskning

När vi genomfört analysen samt sammanställt den tidigare forskningen om taluppfattning har vi kommit in på intressanta sidospår som vi var tvungna att släppa. Dessa sidospår ser vi som potentiella områden som skulle kunna forskas vidare på. Ett av dessa sidospår är kopplat till McIntosh et al:s (1997) fyra slutsatser om hur lärare kan hjälpa eleverna att utveckla tankeformer och därmed också hur läraren kan bidra till utveckling av taluppfattning hos eleverna. Dessa handlar om att tydliggöra för eleverna att det är ett värdefullt arbete att utveckla och använda tankeformer, att alltid be eleverna att förklara hur de utfört en huvudräkning, erbjuda flera olika räknemetoder och att läraren själv praktiserar de föregående tre punkterna. Eftersom den dominerande undervisningsformen i matematik är individuellt arbete i läroboken (Skolverket, 2003) skulle man kunna säga att läroboken tar över lärarens roll och därmed också slutsatserna om hur lärare kan hjälpa eleverna att utveckla tankeformer. Det skulle därför vara intressant att analysera hur väl läromedlen uppfyller dessa fyra slutsatser som McIntosh et al lyfter fram som viktiga för att utveckla elevernas taluppfattning. Man skulle också kunna tänka sig att man väljer att fokusera på en av slutsatserna till exempel att läraren alltid bör be eleverna att förklara hur de utfört en huvudräkning och utifrån det undersöka vilket utrymme läromedlet ger eleverna att skriva ner tankesteg eller mellanled i en uträkning.

När vi har gjort vår analys har vi tagit hänsyn till många aspekter av hur multiplikation framställs och hur arbetet med multiplikationskombinationerna strukturerats. Detta har gett en bredd på analysen men till viss del på bekostnad av djupet. Vi har till exempel varit tvungna att avstå från att på djupet analysera hur de olika tankeformerna presenteras och illustreras i respektive läromedel och endast se till vilka tankeformer som förekommer. Vi har dock noterat att det är stor variation på hur tankeformerna presenteras och illustreras och misstänker att det har minst lika stor betydelse som vilka tankeformer som presenteras. Ett annat förslag till vidare forskning är därför att man gör en analys av hur tankeformerna presenteras och illustreras i läromedlen samt genom observation undersöker hur dessa presentationer och illustrationer påverkar elevers möjligheter att förstå och tillämpa tankeformerna.

8. Referenser

Anghileri, J. (2000). *Teaching Number Sense*. London: Continuum.

Brändström, A. (2002). *Granskning av läroböcker i matematik för årskurs 7*. Luleå: Luleå Tekniska universitet.

Brändström, A. (2003). Läroboken – något att fundera på. *Nämnaren, 4*, 21-24.

Emanuelsson, G., Emanuelsson, L. (1997). Taluppfattning i tidiga skolår. *Nämnaren, 2,* 30-33.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as model of situations. I D. Grows (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*. (276-295). New York: Macmillan

Johansson, M. (2006). *Teaching Mathematics with Textbooks. A Classroom and Curricular Perspective*. Luleå: Luleå University of Technology Department of Mathematics.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik – Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur

Löwing, M., Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning – en inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur

Magne, O. (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan*. Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, A. (2009). *Förstå och använda tal – en handbok*. Göteborg: NCM

McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics, 12*, (3), 2-8, 44.

McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E. (1997). Mental computation in the middle grades. *Mathematics teaching in the middle school, 2,* (5), 322-327.

Nobel, A. (1979). *Boken i skolan En analys med särskild inriktning på bibliotekets funktion i grundskolan*. Stockholm: Almqvist & Wiksell International

Nobel, A. (2001). *Hur får kunskap liv? Om konst och eget skapande i undervisning*. Stockholm: Carlsson Bokförlag

Reys, B. J., Reys, R. E. (1995). Perspektiv på Number sense och taluppfattning. *Nämnaren, 1,* 28-33.

Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., Macedo, S., Nicéas, L. (1998). Use of Multiplicative Commutativity by School Children and Street Sellers. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* (4), 422-435.

Skolinspektionen (2009). *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*. Stockholm: Skolinspektionen.

Skolverket (2003). *Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002. Lusten att lära – med fokus på matematik*. Skolverkets rapport 221. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2006). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet Lpo 94*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2008). *TIMSS 2007. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2009). *Kursplan med kommentarer till mål som eleverna lägst ska ha uppnått i slutet av det tredje skolåret i ämnena matematik, svenska och svenska som andraspråk*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2010a). *Rustad att möta framtiden? PISA 2009 om 15-åringars läsförståelse och kunskaper i matematik och naturvetenskap. Resultaten i koncentrat*. Stockholm: Skolverket

Skolverket (2010b). *Del ur Lgr 11: kursplan i matematik i grundskolan*. Stockholm: Skolverket.

Skolöverstyrelsen (1980). *Lgr 80. Läroplan för grundskolan. Allmän del. Mål och riktlinjer, timplaner, kursplaner*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsveteskap*. Lund: Studentlitteratur.