



Malmö högskola

Läraryrket
Natur, miljö, samhälle

Examensarbete

10 poäng

Problemlösning – En jämförelse mellan svensk och japansk undervisning

*Problem solving – A comparison of mathematics teaching
in Sweden and in Japan*

Tomoko Helmertz

Lärarexamen 180 poäng
Matematik och lärande
2007-01-17

Examinator: Tine Wedege

Handledare: Per-Eskil Persson

Sammanfattning

Det senaste decenniet har matematikundervisningen i Japan fått mycket uppmärksamhet för dess annorlunda och unika sätt jämfört med västerländska motsvarigheter. Denna undersökning jämför matematisk problemlösning mellan Sverige och Japan. Tre undersökningsmetoder användes: analys av läromedel, lektionsobservation och elevlösningsanalys. Under de svenska lektionerna arbetar eleverna ofta enskilt med många uppgifter, då de samtidigt lär sig matematiska begrepp och lösningsprocedurer. På det sättet skaffar sig högpresterande elever en självsökande problemlösningsförmåga. Eleverna föredrar att använda konkreta metoder vid problemlösning. De japanska lektionerna däremot fokuserar mest på genomgångar av nytt stoff med ett fåtal problem. Klassdiskussioner om olika lösningsmetoder ger eleverna en djupare bild av problemen. Elever arbetar med algebra i större utsträckning och är vana vid att uttrycka sig på matematiskt korrekt språk. Även om det finns traditionella och kulturella skillnader, kan vi ge varandra olika förslag för att förbättra undervisningarna.

Nyckelord: Japan, jämförande undersökning, klassdiskussion, lesson study, läromedel, matematikundervisning, problemlösning

Abstract

In the last decade, mathematics teaching in Japan has attracted much attention because of its different and unique methods compared with the Western standard. This is a comparative study of mathematical problem-solving in Sweden and Japan, and three research methods were used: textbooks analysis, lesson observations and analysis of students' solutions. Swedish students usually work individually on many problems in the textbooks, while they learn new definitions and procedures to solutions. A highly achieved student has attained a self-seeking attitude, and the students in general prefer concrete methods in their solutions. On the other hand, a Japanese lesson puts mainly focus on new mathematical contents with a few problems. Classroom discussions give students a broader picture of the mathematical connections between the problems. The students are used to more abstract mathematics and are able to use correct terms when explaining. Even though there are traditional and cultural differences, we can learn alternative ideas and perspectives in order to achieve better mathematics teaching.

Keywords: classroom discussion, comparative study, Japan, lesson study, problem solving, mathematics teaching, textbook

Innehållsförteckning

1	Inledning.....	1
2	Syfte och frågeställningar.....	2
3	Teoretisk bakgrund	3
3.1	Matematisk problemlösning i skolan.....	3
3.2	Tidigare internationella undersökningar	6
4	Metod	10
4.1	Urval – en svensk skola och en japansk skola.....	10
4.1.1	Skolan i Sverige.....	10
4.1.2	Skolan i Japan.....	10
4.2	Urval av problem	11
4.3	Datainsamlingsmetoder och procedur	13
4.3.1	Jämförelse av läromedel	13
4.3.2	Lektionsobservation.....	13
4.3.3	Elevundersökning	13
4.4	Databearbetning och tillförlitlighet	13
5	Resultat	15
5.1	Jämförelse av läromedel	15
5.1.1	Svenskt läromedel.....	15
5.1.2	Japanskt läromedel	17
5.2	Lektionsobservation i Sverige.....	19
5.2.1	Lektions disposition och struktur.....	19
5.2.2	Problem, lärarroll och elevaktivitet	20
5.3	Lektionsobservation i Japan.....	20
5.3.1	Lektionsdisposition och struktur.....	20
5.3.2	Problem, lärarroll och elevaktivitet	22
5.4	Elevlösningar av svenska elever i 8:e klass.....	23
5.4.1	Genomförande	23
5.4.2	Analysmodell.....	24
5.4.3	Elevlösningar	25
5.5	Elevlösningar av japanska elever i 8:e klass.....	26
5.5.1	Genomförande	26
5.5.2	Analysmodell.....	27
5.5.3	Elevlösningar	28
5.6	Elevlösningar av svenska elever i 9:e klass.....	29
5.6.1	Genomförande	29
5.6.2	Analysmodell.....	30
5.6.3	Elevlösningar	31
5.7	Elevlösningar av japanska elever i 9:e klass.....	35
5.7.1	Genomförande	35
5.7.2	Analysmodell.....	36
5.7.3	Elevlösningar	37

6	Diskussion och slutsatser	41
6.1	<i>Lektioner och elevlösningar i Sverige</i>	<i>41</i>
6.2	<i>Lektioner och elevlösningar i Japan</i>	<i>43</i>
6.3	<i>Likheter och skillnader av elevlösningar mellan den svenska och den japanska skolan.....</i>	<i>45</i>
6.4	<i>Vad kan vi lära oss av varandra?.....</i>	<i>45</i>
	Referenser	47
	Bilagor	49

1 Inledning

Under de första veckorna jag besökte matematiklektioner i en högstadieskola blev jag förvånad över hur lektionerna gick till. I början av lektionen hade läraren genomgång i en liten stund och sedan arbetade eleverna var och en med sina uppgifter i boken resten av lektionen. En annan lärare hade knappt någon genomgång och eleverna räknade enskilt uppgifterna i läroboken. Jag tänkte då att det var kanske lärarna i denna skola som undervisade på det sättet, men så småningom upptäckte jag att matematikundervisningen såg ut ungefär så i de flesta skolorna i Sverige. Det var som en "tomteverkstad" som svenskarna kallar det. Det fanns knappt någon intressant eller stimulerande guidning från lärarens sida, och jag kunde inte se något bra system i undervisningen för att visa vad matematik egentligen handlar om. Min reaktion på den svenska matematikundervisningen är naturligtvis reflekterad mot min egen skolgång i Japan där jag gick min 16-åriga utbildning. Min syn på olika företeelser i Sverige är alltid i jämförelse med motsvarigheterna i mitt eget hemland, och matematikundervisning är inte något undantag.

Enligt matematikkursplanen i grundskolan är det problemlösning som skall spela en central roll i undervisningen. Ändå är det fortfarande mycket vanligt att eleverna arbetar enskilt med uppgifter i läroboken och det finns inte mycket diskussionsutrymme för matematik i undervisningen i Sverige. Under lärarutbildningens gång har vi studenter lärt oss en mängd intressanta metoder att undervisa i ämnet, och vilken typ av problem man ska hantera i matematiken. Det finns en hel del forskare och lärare på olika lärareutbildningar som uppmuntrar oss lärarstuderande att försöka ändra den negativa traditionen av matematikundervisning, så att ämnet matematik blir mer intressant och spännande för eleverna. Vi måste kunna stimulera elevers lust att lära sig matematik.

Frågan är hur vi skall kunna bryta mönstret i matematikundervisningen. Under hela min utbildning har jag funderat på detta och min kulturella bakgrund måste utnyttjas för att ge ett förslag till förbättring. Olika internationella undersökningar har visat att elever i Japan och andra asiatiska länder är högpresterande i matematik. Det finns naturligtvis olika orsaker till att det är så. Man antar att traditionen och kulturen är en stor anledning till de japanska elevernas fina prestationer i undersökningarna. Undervisningsmetoden måste också ha bidragit till detta och det vore intressant att veta vad som egentligen påverkat det som undersökningarna visar.

2 Syfte och frågeställningar

Hittills finns det inga kvalitativa jämförelsestudier mellan svenska och japanska skolor angående matematikundervisning. Mitt syfte är att undersöka hur en matematikundervisning ser ut i både Sverige och Japan, hur eleverna arbetar med problemlösning i skolan, och hur de löser matematiska problem. Sedan jämförs undervisningar och elevprestationer i de två länderna för att belysa likheter och skillnader. Till sist redogörs vad vi kan lära oss av vardera undervisningssättet.

Mina frågeställningar är:

- Hur arbetar eleverna med problemlösning i matematikundervisningen i Japan respektive i Sverige? Finns det likheter/skillnader mellan arbetssätten i de båda länderna?
- När eleverna löser ett problem, finns det likheter/skillnader i lösningsmetoderna mellan de svenska och japanska eleverna?

3 Teoretisk bakgrund

3.1 Matematisk problemlösning i skolan

Under rubriken "*Ämnets karaktär och uppbyggnad*" i grundskolans kursplan i matematik står det att "problemlösning har alltid haft en central plats i matematikämnet" (Skolverket, 2000). I detta avsnitt undersöker jag hur begreppet problemlösning egentligen betyder och vad som är väsentligt med matematisk problemlösning i skolan.

Ett matematiskt problem är en speciell typ av uppgift som används i matematikundervisning i skolan. Enligt Hagland, Hedrén och Taflin definieras ett problem i skolmatematik som en uppgift som "(1) en person vill eller behöver lösa, (2) personen ifråga inte har en på förhand given procedur för att lösa och (3) det krävs en ansträngning av henne eller honom att lösa" (2005: 27). Detta innebär att ett problem innehar ett relativt begrepp. Ett problem för en elev behöver inte vara ett problem för en annan elev.

Uppfattningen om problemlösning har genom åren förändrats och denna förändring kan beskrivas i tre faser: matematik *för* problemlösning, matematik *om* problemlösning och matematik *genom* problemlösning (Wyndhamn, 1993; Wyndhamn, Riesbeck & Shoultz, 2000). Fram till Lgr 69 betydde uttrycket problemlösning att man löste ett problem med hjälp av de matematiska verktyg man hade lärt sig hantera. Sedan kom Lgr 80, då det undervisades *om* själva problemlösningen och det blev ett eget huvudelement som eleverna skulle erövra (Hagland, et. al., 2005). Problemlösning mekaniserades för att eleverna skulle öva in olika strategier om vissa typer av problem (Wistedt & Johansson, 1991).

Under påverkan av socialkonstruktivismen de senaste decennierna fick problemlösning en annan betydelse i den nuvarande läroplanen. Eleverna skulle arbeta med matematik *genom* problemlösning, och problemlösning blev ett medel att nå matematiskt tänkande (Wyndhamn, et al., 2000). Lösningsprocessen vägde mycket tyngre än själva resultatet. Kommunikationens betydelse lades in i den nya kursplanen eftersom samarbetet elever emellan, eller mellan lärare och elever, betraktades som mer väsentligt under inläringen, vilket ledde till att problemlösning ofta diskuterades i samband med grupparbete (Wyndhamn, et al., 2000). Här var det viktigt för lärare att välja ut och hantera ett rikt problem och att leda klassen på ett sådant sätt, så att eleverna själva funderade och använde sig av sina egna tidigare kunskaper och hittade lösningar med ett eget resonemang (Hagland, et al., 2005). Problemlösning blir sammanfattningsvis ett medel för eleven att nå sitt matematiska tänkande: eleven lär sig "att utveckla matematiska tankar och idéer, inse värdet av det matematiska

symbolspråket, upptäcka samband och ”förstå och kunna använda logiska resonemang”” (Wyndhamn, 2000:47).

Som det uttrycks i ”*Mål att sträva mot*” i grundskolans kursplan, skall eleven utveckla ”sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande”. Vidare skall eleven utveckla ”sin förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik, samt tolka, jämföra och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen” (Skolverket, 2000). Genom dessa förmågor hos eleven kan hon utveckla ”intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer” (Skolverket, 2000). För att nå upp till dessa mål anses problemlösning vara en mycket viktig del i matematikundervisningen.

När man diskuterar problemlösning, är det viktigt att välja ett rikt problem som eleverna kan arbeta med för att kunna förverkliga målen i kursplanen. I skolan hör man ofta att problemlösningssuppgifter är lika med en klurig textuppgift, men en klurig uppgift är inte lika med ett rikt problem. Det finns flera kriterier för att ett problem ska kunna definieras som rikt. Ett av dem är att ett problem ska vara matematiskt rikt (Hagland, et al., 2005). Problemet ska presentera viktiga matematiska begrepp och procedurer som är kända eller okända för eleverna. Dessutom ska problemet kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer, som gör det möjligt för eleverna att använda olika matematiska områden för att lösa ett problem. Problemet ska vara lättförståeligt för alla elever och det ska vara möjligt för samtliga elever att arbeta med problemet oavsett deras prestationsnivå (Hagland, et al., 2005). Eleverna ska uppleva problemet som en utmaning och de ska få tillräckligt med tid att kunna anstränga sig. Minst lika viktigt är att problemet ges ett stort diskussionsutrymme i klassen, så att elever emellan och lärare och elever kan diskutera olika lösningsmetoder.

Enligt Björkqvist (2001) är elevens inre upplevelser en viktig del i gällande problem. Han menar att ett problem ska kännas som elevens eget, annars blir det aldrig ett problem i sann betydelse. Eftersom det är läraren som ger eleverna ”problemen” i skolan, är det viktigt för läraren att utveckla metoder, så att eleverna kan ta problemen till sig som sina egna. Björkqvist (2001) föreslår öppna uppgifter som kan ha fler än ett svar. Detta är naturligtvis för att väcka elevernas funderingar och få dem att resonera kring sin lösning, samt diskutera och argumentera om andras tankesätt. Ett rikt problem gör det möjligt för eleverna att ta det till sig som sitt eget, fundera på och prova olika strategier genom sina kunskaper, och till sist få glädjen av att ha löst det på sitt eget sätt och delat med sig av sitt tankesätt till andra.

Läraryrollen har stor betydelse för hur problemlösning sker i skolan. Haapasalo (refererad i Björkqvist, 2001) presenterar fyra olika nivåer för läraryrollen när det gäller problemlösning. Läraren ska fungera 1) som en *modell* när eleverna inte vet hur man beter sig vid problemlösning, 2) som *stöd* när eleverna har lite vana att arbeta med problemlösning, 3) som *leverantör* av ett problem när eleverna har bra förståelse om problemlösning och 4) som *befrämjare* av kreativt elevarbete för elever som kan variera lösningar på olika sätt och generalisera dem. På grund av elevernas olika förutsättningar i en klass, bör en lärare kunna skifta sina läraryrollnivåer beroende på vilken elev hon pratar med. På detta sätt kan man individualisera undervisningen även om alla elever arbetar med ett gemensamt problem. Det krävs därför av en lärare att hon övar på ett flexibelt förhållningssätt för att kunna skifta roller samt att hon skaffar breda matematikkunskaper för att kunna ta del av varierande elevlösningar (Björkqvist, 2001).

Det finns en mängd strategier och tillvägagångssätt för att arbeta med problemlösning. Polya (1957) sammanfattar strategier i fyra faser: att förstå problemet, att göra upp en plan, att genomföra planen och att se tillbaka på sin lösning. Exempel på effektiva strategier är att söka ett mönster, att konstruera en tabell, att göra upp en lista över alla möjligheter, att rita en teckning, figur eller graf, att gissa och pröva, att arbeta baklänges, att lösa ett enklare och/eller liknande problem och att sätta in konkreta tal (Polya, Larsen, Posamentier & Krulik, refererad i Björkqvist, 2000; Hagland, et al., 2005). Polyas sista fas är minst lika viktig som själva lösningen, och här behövs det sannerligen lärarens assistans. Polya (1957) beskriver hur läraren ställer frågor till eleverna för att de skulle kunna reflektera över och utvärdera sin lösning. Hagland et al. (2005) lägger stor vikt på helklassdiskussion när alla elever har löst problemet, inte bara för att upptäcka andra lösningar, utan också för att reflektera över och utvärdera sin egen lösning och andras. Därmed kan eleverna "utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem" (Skolverket, 2000).

3.2 Tidigare internationella undersökningar

Det har gjorts många jämförelsestudier gällande elevers matematikprestationer och matematikundervisning i olika länder. I detta avsnitt ska jag presentera olika undersökningsresultat från japansk undervisning, och försöka generalisera hur den japanska matematikundervisningen ser ut.

Den mest kända undersökningen som belyser en unik undervisningsmetod i Japan är en rapport av "the 1998-2000 Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) Video Study". Rapportens syfte var att undersöka likheter och skillnader mellan lektionerna i åk 8 i sju länder: Australien, Tjeckien, Hong Kong, Japan, Nederländerna, Schweiz och USA, när det gäller olika pedagogiska kontexter som bl.a. lärarens uppfattning av undervisningen, instruktionsmetoderna och matematikkontexterna. Enligt denna rapport, utmärkte sig japansk matematikundervisning genom sin mycket annorlunda undervisningsmetod jämfört med de andra deltagande länderna.

Enligt denna rapport är det vid japanska lektioner viktigast att presentera nya matematiska kontexter, och eleverna spenderar 60% av lektionen för genomgång av nytt stoff (Hiebert, et al., 1999). Detta är den högsta andelen jämfört med andra länder. I Nederländerna däremot, som har störst likheter med Sverige, spenderar eleverna 32% av lektionstiden för genomgång av nytt stoff. I alla länder förutom Japan och Hong Kong, används lektionstiden betydligt mer för repetition och övning. Ytterligare utmärkande för en japansk lektion är att den skiftar mellan helklassdiskussion och enskilt arbete så ofta som upp till åtta gånger under en lektion. Av de övriga deltagande länderna är det bara Tjeckien som har samma upplägg som Japan (Hiebert, et al., 1999). Under en japansk lektion behandlas ett fåtal problem med ett enda tema, och eleverna spenderar 64% av lektionstiden med de tre genomsnittliga antal problemen (Hiebert, et al., 1999) som eleverna spenderar med. Därmed spenderar de ovanligt lång tid, i genomsnitt 15 minuter per problem. Värt att nämna här är att de flesta japanska lektioner behandlade geometri vid undersökningstillfället, där många undersökande problem och mycket bevisföring förekommer. Detta påverkade naturligtvis resultatet av undersökningen (Hiebert, et al., 1999) och gjorde japanska lektioner betydligt mer annorlunda jämfört med andra länders.

Enligt Minato (2001) finns det tre typer av matematikundervisningar: 1) katederundervisning 2) dialogcentrerad undervisning och 3) diskussionscentrerad undervisning. I en katederundervisning går informationen enkelriktad från lärare till elever. Detta används flitigt i Tyskland (Minato, 2001). I en dialogcentrerad undervisning ställer lärare en fråga och låter eleverna besvara den. Detta ska repeteras under lektionen. Fram till 60-talet

dominerades undervisningsstilen i Japan av dialogcentrerad undervisning. Därefter utvecklade både forskarna och lärarna undervisningsmetoden, och så småningom skapade de en ny stil, diskussionscentrerad undervisning. Detta blev standard i den japanska matematikundervisningen (Minato, 2001). Under japanska lektioner tar man upp sambandet mellan problemen och diskuterar det på ett tydligt sätt. De diskuteras alternativa lösningar mycket oftare än hos de andra länderna. Därefter klargör lärarna för eleverna att de ska välja sina lösningsmetoder själva. I slutet av lektionen summerar lärarna tydligt vilka matematiska egenskaper problemet har behandlat. Vad gäller problemens komplexitet, behandlar japanska lektioner problem med högre matematisk komplexitet än i andra länder. Detta leder till att 89% av presentationen endast görs med matematiskt språk och symboler. En mycket liten andel (9%) utgör presentation av problem som har samband med verkligheten (Hiebert, et al., 1999).

Den japanske lärarens uppfattning om hur en lektion ska hållas är också intressant. En undersökning gjordes för att jämföra japanska och amerikanska lärares uppfattningar om matematikundervisning (Jacobs & Morita, 2002). Där värdesätter japanska lärare inte så mycket repetition, utan de vill ge eleverna mer tid för diskussioner för att utveckla elevernas begreppsbildning. Japanska lärare vill i allmänhet ha ett par välplanerade problem för att presentera ett nytt begrepp, och det ska finnas tillräcklig med tid för eleverna att arbeta och diskutera problemen. Detta möjliggör att eleverna själva utvecklar regler med minimal guidning från läraren. Denna metod kallas "exempelintegration" (e.g., Koizumi, refererad i Winslöv, 2004, översätts av författaren). Genom att presentera ett par serier relaterade problem guidar läraren eleverna i att förstå matematiken som ligger i problemen. Detta görs genom att integrera elevernas idéer och kunskaper maximalt utan att läraren lägger sig för mycket i deras idéer. Lärarens mest väsentliga arbete är att möjliggöra för och hjälpa eleverna att upptäcka matematiska regler och fördjupa sina kunskaper (Winslöv, 2004).

Hiebert och Stigler analyserade resultaten från TIMSS Video Study 1995 närmare och jämförde lärares uppfattningar i USA, Japan och Tyskland. Där visas en enkät om vad lärarna helst vill att eleverna ska lära sig under matematiklektionerna. 73% av de japanska lärarna svarade "tankesätt". Däremot svarade 55% av de tyska och 61% av de amerikanska lärarna "färdigheter" som det viktigaste målet (Hiebert & Stigler, 2000). Denna tendens kan man också se i japanska läromedel. Winslöv (2004) belyste skillnaderna mellan danska och japanska läroböcker avseende andragradsekvation/funktion. Den danska läroboken presenterade definitioner och några procedurer om hur man hanterar andragradsfunktioner, men det fanns ingen ingående förklaring för de definitionerna och procedurerna. Däremot börjar den japanska läroboken med praktiska problem som kan lösas med en

andragradsekvation. Sedan visas lösningen noggrant och fullständigt ett steg i taget, och förklaringen är baserad på elevernas tidigare kunskaper. Stevenson och Stigler (citerad av Ma, 1999) beskriver kinesiska och andra asiatiska matematikläroböcker som inte innehåller någon onödig information för elevernas utveckling av begreppsbildning. Bilderna och illustrationerna används endast i syfte att presentera viktigt stoff under lektionen. Böckerna är tunna och kompakta och omfattar lektionernas huvudinnehåll, som läraren under lektionerna ska utveckla och förse med extra material.

Det verkar som japanska lärare endast har en idealmodell av en lektion. Anledningen till detta är antagligen att japaner har mycket erfarenhet av "Lesson Study", kooperativ kompetensutveckling (översätts av författaren) och har utvecklat sina lektionsmetoder genom åren (Sato, refererad i Jacobs & Morita, 2002). En annan förklaring är att utbildningssystemet i Japan är mycket centraliserat; därför är uppfattningen om en idealektion mer accepterad i hela landet (Jacobs & Morita, 2002).

Det finns flera undersökningar som belyser vad japanska elever är sämre på. Japanska elever saknar flexibilitet (Brenner, et al., 1999). Enligt Dreyfus och Eisenberg (refererad i Brenner, et al., 1999) är flexibilitet, som möjliggör tankar att flytta mellan olika representationer, en viktig egenskap vid kompetent matematiskt tankesätt. I en undersökning visade japanska elever mycket sämre resultat än elever från Kina och Taiwan på representativa frågor, där de skulle välja de rätta svaren på fem olika alternativa lösningar. Andra undersökningar har visat att lösningar av japanska elever koncentreras runt ett par lösningsmetoder. När japanska elever t.ex. gör huvudräkning, ställer de upp räkningen i huvudet precis som när de räknar på pappret och kan inte komma på något annat sätt. (R. E. Reys, et al., refererad i Brenner, et al., 1999)

Ma (1999) har undersökt och analyserat matematikundervisningar och jämfört USA och Kina. Hon hittade fundamentala skillnader både på lärarnas matematikkunskaper och undervisningssätt. Kinesiska lärare hade övervägande högre matematikkunskaper än de amerikanska kollegorna, och de undervisade i ett djupare och grundligare sätt. De amerikanska lärarna däremot fokuserade mest på procedurer om hur man räknar angivna uppgifter. Några kinesiska lärare som intervjuades betraktade matematik som kunskaper i ett "paket" som man inte kan dela i små bitar. Även om man undervisar en liten del i matematiken, kan man inte behandla ett stoff som en isolerad del utan man ska vara medveten om den lilla delens relation till andra matematiska delar. "Paketet" kan variera beroende på lärare och kontexter, men man måste kunna se den lilla delens roll i hela matematiken. Dessutom måste

man känna till tanken och procedurerna bakom pedagogiken. Ma (1999:19) ritar upp ett ”kunskapspaket” som liknar ett spindelnät där alla kunskapsdelarna är sammankopplade.

Elever lär sig bäst när de får lära sig i kontexterna där de tillämpar sina kunskaper (Borko & Putnam, Darling-Hammond, Darling-Hammond & Sykes, Lave, refererad i Hiebert & Stigler, 2000). Denna princip skall också gälla i lärarens pedagogik. Samtidigt finns det en teori som menar att läraren brukar undervisa på det sättet hon har lärt sig i skolan och det därför är viktigt med lärarutbildning (Pehkonen, 2001). Men hur kan man göra när man är sedan länge redan är färdigutbildad och inte har möjlighet att gå tillbaka till skolan? Ma (1999) presenterar de kinesiska lärarnas sätt att lära sig djupare matematik och pedagogik genom sina kolleger. I Kina utvecklar lärarna sina pedagogik- och matematikkunskaper efter att de har blivit lärare. Ma (1999) betonar det viktiga i att lärare fortsätter utveckla sina kunskaper genom hela sitt yrkesliv.

Hiebert och Stigler (2000) rekommenderar japansk kooperativ kompetensutveckling. I Japan måste alla kommunanställda lärare delta i kooperativ kompetensutveckling inom skolan. Lärarna får tillfällen att observera andras lektioner, att samarbeta med kolleger, att studera och reflektera om undervisningarna. Genom att planera och prova lektioner kan lärare utveckla sina kunskaper i ämnet och sin förmåga att undervisa i ämnet. Det viktiga med kooperativ kompetensutveckling är att samtidigt som en lärare delar sin undervisning med andra lärare, engagerar de sig i den sortens inläring som deras elever skall få (Hiebert & Stigler, 2000).

En fördel med kooperativ kompetensutveckling är att man kan ha kompetensutveckling för en aktuell klassrumssituation och utnyttja kollegers kunskaper och reflektioner för att utveckla undervisningen. Den andra fördelen är att man kan lära sig mer generella kunskaper och tekniker genom att arbeta djupt med ett fåtal lektioner (Hiebert & Stigler, 2000). Den tredje är att det finns en stor möjlighet att kooperativ kompetensutveckling sprider sig från en skola till hela kommuner, och att detta kan leda till förändringar av läroinriktningen inom kommunerna. Det blir samarbete i större kretsar, vilket gynnar alla lärare som undervisar (Hiebert & Stigler, 2000).

4 Metod

4.1 Urval – en svensk skola och en japansk skola

För min undersökning valde jag en skola i vardera landet. Jag fick tillstånd från rektorerna och de aktuella lärarna för att använda skolans riktiga namn.

4.1.1 Skolan i Sverige

I Sverige undersökte jag klasser på Mackleanskolan i Skurup, Skåne Län. Skurup är en medelstor kranskommun till Ystad och Malmö och har knappt 15 000 invånare. Tidigare var många sysselsatta i jordbruket men nu har de andra arbeten och många pendlar till Malmö och Ystad. De som är sysselsatta i jordbruket är ca 5% och andelen av invånare med utländsk bakgrund är 8%.

Mackleanskolan är den enda kommunala högstadieskolan i kommunen och har drygt 500 elever. Det finns sju klasser i åk 7 respektive åk 8 och åtta klasser i åk 9. Förutom dessa finns det tre specialklasser. Antalet elever i en klass är ca 25. Ungefär hälften av eleverna pendlar med skolbuss från närliggande byar. Det finns fyra arbetsenheter i skolan, och varje enhet har en egen matematikplanering och använder sig av olika läroböcker. En del enheter och årskurser grupperar eleverna utifrån deras kunskapsnivåer. Lektionstimmarerna är bestämda till 160 minuter per vecka och 88 timmar per läsår.

Jag gjorde lektionsobservation i två klasser: en matematikgrupp i åk 8 och en i åk 9. Förutom de två klasserna gjorde jag en elevundersökning på en parallell klass i åk 9. Åk8-gruppen betraktas som en samling av högpresterande elever. Åk9-klasserna är nästan helklass förutom de lågpresterande eleverna som tillhör en annan grupp. Antal deltagande elever i min elevundersökning är 20 i åk 8 och 41 i åk 9.

4.1.2 Skolan i Japan

Tidigt på våren 2006 skickade jag en förfrågan till tre högstadieskolor i staden Akita i Japan som jag kommer ifrån. Jag fick ett godkännande från rektorn på Akita Izumi Högstadieskola. Han berättade att han själv var fil mag. i matematikdidaktik. Han var mycket intresserad av projektet och ville stödja mitt arbete fullständigt.

Akita ligger i norra delen på Japans huvudö, Honshu. Staden Akita är den största staden i länet och har ca 313 000 invånare, och den 29:e största staden i Japan. Staden har varit känd för risodling, men andelen av fulltidssysselsatta i jordbruket har minskat drastiskt de senaste decennierna. 2.6% av alla förvärvsarbetande är sysselsatta med jordbruk och fiske.

De flesta bönderna har idag också ett annat jobb. Andelen invånare med utländsk bakgrund är 0,4%.

Akita Izumi Högstadieskola är en av de 24 kommunala högstadieskolorna i staden Akita. Det finns också en nationell högstadieskola som tillhör Akita Universitet, och en privat flickskola. De flesta eleverna går i kommunala skolor som är uppdelade enligt bosättningsområde. I Akita Izumi Högstadieskola finns det åtta klasser i åk 7, sex klasser i åk 8 och sju klasser i åk 9 förutom en special klass. Det finns i genomsnitt 35 elever i varje klass. Klasserna är inte indelade enligt elevernas kunskap utan alla klasserna ska vara kunskapsmässigt jämna.

En lektionstid är bestämd till 50 minuter. I ämnet matematik läser eleverna 125 minuter per vecka och 87,5 timmar per läsår. För varje årskurs finns det en gemensam planering gällande matematikundervisning. Jag undersökte två klasser; en åk 8 klass och en åk 9 klass. I Japan delar man sällan klasserna utifrån deras kunskapsnivåer, så i alla klasser finns elever med olika kunskap. Antal elever som deltog i min elevundersökning är 36 i åk 8 och 32 i åk 9.

4.2 Urval av problem

Jag ville låta eleverna arbeta med ett matematiskt rikt problem så att de fick fundera på hur man kan lösa problemet utan att stressa, med andra ord utnyttja alla sina matematiska kunskaper, och upptäcka samtalets effekter tillsammans med kamrater. Jag valde ”Skolvägen”, ett problem med bråk, och ”Tornet”, ett geometriproblem. Båda problemen är använda i olika sammanhang och varianter av många människor, men just dessa varianter av problemen fick jag under kursen "Matematisk problemlösning i skolan 5 p", en distanskurs vid Högskolan Dalarna. Liknande problem kan man hitta i *Rika matematiska problem* av Hagland, et. al. (2005:85;139). Jag tyckte att dessa problem var mycket roliga och spännande och att det skulle bli en stor utmaning för högstadieeleverna. Problemen kan också lösas på många olika sätt, så de skulle vara lämpliga problem även vid jämförelsestudier mellan olika länder.

Problemet ”Skolvägen” använde jag för elever i åk 8. Jag tänkte att det kunde vara svårt för eleverna åk 8, men jag var nyfiken på hur eleverna skulle tackla med problemet. Vid det första ögonblicket ser problemet mycket enkelt ut, men man inser snart att det inte är så enkelt som man trott. Svårigheten ligger i att Annas och Benjamins skolvägar inte är lika långa. Nyckeln är att man utgår ifrån deras gemensamma vägar, bussvägen.

Skolvägen

Anna och Benjamin går i samma skola men bor olika långt från skolan. Båda cyklar till samma busshållplats. När Anna står och väntar på bussen, har hon cyklat $\frac{4}{7}$ av hela sin skolväg. Benjamin har, när han kommer till busshållplatsen, cyklat $\frac{3}{5}$ av hela sin skolväg.

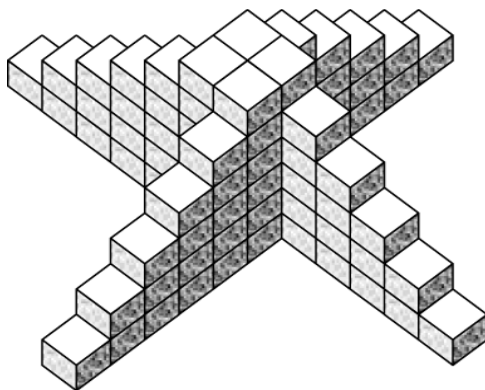
- a) Vem av dem har längst väg till skolan?
- b) Hur mycket längre är den vägen än den andras väg?

(Från kursen "Matematisk problemlösning i skolan 5p" Högskolan Dalarna)

Problemet "Tornet" som eleverna i åk 9 löste ser ut som nedan:

Tornet

- a) Hur många kuber behövs det för att bygga tornet på bilden?



- b) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är 12 kuber högt?
- c) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är 100 kuber högt?
- d) Finns det en regel för att räkna ut antal kuber i alla liknande torn? Kan man teckna regeln för antal kuber för att bygga ett liknande torn som är n kuber högt?

(Från kursen "Matematisk problemlösning i skolan 5p" Högskolan Dalarna)

Det som kontrolleras med detta problem är 1) hur eleverna ser figuren och hur de räknar antalet kuber 2) om eleverna kan upptäcka ett mönster och sedan förklara detta med ord och/eller hitta ett algebraiskt uttryck för att räkna antal kuber. Uttrycken kommer att variera beroende på hur man ser på tornets uppbyggnad. Man kan se elevers förmåga att koppla en verklig figur till algebra.

4.3 *Datainsamlingsmetoder och procedur*

4.3.1 Jämförelse av läromedel

Det är viktigt att undersöka hur läromedel ser ut och vilka problem läromedlen behandlar, eftersom lärare brukar följa ett läromedel. Två matematikläroböcker från Sverige respektive Japan undersöks och jämförs.

4.3.2 Lektionsobservation

Ett par serier lektioner i fyra klasser observeras. Jag fick tillåtelse för ljudupptagning under lektionerna både i Sverige och i Japan. Syftet med lektionsobservationer är att reda ut:

- lektionernas disposition och struktur
- vilka problem som tas upp under lektionstiden och hur problemen hanteras
- lärarens roll och elevaktiviteten

Vid observationerna användes ett observationsprotokoll som presenterades i Jacobs och Morita (2002: 158). (Bilaga 1)

4.3.3 Elevundersökning

Eleverna i åk 8 löste problemet ”Skolvägen” och eleverna i åk 9 problemet ”Tornet”. Eleverna skulle först arbeta enskilt, och sedan i par eller i grupper. De fick hjälp av sina lärare om det behövdes. Eleverna redovisade individuellt sina lösningar skriftligt och sedan samlades de in i slutet av lektionen. De fick också ”kladdpapper” som också samlades in för analys. I slutet av lektionen fick några elever redovisa sina lösningar muntligt inför kamraterna. Jag fick tillåtelse för inspelning på ljudfil under lektionerna.

4.4 *Databearbetning och tillförlitlighet*

För att analysera elevlösningar systematiskt, använde jag mig av en analysmodell som användes under kursen ”Matematisk problemlösning i skolan 5p” i Högskolan Dalarna. (Bilaga 2) Modellen består av tre tabeller. Den första tabellen analyserar elevaktivitet, den andra om de matematiska uttrycksformer som eleverna använt, och den sista om vilka matematiska idéer som eleverna använt i sina lösningar. Här behövs det förklaringar om olika begrepp som förekommer i analysmodellen. (Förklaringarna är modifierade från en

stordia av Taflins föreläsning 2 "*Problemlösning, matematiska idéer och uttrycksformer*".) När jag har fyllt i alla dessa tabeller, analyserade jag noggrant elevernas lösningar och kategoriserade dem.

Matematiska uttrycksformer

- Konkret: en prematematisk modell där lösningen utförs eller visas med material eller skissade figurer
- Logisk/språklig: en språklig retorisk lösning med skrivna texter eller muntligt, utan matematiska symboler
- Algebraisk/aritmetisk: en lösning med matematiska symboler, siffror och bokstäver
- Grafisk/geometrisk: en lösning med bild, tabeller, koordinatsystem, matriser och symboler

Matematiska idéer

- Begrepp: bestående av term, definition och illustration.
- Procedur: det sätt på vilket man utför beräkningar.
- Strategier: metoder att lösa problem.
- Formler/regler: t.ex. konjugatregeln och formeln för rektangelns area.
- Konventioner: som gäller både språk och symboler t ex. a) hur symboler används, t.ex. + för att addera och x för att beteckna en obekant.

Jag är väl medveten om att tillförlitligheten när det gäller denna undersökning kan diskuteras. Det är omöjligt att generalisera hur undervisningen går till i de två länderna efter en enda undersökning, men jag har under hela mitt projekt försökt att vara så neutral som möjligt och tagit upp både positiva och negativa moment. Valet av de jämförda skolorna visade sig ha många gemensamma saker. I mitt arbete använder jag flera metoder, kvantitativa och kvalitativa, för att undersöka samma sak ur olika synvinklar. Det är också av stor vikt att jag har en bakgrund med mycket erfarenhet från den japanska skolan, och nu även med insikt i den svenska.

5 Resultat

5.1 Jämförelse av läromedel

5.1.1 Svenskt läromedel

Den svenska läroboken som jag undersökte heter "*Möte med matte C*" (Skoogh, et al., 2001) och "*Möte med matte D*" (Skoogh, et al., 2001). C är för höstterminen i åk 8 och D för vårterminen. *Tabell 1* visar alla kapitel i böckerna och dess innehåll samt sidor som används för kapitlet.

Kapitel	Titel	Innehåll (exempel)	Använda sidor
1	Små och stora tal	Stora tal, potensform, decimalform, negativa tal, potensform med negativ exponent	45
2	Runt om eller tvärsöver	Cirkels omkrets, vinkelsumma av triangel skala, likformighets begreppet	37
3	Procent och bråk med problem	Samband mellan bråk-, procent- och decimalform Procentsats och procentuell ökning	39
4	Världen i siffror	Tabeller och diagram statistik, medelvärde och median	41
5	Matematiska samband	Funktionsbegreppet, Koordinatsystem Mönster, formler och proportionalitet Hastighetsproblem	47
6	Cirklars area och kroppars volym	Cirkels area och kroppars volym Volymenheter och beräkning med formler	39
7	Matematikens ABC	Att teckna och förenkla algebraiska uttryck Ekvationslösningar med olika metoder Algebraiska uttryck med parenteser	47
8	Tur i spel	Sannolikhetsbegreppet Sannolikheten för olika utfall vid tärningskast Relativ frekvens och olikformig sannolikhetsfördelning	29
			Total 324

Tabell1. Svensk lärobok för åk 8 "Möte med matte C" (kapitel 1-4) & "D" (kapitel 5-8), 2001

Upplägget av boken är 1) basdelen som alla elever ska arbeta med, 2) diagnosen som alla ska göra, 3) om det inte har gått bra på diagnosen arbetar man på Kanal 1 som är en repetition av basdelen och 4) om diagnosen har gått bra går man vidare till Kanal 2 där finns svåra uppgifter med nya begrepp och högre matematiskt innehåll. Totala antalet uppgifter är

ca 140 per kapitel för dem som jobbar med Kanal 1 och ca 160 för kanal 2, förutom diagnoser och 2-sidiga repetitionsuppgifter i slutet av kapitalet.

Det finns många serier av uppgifter i en sammanhängande situation på ett par sidor. Uppgifterna i basdelen har för avsikt att eleverna ska förstå innebörden av begreppen medan de löser problemen. Man får intrycket av att det matematiska innehållet i vissa kapitel hoppar från det ena till det andra med två, tre sidors intervall. Titeln på varje kapitel visar att man försöker undvika matematiska uttryck såsom geometri, statistik eller sannolikhet. Istället används t.ex. "runt om", "världen i siffror" eller "tur i spel". Detta är antagligen med avsikt för att göra matematik mer vardagsnära.

Här visas två sidor om likformighet i "*Möte med Matte C*" (Skoogh, et al., 2001).

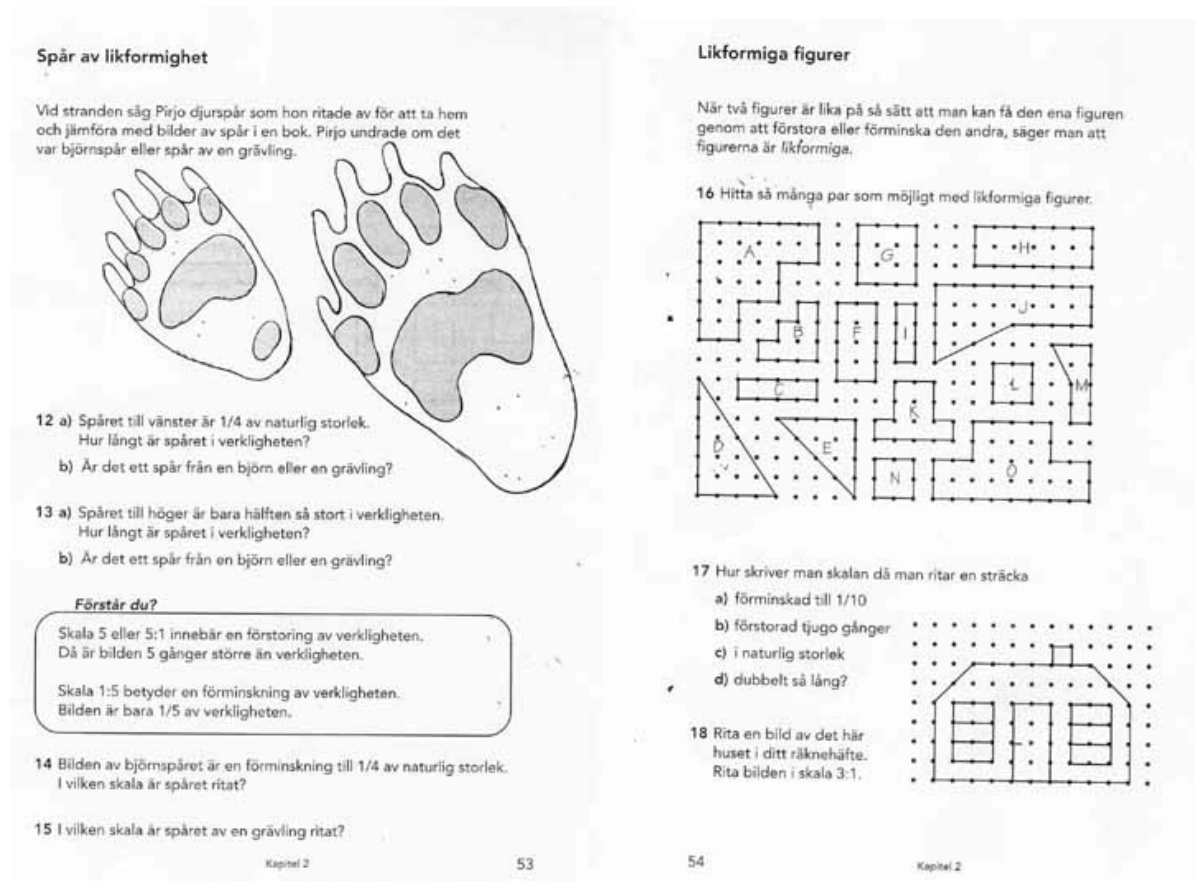


Bild 1. Likformighet i svensk lärobok

På den vänstra sidan presenterar boken likformighet i samband med skala så att eleverna upptäcker att ritningar/kartor med olika skalor är likformiga. På nästa sida kan eleverna fortsätta med att hitta likformiga figurer och att rita förstordad/förminskad bild med en viss skala. De uppgifterna är i för sig intressanta, men man ser inte någon tydlig koppling mellan

uppgifterna. Man lär sig vad 5:1 betyder i skala, men det finns ingen diskussion om vad likformighet är och vilka villkor en figur måste fylla för att vara likformig.

5.1.2 Japanskt läromedel

Den japanska läroboken som jag undersökte heter ”*Chugaku Sugaku 2*” (Högstadiematematik 2). Det är kommunen som bestämmer vilka läromedel skolan skall använda och denna bok används i alla högstadieskolor i staden Akita.

Kapitel	Titel	Innehåll (exempel)	Använda sidor
1	Algebra och aritmetik	Olika algebraiska beräkningar och tillämpningar ex. $ax + bx = (a + b)x$, $4x^2y = 4 \times x \times x \times y$, inverterat tal, $a : b = c : d \Rightarrow ad = bc$	24
2	Ekvationssystem	Två olika sätt att lösa ekvationssystem Tillämpning av ekvationssystem	19
3	Linjär funktion	Vad är linjär funktion? Ritning av funktionen Samband mellan funktion och ekvation	30
4	Parallella linjer och likheter	Parallella linjer och vinklar Vinkelsummor av olika figurer Villkor för kongruens Likheter och bevis	32
5	Trianglar, fyrkanter och cirklar	Egenskaper av likbent triangel Rätvinklig triangel och kongruens Parallelogram och olika fyrkanter Periferivinklar och medelpunktsvinklar	33
6	Sannolikhet	Hur man räknar sannolikhet	20
			Total 191

Tabell 2. Japansk lärobok för år 8 ”*Chugaku Sugaku 2*”, 2001

Boken är i färgtryck och har många bilder som används för uppgifterna, eller för bättre förståelse av uppgifterna. Man märker att större delen av boken innehåller förklaringar av matematiska begrepp och lösningsmetoder. Ca en fjärdedel av boken handlar om olika uppgifter som eleverna skall öva på. Antalet övningsuppgifter är i genomsnitt 35 per kapitel. I slutet av varje kapitel finns också 2-sidiga samlade uppgifter. Små övningsuppgifter är invävd med förklaringar och begreppsdefinitioner i hela avsnittet. Alla förklaringar och definitioner är nya

saker som eleverna skall lära sig för första gången. Oftast är de byggda på vad eleverna har lärt sig tidigare. Det innebär att det inte finns någon repetition från de tidigare åren.

Innehållet i boken är fullt av svårare matematiska begrepp, t.ex. linjär funktion eller kongruens. Boken kan delas upp i tre stora delar: 1) algebra och funktion, 2) geometri och 3) sannolikhet i en liten skala. I algebra och funktion lär man sig först tekniken att teckna algebraiska uttryck, och teckna och lösa ekvationer. Sedan lär man sig linjär funktion, följt av sambandet mellan ekvation och funktion. Tillämpningen av vardagsnära problem är speciellt stort i avsnittet ekvationssystem. De handlar exempelvis om pris, sträcka och hastighet, och procent. I geometrin kan man se många begrepp, regler och satser. I åk 8 behandlas kongruens i stor utsträckning genom kongruensvillkor som vinklar, korsande linjer och parallella linjer. Bevisföring spelar en viktig roll i hela geometriavsnittet.

De problemtyper som behandlas i boken är till den största delen slutna uppgifter som har ett eller ett par svar. Varje avsnitt börjar med ett undersökande problem med en bild, och fortsätter med en förklaring på lösningen. Det kan vara vardagsrelaterande eller rent matematiska problem. Helt öppna problem som kan ha många olika lösningar förekommer inte i boken.

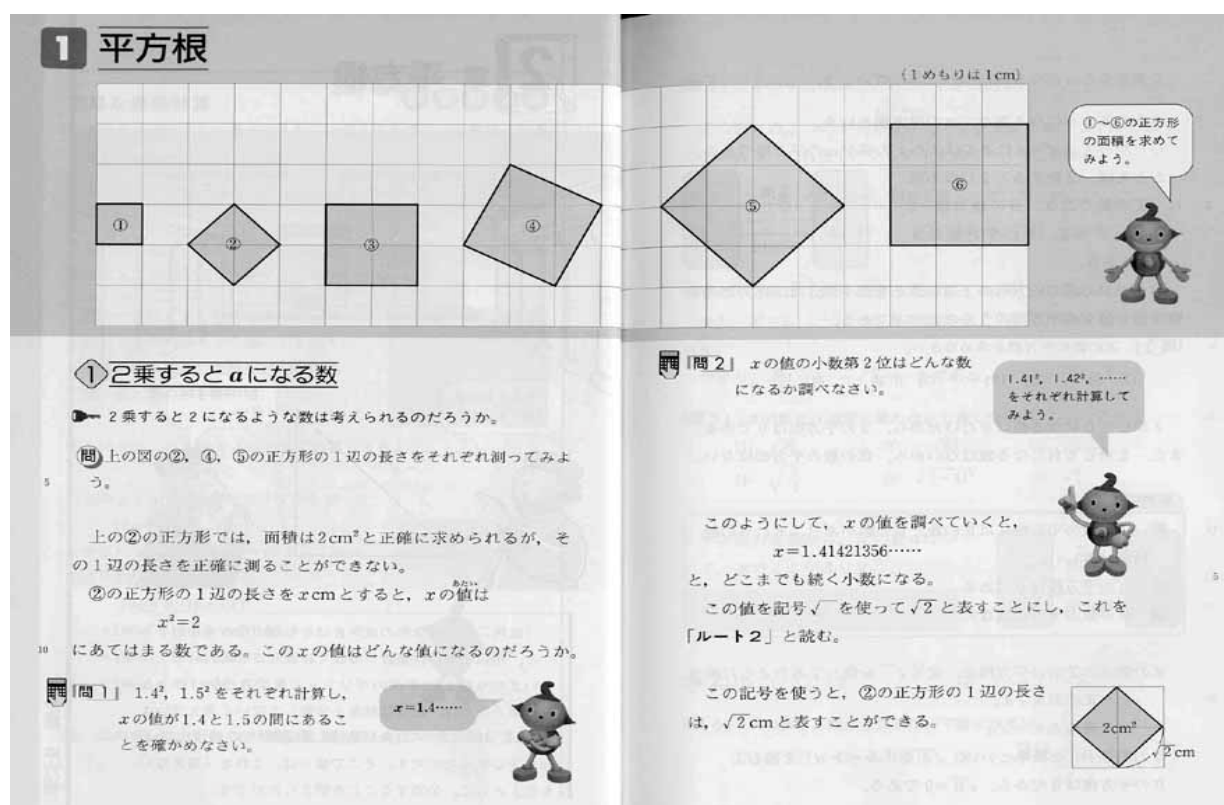


Bild 2. Kvadratroten i japansk lärobok

Två sidor från den japanska boken angående kvadratroten i åk 9 visas i *Bild 2*. Eleverna lär sig kvadratroten för första gången i detta avsnitt. Först räknar man ut areor på de sex kvadraterna och jämför dem i synnerhet sidolängderna. Sedan förklarar boken att man kan räkna ut arean av kvadraten nr 2 exakt (arean är 2 cm^2), men man kan inte räkna längden av en sida exakt. Boken ställer en fråga: vad det är för tal i kvadrat som blir 2. Boken uppmuntrar eleverna att använda miniräknare, för att kontrollera om det sökta talet finns mellan 1,4 och 1,5. Sedan förklarar boken att talet är ett oändligt tal och att vi skall uttrycka talet som $\sqrt{2}$ som uttalas som "ruuto 2". Till sist sammanfattar boken att kvadraten som är 2 cm^2 har sidan som är $\sqrt{2} \text{ cm}$ lång. På nästa sida förklaras det vidare om samband mellan kvadrattal och kvadratroten.

5.2 Lektionsobservation i Sverige

5.2.1 Lektions disposition och struktur

Jag gjorde lektionsobservationer under fyra lektioner, två lektioner vardera i två klasser. De två lärarna som jag gjorde observationerna med har lite annorlunda upplägg på sina lektioner. Den ena läraren brukar ha matematiklektioner ungefär som i *Tabell 3*.

Segment	Längd (min)	Beskrivning (problem, lärarroll, elevaktivitet, etc.)
1	2 ~ 3	Hälsning Kontroll av närvaro Praktiska information
2	10 ~ 18	Genomgång av lärare Lärare tar upp några problem och förklarar lösningar på tavlan
3	24 ~ 33	Elevernas enskilda arbete Lärare går runt och hjälper eleverna Elever räcker upp handen för hjälp
Total	45 (genomsnittlig lektionstid)	

Tabell 3. Exempel på lektionsdisposition i Sverige

Den andra läraren började sin lektion med en test på 7:ans multiplikationstabell. Hon brukade ge ett "klurigt" problem i slutet av 70-minuterslånga lektioner. Hon utnyttjade ibland den

långa lektionen för att arbeta med laborationer. Antalet segment i en lektion är få jämfört med de japanska lektionerna. Den största delen av lektionerna är elevernas enskilda arbete.

5.2.2 Problem, lärarroll och elevaktivitet

Problemen som eleverna arbetade med var från läroboken. De flesta uppgifterna i den första delen av avsnittet var ett rent beräkningsproblem, men vg- och mvh-uppgifterna kan vara av mera undersökande karaktär. Det verkade som det var viktigt för eleverna att räkna så många uppgifter som möjligt, så att man skulle bli färdig till diagnosen eller provet. De hade inte tid att "undersöka" de intressanta uppgifterna.

I genomgången gav lärarna exempel på typiska problem i läroboken eller problem som eleverna hade svårt med. Alla elever, oavsett var de befann sig i boken, var mycket uppmärksamma under lärarens genomgång, men jag såg inte någon elev som antecknade vad lärarna skrev upp på tavlan. De var överlag aktiva att räckte upp handen, inte bara när de svarade på lärarens frågor, utan också när de inte riktigt förstod vad läraren menade. Ibland blev det bra diskussioner mellan lärare och elever, eller mellan eleverna.

Eleverna räknade olika uppgifter i boken beroende på hur långt de hade kommit. En del arbetade med 2, 3 kapitel före, andra höll på med det förra kapitalet. Detta innebär att läraren inte vet om hennes genomgång passar in precis på vad varje elev sysslar med just då. Många elever ville ha hjälp. Lärarna ville hjälpa så många elever som möjligt, men det tog tid att förklara för var och en. Jag såg att det var vanligt för vissa elever att titta i facit när de hade kört fast. Med hjälp av de rätta svaren tänkte de sedan på lösningen.

Under lektionerna hände det aldrig att eleverna gick fram till tavlan och redovisade sina lösningar. Inget sades om dagens mål eller summering av problem under lektionens gång.

5.3 Lektionsobservation i Japan

5.3.1 Lektionsdisposition och struktur

Jag gjorde lektionsobservationer under sex lektioner, tre lektioner i vardera två klasser. Det finns många segment i en japansk lektion (se *tabell 4*), men man kan gruppera segment 2-4 och 5-7 som ett flöde. Först presenterar läraren dagens problem genom att skriva dem på tavlan, och sedan förklarar han lösningarna ett steg i taget. Om problemtypen har behandlats tidigare, ber läraren en eller fler elever att svara hur de löser problemet. Här är

varje steg av proceduren viktig och ingen elev hoppar över något av stegen. När de går igenom lösningarna, arbetar eleverna med liknande problem i ca 10 minuter. Läraren ber ett par elever att skriva sina lösningar på tavlan medan andra arbetar. Sedan stoppar läraren elevernas arbete och kontrollerar lösningarna på tavlan. Alla genomgångar på tavlan skrev eleverna ordentligt av i sina anteckningsblock. Ett flöde repeteras 2-3 gånger under hela lektionen beroende på innehållets svårighetsgrad.

Segment	Längd (min)	Beskrivning
1	2	Hälsning Kontroll av närvaro
2	5 ~ 8	Presentation av dagens uppgifter A (med eventuellt syfte på dem) Läraren går igenom lösningsmetoder
3	7 ~ 10	Övning på liknande uppgifter (elevernas enskilda arbete) Läraren går runt, kontrollerar och hjälper eleverna Läraren ber några elever att skriva lösningarna på tavlan
4	3	Kontroll av elevlösningar på tavlan Läraren kommenterar och visar vad som är viktigt med lösningarna
5	3 ~10	Presentation av dagens uppgifter B (med eller utan genomgång)
6	7 ~ 12	Övning på andra uppgifter (elevernas enskilda arbete) Läraren går runt, kontrollerar och hjälper eleverna Läraren ber några elever att skriva lösningarna på tavlan
7	3	Kontroll av elevlösningarna på tavlan Läraren kommenterar
8	0 ~8	En omgång till 6 (elevers övning) och 7 (kontroll på tavlan)
8/9	3	Utvärdering av dagens lektion Hälsning
total	50	

Tabell 4. Exempel på lektionsdisposition i Japan

I Akita Izumi Högstadieskola finns det en välorganiserad gemensam planering för matematiklektionerna. Lärarna i skolan använder ”en stencil-metod” som används flitigt i de flesta högstadieskolor i Akita. Stencilerna har utvecklats av lärarna i skolan genom åren. En stencil anses som en välorganiserad lektionsplan och alla matematiklärare använder en stencil per lektion. Det finns exempelvis nio stencil (= nio lektioner) på avsnittet kvadratrot, som ska presenteras innan elever ska göra en diagnos, som är kapitlets avslutning. En stencil består av dagens syfte, dagens uppgifter med lösningar, dagens viktiga stoff, flera uppgifter och hänvisning till fler uppgifter i läroboken och övningsboken (Bilaga 3). Fördelar med

stencil-metoden är att man med ett tydligt syfte kan fokusera på vad som är viktigt med dagens lektion och att lektionerna blir likvärdiga i alla klasser.

5.3.2 Problem, lärarroll och elevaktivitet

När jag gjorde lektionsobservationer, arbetade åk 8 med ekvationssystem och åk 9 med kvadratroter. Aktiviteterna var koncentrerade på aritmetiska och algebraiska beräkningar. Sedan den fysiska tiden för matematiklektionerna minskade drastiskt 2001, har lärarna inte haft tid med mer undersökande typer av problem.

De uppgifter som användes under vanliga lektionerna var i och för sig inte så intressanta att arbeta med, eftersom syftet var att lära sig metoder att hantera tal. Men trots det blev det ändå mycket intressant tack vare lärarens logiska förklaring. Ofta behandlade hela lektionen ett enda tema och lärarna presenterade mer än en metod om det fanns flera. De kommenterade ofta relationen mellan uppgifterna och viktigt stoff som de redan lärt ut och som var användbart. Man fick intrycket av att lärarna strävade efter effektiva lösningar. Detta var också en viktig del i de japanska lektionerna. Lärarna förklarade olika lösningar och sa till eleverna att själva tänka ut vilket sätt som var bäst. De berättade ofta dagens mål för lektionen och summerade det viktiga i slutet av varje lektion.



Bild 3. En lektion med kvadratroter i åk 9 Tre elever skulle skriva sina lösningar på tavlan

Det genomsnittliga antalet uppgifter som diskuterades i klassen var knappt 10. Men vid en lektion om ekvationssystem behandlades det bara fyra räkneuppgifter under hela lektionen. Två av dem diskuterades i 37 minuter, speciellt två olika sätt att lösa ett ekvationssystem.

Segmentet 3 och 6 i *tabell 4* visar elevernas övningar. Här arbetar alla elever med 2-3 gemensamma räkneuppgifter. För de som blir färdiga med dem, finns det anvisningar till extrauppgifter i läroboken. Dessutom finns en gemensam övningsbok för alla i skolan. Eleverna skulle arbeta med likadana eller lite svårare uppgifter som lärare hade gått igenom precis innan. På detta vis, förstärkte eleverna just de momenten.

Redovisningen av lösningarna gjordes ofta av eleverna själva. De fick skriva dem på tavlan och samtidigt redovisa dem muntligt. Oftast var deras muntliga redovisningar ordentliga och korrekta matematiskt. Däremot räckte eleverna nästan aldrig upp handen om inte läraren ställde frågor. När jag gick runt och kontrollerade om alla elever verkligen klarade av att följa lektionen, såg jag att väldigt få i klassen inte förstod hur de skulle räkna.

5.4 Elevlösningar av svenska elever i 8:e klass

5.4.1 Genomförande

Denna undersökning genomfördes den 28 september 2006. Jag började lektionen med att rita *Bild 4*, på tavlan och förklarade problemsituationen.

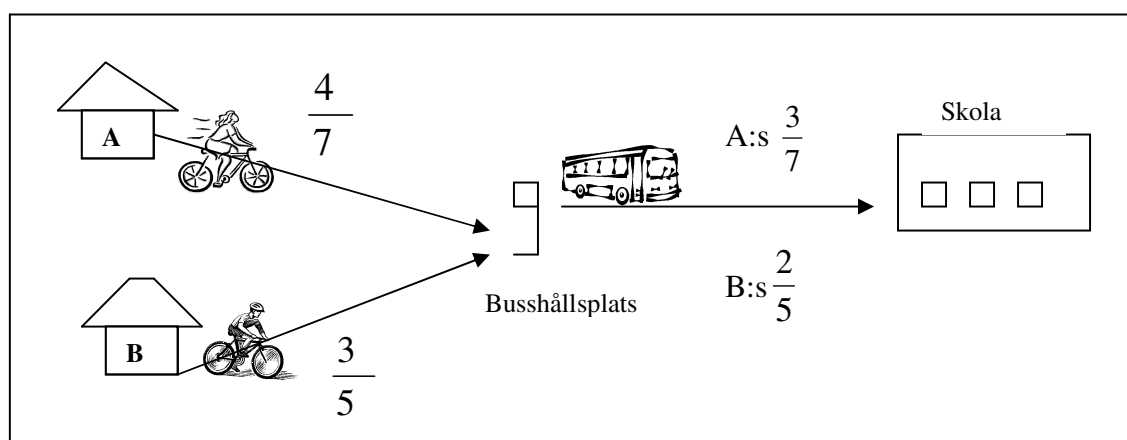


Bild 4. Skolvägen

Jag instruerade eleverna att de skulle arbeta enskild först, men de satte igång och arbetade i par från början. Många frågade mig flitigt och hade sina funderingar, t ex trodde en pojke att detta var en lurig uppgift eftersom ”deras hela vägar kan man skriva som $\frac{7}{7}$ och $\frac{5}{5}$, som är lika med 1; alltså har de lika långa skolvägar”. Jag såg att alla var fokuserade på cykelvägen och inte kunde tänka vidare, så jag gick runt och försökte att få dem att fokusera på bussvägen istället. Jag uppmuntrade dem också att rita båda vägarna. När ca 20 minuter hade gått stoppade jag övningen. Jag frågade vilken väg som var den gemensamma delen. Alla var

överens om att det var bussvägen. De fick arbeta vidare, men det kändes som de inte kom vidare. När 30 minuter gått, gick jag igenom ett sätt att lösa problemet genom att utgå från bussvägen. Sedan slutade lektionen och de fick inte tillräckligt med tid att göra egna problem.

Eleverna hade fri tillgång till miniräknare.

5.4.2 Analysmodell

Elev-aktivitet	Eleverna tillämpade kända matematiska idéer i nya situationer.	Eleverna mötte nya matematiska idéer.	Eleverna förklarade, diskuterade, argumenterade.
	Ja. Ritade problemsituationen (15) Använde division (5) Jämförde i procent (4) Jämförde bråktal med hjälp av den minsta gemensamma nämnaren (3) Ritade cirkeldiagram och/eller tabell (2)	Ja. Två bråktal kan ha två olika hela tal.	Ja. I smågrupper och i helklass.

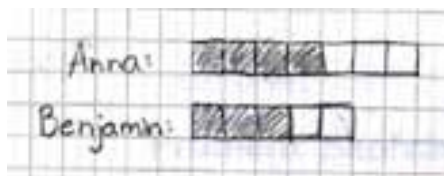
Matematiska uttrycksformer som förekom	Konkret	Logisk/språklig	Algebraisk/aritmetisk	Grafisk/geometrisk
	Ritning	Mycket sparsamt med språkliga förklaringar, men mycket funderingar och frågor till mig	Minsta gemensamma nämnare Subtraktion av bråktal Procent Decimaltal	Ritning cirkeldiagram tabell (en hel, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$... $\frac{1}{7}$)

Exempel på matematiska idéer som förekom	Begrepp	Procedurer	Strategier	Formler/regler	Konventioner
kända	Bråk Procent Hela och delar	Bråkräkning Förlänga bråktal genom att hitta den minsta gemensamma nämnaren	Rita båda tallinjerna och jämföra Rita rader rutor Rita cirkeldiagram eller/och tabell Sätt in ett konkret tal		= (Likhetstecken) Bråkstreck ÷ (Division) - (Subtraktion) x (Multiplikation) % (procent)
nya	Två bråktal på olika hela		Tänka ifrån den gemensamma bussvägen Rita rader rutor så att gemensamma delar blir lika långa	Man kan inte jämföra de två bråktalen med minsta gemensamma nämnare när de är på olika "hela"	

Analysmodell för svenska elever i 8:e klass (N=20)

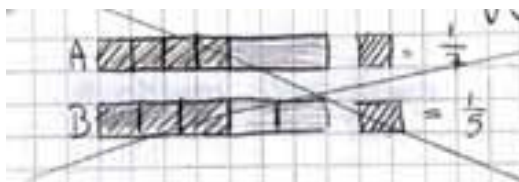
5.4.3 Elevlösningar

Många ritade två rader med rutor för att jämföra sträckorna, men det var få som kunde rita rätt. Många var mest upptagna av att få reda på vad $\frac{3}{7}$ och $\frac{2}{5}$ innebar. De räknade om bråktal till decimaltal, eller ritade cirkeldiagram eller/och tabell för att kunna jämföra dem. När de ritade rutor, var det vanligt att använda en ruta som en del i ett rutat papper.



Elevlösningsexempel 1.

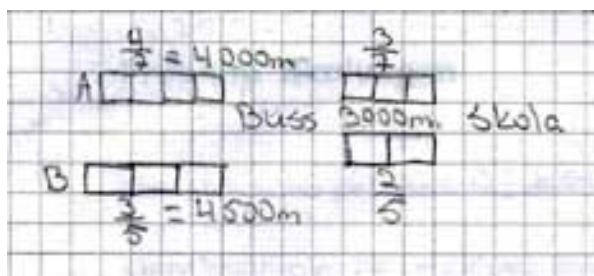
Två högpresterande flickor ritade bussvägen på ett korrekt sätt, men de höll inte det rätta måttet till cykelvägen. Till sist, ritade de Annas och Benjamins vägar lika långa.



Elevlösningsexempel 2.

Tre elever lyckades förlänga båda bråktalen och fick $\frac{1}{35}$ som svar (En skrev $0,2/7$). Två duktiga pojkar använde miniräknare och räknade snabbt till procent (3 %) som är lika mycket som $\frac{1}{35}$. Att räkna procent är naturligtvis lättare än att förlänga två bråktal.

Två flickor satte in konkreta tal, vilket är en bra lösningsmetod. En flicka skrev 70 m som hela skolvägen för både Anna och Benjamin. Hon suddade bort uträkning sedan, så jag kunde inte läsa riktigt vad det stod. Den andra flickan lyckades mycket bättre. Hon ritade först rätt och sedan satte hon in exempelvis 3000 m på bussvägen. Då fick hon räkna cykelvägar för både Anna och Benjamin.



Elevlösningsexempel 3.

Hon skrev tyvärr inte mer, men hon kunde ha räknat ut båda skolvägarna, vilket gör det möjligt att räkna ut hur mycket längre Benjamins skolväg var.

Av 20 elever var det tre flickor som bara skrev svar på uppgift a) och b). De tyckte att problemet var för svårt och visste inte hur de skulle bearbeta det.

5.5 Elevlösningar av japanska elever i 8:e klass

5.5.1 Genomförande

Denna undersökning utfördes den 13 juli 2006. Eleverna fick arbeta enskilt först utan någon förklaring från mig. Den undervisande läraren tyckte inte att jag skulle förklara något i början. När jag gick runt och tittade snabbt på deras lösningar, upptäckte jag att de flesta förlängde snabbt $\frac{4}{7}$ respektive $\frac{3}{5}$ för att kunna jämföra de två bråktalen. Inom 5 minuter var de duktiga eleverna färdiga och nöjda med sitt svar. När ca 8 minuter hade gått, stoppade jag arbetet och förklarade för eleverna med en ritning hur Annas och Benjamins skolvägar såg ut (*Bild 4*).

När jag sedan frågade eleverna vilken del var deras gemensamma väg, svarade de att deras bussväg var lika lång. Efter min korta genomgång arbetade eleverna i par eller smågrupper. Det blev livliga diskussioner, men det verkade som de flesta hade svårt att förstå varför man inte kunde jämföra med den gemensamma nämnaren. Jag gick runt och förklarade att dessa $\frac{4}{7}$ och $\frac{3}{5}$ har olika hela, alltså Annas $\frac{7}{7}$ och Benjamins $\frac{5}{5}$ är inte lika långa och därför går det inte att jämföra direkt de två bråktalen.

När ca 20 minuter hade gått, bad jag en flicka skriva sin lösning på tavlan. Hennes lösning visade tydligt på vems skolväg som var den längsta. Jag lät henne förklara framför klassen hur hon tänkte.

Eleverna hade inte tillgång till miniräknare precis som andra matematiklektionerna.

Det diskuterades livligt när de arbetade i grupper. Men när jag kom till gruppen och lyssnade, tystnade de och ville inte säga så mycket. Jag hade en mp3-spelare runt i halsen och spelade in ljudet, men jag missade alla diskussioner mellan eleverna. Jag skulle ha lagt mp3-spelaren på bänken och bandat elevernas prat, utan min närvaro.

5.5.2 Analysmodell

Elev-aktivitet	Eleverna tillämpade kända matematiska idéer i nya situationer.	Eleverna mötte nya matematiska idéer.	Eleverna förklarade, diskuterade, argumenterade.
	Ja. Ritade problemsituationen (23) Jämförde bråktal med hjälp av den minsta gemensamma nämnaren (15) Använde division (4) Tänkte på proportionalitet (2) Jämförde i procent (1)	Ja. Två bråktal kan ha två olika hela tal.	Ja. I små grupper och i helklass.

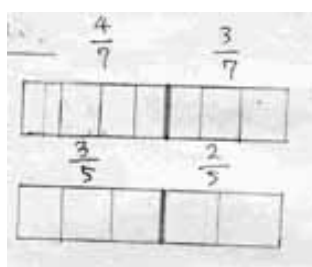
Matematiska uttrycksformer som förekom	Konkret	Logisk/språklig	Algebraisk/aritmetisk	Grafisk/geometrisk
	Ritning	Förklara sina aritmetiska lösningar med ord	Minsta gemensamma nämnare Subtraktion av bråktal Procent Proportion (ex. 4:3) Teckna algebraiska uttryck	Ritning Proportion

Exempel på matematiska idéer som förekom	Begrepp	Procedurer	Strategier	Formler/regler	Konventioner
kända	Bråk Proportion Procent Algebraiska uttryck Hela och delar	Bråkräkning Hitta den minsta gemensamma nämnaren	Rita båda sträckorna och jämföra Rita tallinjer		= (Likhetstecken) Bråkstreck / (Division) - (Subtraktion) x (Multiplikation) % (procent) : (proportion)
nya	Två bråktal på olika hela Algebraiska uttryck	Hitta den gemensamma produkten av två täljare Teckna en ekvation	Tänka ifrån den gemensamma bussvägen Rita tallinjer så att gemensamma delar blir lika långa Teckna med en variabel x	Man kan inte jämföra de två bråktalen med minsta gemensam nämnare när de är på olika hela	x för en väg, y för en annan väg

Analysmodell för japanska elever i 8:e klass (N=36)

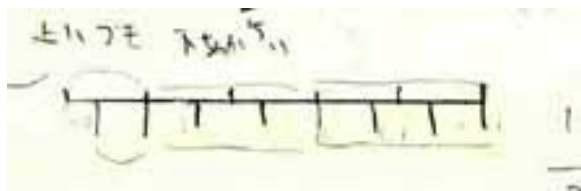
5.5.3 Elevlösningar

Ca två tredjedelar av eleverna ritade problemsituationen på något sätt, och man kan kategorisera deras ritningar på tre olika sätt. Den första är kopiering av min ritning på tavlan precis som *Bild 4*. Den andra variationen är två rader rutor/tallinjer som är lika långa. Raderna är markerade i 7 respektive 5 lika (eller olika) långa delar.



Elevlösningsexempel 4.

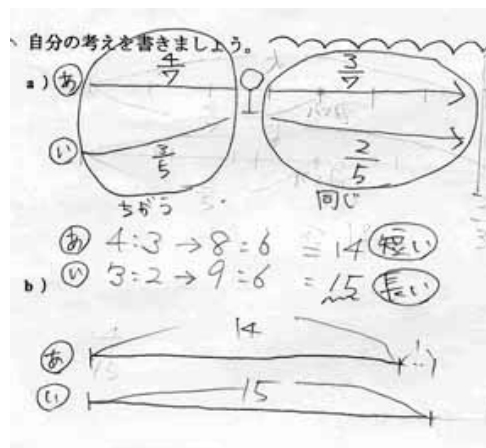
Det tredje sättet är två olika långa rader rutor/tallinjer som är delade i 7 respektive 5 lika delar. Tre delar av den första linjen (Annas väg) motsvarar två delar av den andra linjen (Benjamins väg). Denna ritning skulle bli en ledtråd för att lösa den första uppgiften a). Det var tre elever som kunde rita korrekt och sedan resonerade att Benjamins väg var längre än Annas. De förstod genom ritningarna att Annas fyra delar och Benjamins sex delar är lika långa och det gäller att jämföra de sista bitarna, där man tydligt såg att Benjamins "en del" var längre än Annas.



Elevlösningsexempel 5.

Översta markeringen visar Benjamins väg och undermarkeringen visar Annas väg.

Men dessa elever kunde inte komma fram till det rätta svaret på hur mycket längre Benjamins väg var än Annas. En av de eleverna som kom närmare till det rätta svaret på b. uppgiften använde proportionalitet.



Elevlösningsexempel 6.

Hon kunde visa på ett mycket enkelt och tydligt sätt att Annas väg och Benjamins väg var 14 respektive 15 delar. Även om hon inte kunde skriva vidare, kunde hennes redovisning ha lett till det rätta svaret, nämligen B:s väg är längre med $\frac{1}{15}$ av sin väg (eller med $\frac{1}{14}$ av Annas väg). Det var synd att jag under tiden inte upptäckte hennes bra lösning, för då hade jag kunnat presentera den för klassen.

15 elever förlängde de två bråktalen, subtraherade dem och svarade att Benjamins väg är $\frac{1}{35}$ längre än Annas. Detta var den vanligaste lösningen bland de japanska eleverna. Hit hörde, enligt deras lärare, några högpresterande elever. De hade tränat upp förlängning/förkortning av bråktal och förstod inte att det kunde finnas två bråktal som hade olika "hela" i en enda uppgift.

Två elever ville teckna situationen med algebra. Den ena lyckades bra: en flicka angav den gemensamma bussvägen som x . Då kunde hon teckna Annas "en del" som $\frac{1}{3} \cdot x$ och Benjamins "en del" som $\frac{1}{2} \cdot x$. Hon redovisade inte vidare i sin lösning, men om hon hade fortsatt räkna genom att subtrahera skillnaden, kunde hon ha visat att Benjamins väg var längre med $\frac{1}{6}$ av deras bussväg, vilket också är ett korrekt svar. Ingen av de 36 eleverna lämnade pappret blankt. Sex flickor ritade bara av *Bild 4* och kunde inte åstadkomma någon lösning. Två pojkar suddade bort nästan allt de skrivit, och ville inte visa sina kladdar.

5.6 Elevlösningar av svenska elever i 9:e klass

5.6.1 Genomförande

Som jag skrev tidigare, fick jag göra undersökning i två 9:e klasser. Undersökningen hos den ena klassen utfördes den 20 och den 22 september 2006 och i den andra klassen den 2 och 6 oktober. I båda klasserna inledde jag lektionen genom att visa en modell av ett 6-våningstorn som var uppbyggt av sockerbitar. Sedan frågade jag eleverna hur tornet var uppbyggt. Följande är hur samtalet gick till mellan mig och eleverna.

Tomoko : Är det någon som kan förklara med ord hur tornet är uppbyggt? (Jag håller upp modellen.)

Elev : I trappsteg. Eller vad då?

Tomoko : Mm. Det är trappsteg. Hur många trappsteg finns det här?

Elev : Sex.

Tomoko : Sex stycken. Hur många trappsteg finns det här?

Elev : Fyra.

Tomoko : Fyra sådana. En, två, tre, fyra. (Pekar på varje trappa.)

Jag nöjde mig med att stoppa där, men jag skulle också ha frågat om det fanns ett annat sätt att se på tornet på. Jag förklarade också vad uppgiften d) innebar och vad n betydde. Även om jag instruerade dem att arbeta enskilt, började eleverna genast arbeta i par eller i grupp. De fick arbeta i ca 25 min. Sedan bad jag de elever som kommit fram till lösningar att skriva dem på tavlan och förklara för klassen. Jag hade förberett extra modeller av sockerbitar för redovisningstillfället för att kunna visa hur man kan sätta ihop två trappor, eller delar av trappor, till en rektangel. I den ena klassen fick jag möjligheten att visa eleverna att alla formler som de hade kommit på var precis samma formel om man förenklar uttrycken.

5.6.2 Analysmodell

Elev-aktivitet	Eleverna tillämpade kända matematiska idéer i nya situationer.	Eleverna mötte nya matematiska idéer.	Eleverna förklarade, diskuterade, argumenterade.
	Ja. Addera aritmetisk talföljd (20) Dela tornet i olika delar (8) Tänka med tabell (5) Utgå ifrån det föregående tornet (6) Rita en trappa (1)	Ja. Teckna en formel med n	Ja. I små grupper och i helklass.

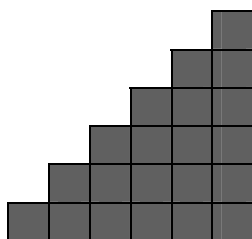
Matematiska uttrycksformer som förekom	Konkret	Logisk/språklig	Algebraisk/aritmetisk	Grafisk/geometrisk
	Räkna antalet kuber för en "trappa" Rita en trappa och räkna direkt	Förklara hur tornet är uppbyggt Förklara sina lösningar för kamraterna	(Se "nya formler" nedan)	Rita av tornet Göra en tabell för att se förändringar

Exempel på matematiska idéer som förekom	Begrepp	Procedurer	Strategier	Formler/regler	Konventioner
kända	Tredimensionell rumsuppfattning	Addition Multiplikation Upprepad addition	Rita en trappa tvådimensionellt från sidan Dela tornet i många små torn Dela tornet i 4 eller 5 delar	$4 \cdot (\text{antal kuber för en trappa})$ $4 \cdot n + 4 \cdot (\text{antal kuber för en trappa som är en våning mindre})$	+ (addition) · (multiplikation) = (likhetstecken) () (parentes)
nya	Uttrycket n är naturliga tal, eller positiva heltal som 1,2,3,..... Aritmetisk talföljd		Hitta mönster och teckna algebraiskt	$n \cdot 4 + x \cdot 4$ $2(n+1) \cdot \frac{n}{2}$ $4 \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2}$ $\frac{4 \cdot n \cdot n}{2} + \frac{n}{2} \cdot 4$ $n(n+1) \cdot 2$ $4(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2})$ $2n^2 + 2n$	n för tornets höjd

Analysmodell för svenska elever i 9:e klass (N=41)

5.6.3 Elevlösningar

Lösning 1 Genom att dela tornet i 4 likadana trappor



4 st

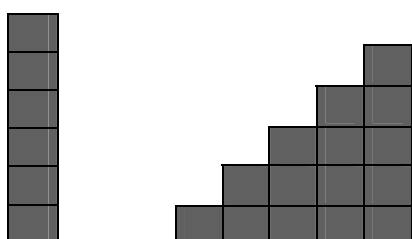
Elevlösningsexempel 7

Detta var det vanligaste sättet som de svenska eleverna såg tornet på. De flesta av dem räknade antingen genom att räkna direkt på bilden eller genom att addera antalet kuber som $1+2+3+4+5+6=21$ och därefter multiplicera 21 med 4, när de arbetade med uppgifterna a) och b). En pojke löste uppgiften a) genom att kombinera antalet kuber för den högsta pelaren och den lägsta som:

$$\begin{aligned}
 6+1 &= 7 \\
 4+3 &= 7 \\
 5+2 &= 7 \quad 7 \cdot 3 = 21
 \end{aligned}$$

Enligt hans lärare anses han som en svag elev och han använde inte denna metod i andra uppgifter. Om jag hade sett detta under lektionen, kunde jag ha lyft fram hans underbara metod som ingen annan i båda svenska klasserna kom på.

Lösning 2 Genom att dela tornet i en pelare och fyra trappor.



4 st

4 st

Elevlösningsexempel 8.

Tre elever löste uppgifterna a) och b) på detta sätt, men de kunde inte använda detta sätt för att lösa c) och d).

Ett par flickor tecknade en formel som $(x \cdot 4 + x \cdot 4)$. När jag bad om en förklaring, förklarade de att det fanns fyra mittpelare och fyra likadana trappor. De menade alltså att den första x är antalet kuber för en pelare och den andra x är antalet kuber för en trappa. Jag förklarade att man kunde teckna höjden av pelaren som n , så de ändrade sin formel till $(n \cdot 4 + x \cdot 4)$ istället. Jag uppmuntrade dem att teckna x med n , men de tyckte det var för svårt.

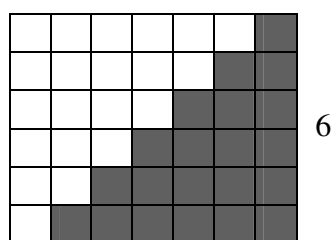
Lösning 3 Genom att dela tornet i många små pelare.

En elev delade tornet i uppgifterna a) och b) i 24 respektive 48 små pelare och räknade var och en pelare för sig.

7	6	=	24	24
4	5	=	20	20
4	4	=	16	16
4	3	=	12	12
4	2	=	8	8
4	1	=	4	4
				84
B	4	12	=	48
	4	11	=	44
	4	10	=	40
	4	9	=	36
	4	8	=	32
	4	7	=	28
	4	6	=	24
	4	5	=	20
	4	4	=	16
	4	3	=	12
	4	2	=	8
	4	1	=	4
				52

Elevlösningsexempel 9.

Lösning 4 Genom att sätta ihop två trappor till en rektangel.



$$6+1 = 7 \quad \text{Elevlösningsexempel 10.}$$

Två flickor som samarbetade kom på denna iögonfallande metod för att räkna antalet kuber. Den är mycket enkel eftersom man kan räkna antalet kuber med formeln för en rektangels area. Sedan dubblar man antalet kuber för rektangeln, eftersom man får två sådana rektanglar av fyra trappor. Uträkningen blir $6 \cdot 7 = 42$ $42 \cdot 2 = 84$. De samlade till en formel: $n(n+1) \cdot 2$.

Lösning 5 Genom att dela en trappa i två delar och att sätta ihop dem till en rektangel

Detta var en variation av *lösning 4*. Två elever som samarbetade hittade denna metod och kom fram till formeln: $(n+1) \cdot \frac{n}{2} \cdot 4$.

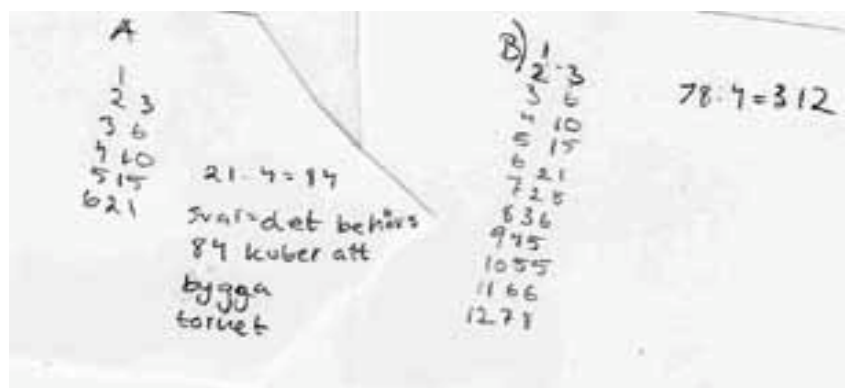
Lösning 6 Genom att använda svaret av den föregående uppgiften

En flicka såg tornet som en samling av många små pelare (se *Lösning 3* ovan). Hon försökte först tänka på c) genom att använda svaret på b), men hon lyckades inte.

I uppgift b) utgick fem elever från svaret på a) och fördubblade 84 direkt, vilket är felaktigt.

Lösning 7 Genom att använda en tabelliknande tankesätt

Fyra elever utgick ifrån ett antal bitar för en viss vånings torn och tänkte på hur antalet ökade på varje våning. En flicka använde denna metod och löste uppgifterna a) och b) korrekt.



Elevlösningsexempel 11.

Två av flickorna räknade upp till ett 10-vånings torn och multiplicerade sedan detta med 10 för att räkna antalet för ett 100-vånings torn. En pojke räknade upp till antalet bitar för en 13-vånings trappa, försökte att klura ut en formel, men lyckades inte. I *elevlösningsexempel 12* använde han n som hela antalet kuber för tornet. Detta var felaktigt.

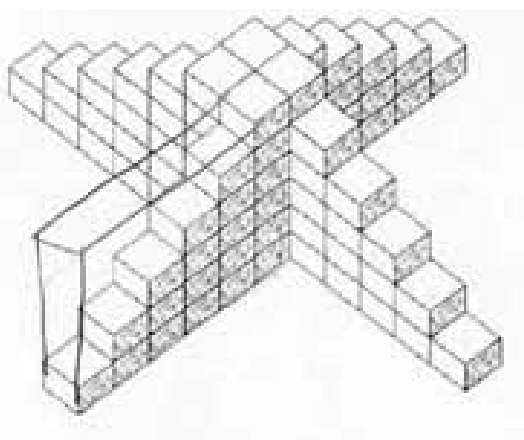
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91

$$n = \frac{\text{våningar} \cdot \text{våningar}}{2 + \text{våningar} - 2}$$

Elevlösningsexempel 12.

Lösning 8 Genom att räkna som en triangel och justera sedan antalet

Två par (fyra) flickor kom på denna metod. De utgick från en trappa och fyllde på så att det blev en kvadrat, t ex $6 \cdot 6$ för en 6 våningstrappa. För att räkna ut antalet kuber för en trappa, tänkte de på en triangel och delade kvadraten med 2. Då upptäckte de att det fattas en halv n till svaret. Till sist, samlade de detta till en formel: $4\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)$.



Elevlösningsexempel 13.

$$\frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

$$X \cdot X =$$

$$\frac{X \cdot X}{2} + \frac{X}{2}$$

Elevlösningsexempel 14.

Lösning 9 Att pröva sig fram till en formel

Två pojkar utgick helt enkelt från positiva heltal n , provade sig fram så att det blev en formel som man kan räkna ut antalet kuber för alla våningstorn. De klurade ut formeln, men det fanns ingen logik i sambandet mellan figuren och formeln. Den ena formeln är $(\frac{4 \cdot n \cdot n}{2} + \frac{n}{2} \cdot 4)$ och den andra är $(2 \cdot n + 2) \cdot n$.

Alla eleverna i de två klasserna skrev sina lösningar och provningar på olika sätt förutom två pojkar som bara skrev svar. En flicka skrev av sin kompis lösning.

Det var många diskussioner i grupperna. Jag tyckte att de samarbetade mycket bra. Även om de tyckte att det var svårt i början, kom de på en lösning så småningom när de pratade med varandra. När jag frågade eleverna vem som kom på lösningen, svarade nästan alla att de arbetade fram lösningen tillsammans. De ville också diskutera med lärarna när de kört fast. Jag märkte också att de som inte kunde komma på lösningar själva hade tendenser att skriva av svaren från sina "duktigare" kamrater. Man kunde se att vissa först fick andras svar. De försökte sedan, på egna sätt att lösa problemen, för att komma fram till det svar som han/hon fick. Detta avslöjades eftersom deras uträkning var fel.

Alla som kom på egna korrekta lösningar var högpresterande elever enligt deras undervisande lärare. När *lösning 4* och *5* med sockermodell presenterades i helklass diskussionen, blev det "a-ha!" moment för många. Efter några krångliga lösningar från sina kamrater, uttryckte en flicka sin förvåning, "Detta var det enklaste!" när jag satte ihop två trappmodeller till en rektangel. Men jag märkte att algebraiska uttryck blev för svåra för de lågpresterande, speciellt när jag visade att alla uttryck kunde förenklas till samma uttryck. Detta berodde på att de inte hade lärt sig så mycket om förenkling av algebraiska uttryck.

5.7 Elevlösningar av japanska elever i 9:e klass

5.7.1 Genomförande

Denna undersökning utfördes den 13 juli 2006. Under lektionens sex första minuter introducerade jag problemet precis som jag gjorde under svenska lektionen. Jag visade en sockerbitmodell av ett 6-vånings torn. Sedan bad jag eleverna att förklara med ord hur tornet var uppbyggt. Efteråt förklarade jag vad uttrycket n innebar i uppgiften d). Sedan arbetade eleverna enskilt. Jag uppmuntrade eleverna att gå fram och titta på modellen för att

kunna få en bra bild av tornet. Efter ca 13 minuter började eleverna samarbeta med varandra parvis eller i små grupper. Efter en kvart bad jag fyra elever skriva en del av sina lösningar på tavlan och de fick förklara hur de tänkte.

5.7.2 Analysmodell

Elev-aktivitet	Eleverna tillämpade kända matematiska idéer i nya situationer.	Eleverna mötte nya matematiska idéer.	Eleverna förklarade, diskuterade, argumenterade.
	Ja. Addera aritmetisk talföljd (14) Dela tornet i olika delar (9) Göra en tabell (4) Utgå ifrån det föregående tornet (3) Rita tornet (3)	Ja. Hur man samlar aritmetisk talföljd	Ja. I små grupper och i helklass.

Matematiska uttrycksformer som förekom	Konkret	Logisk/språklig	Algebraisk/aritmetisk	Grafisk/geometrisk
	Räkna antalet kuber på den konkreta modellen Räkna antal kuber för en "trappa" Rita en trappa och räkna direkt	Förklara hur tornet är uppbyggt Förklara sina lösningar på ett matematiskt korrekt språk	$2n^2 + 2n$ $2(n+1) \cdot \frac{n}{2}$ $4n + 2(n^2 - n)$ $\frac{4n(n+1)}{2}$ $2n(n+1)$	Rita av tornet Göra tabeller så att man ser hur antalet kuber ökar för varje våning

Exempel på matematiska idéer som förekom	Begrepp	Procedurer	Strategier	Formler/regler	Konventioner
kända	Tredimensionell rumsuppfattning	Addition Multiplikation Upprepad addition	Rita en trappa tvådimensionellt från sidan Dela tornet i många små torn Dela tornet i 4 eller 5 delar	$4 \cdot (\text{antal kuber för en trappa})$ $4 \cdot n + 4 \cdot (\text{antalet kuber för en trappa som är en våning mindre})$ Formel för en rektangels area	+ (addition) x (multiplikation) = (likhetstecken) () (parantesregel)
nya	Uttrycket n är naturliga tal, eller positiva heltal som 1,2,3,... Aritmetisk talföljd		Hitta ett mönster och teckna algebraiskt Addera det första talet och det sista talet, det andra talet och det näst sista talet, osv., i aritmetisk talföljd och samla detta i algebraiskt uttryck	$2n^2 + 2n$ $4(n+1) \cdot \frac{n}{2}$ $4n + 2(n^2 - n)$ $\frac{4n(n+1)}{2}$ $2n(n+1)$	n för tornets höjd

Analysmodell för japanska elever i 9:e klass (N=32)

5.7.3 Elevlösningar

När jag frågade eleverna i början av lektionen hur tornet var uppbyggt, förklarade två pojkar på ett mycket klart språk. (Min översättning från japanska)

”Man bygger först fyra 6-kuber-höga pelare, och därifrån tar man en kub mindre på varje steg så att trapporna går utåt.”

”Man bygger fyra stycken likadana trappor upp till 6 kubers höjd och sedan sätter man ihop de högsta pelarna.”

Lösning 1 Genom att dela tornet i 4 likadana trappor

Detta var också det vanligaste sättet för de japanska eleverna att se tornet på, precis som för de svenska eleverna. De flesta av dem räknade genom att addera antalet kuber som $1+2+3+4+5+6=21$, för att sedan multiplicera 21 med 4, speciellt när de arbetade med 6- och 12-våningstornen.

En pojke använde ett bra sätt att samla aritmetisk talföljd. Detta hade hans lärare i extra skolan, som han gick till på kvällarna, visat honom tidigare.

Handwritten student solution for problem 15. The solution shows a sequence of numbers 1 through 12, grouped into four pairs: (1,12), (2,11), (3,10), and (4,9). Each pair is circled and labeled with '13' above it. Below the pairs, the calculation $21 \times 4 = 84$ is written. Further down, $13 \times 6 = 78$ is written, and finally $78 \times 4 = 312$ is written.

Elevlösningsexempel 15.

Han förklarade att man kan addera ihop det första och det sista talet, det andra och det näst sista talet, osv. och sedan multiplicera summan med 6, som är hälften av 12. Till sist, multiplicerade han produkten med 4 och fick svaret. På samma sätt löste han uppgift c). Han samlade detta med variabeln n på uppgift d) och fick $\frac{4n(n+1)}{2}$. Han visste inte riktigt hur man förenklade detta och med min hjälp fick han summerat uttrycket till $2n(n+1)$.

Lösning 2 Genom att dela tornet i en pelare och fyra trappor.

Fyra elever löste problemet på detta sätt och räknade t ex. $6 \cdot 4 = 24$, $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 4 = 60$, $24 + 60 = 84$. En flicka arbetade vidare till ett algebraiskt uttryck. Hon satt ihop två trappor så att det blev en rektangel precis som jag presenterar i *lösning 4*. Hon räknade uppgift a) som:

$$4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 6 = 84 \quad \text{och tänkte vidare i uppgift d):}$$

$$4 \cdot n + 2 \cdot n(n+1).$$

Lösning 3 Genom att dela tornet i många små pelare.

En elev delade tornet i uppgift a) i 24 små pelare och räknade som:

$$4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 84$$

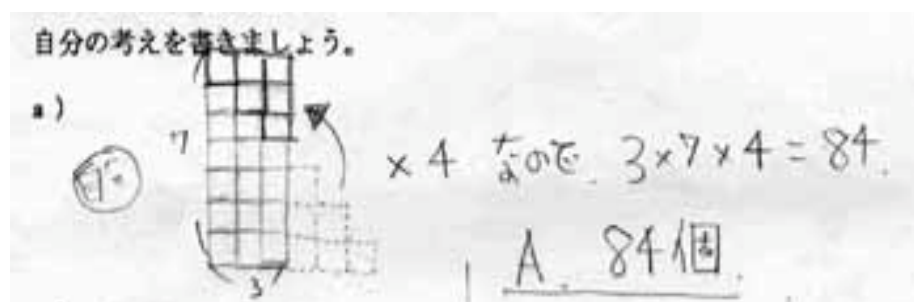
Han klarade med 12-vånings torn på samma sätt, men han kunde inte lösa uppgift c) med 100-vånings torn.

Lösning 4 Genom att sätta ihop två trappor till en rektangel.

Tre elever kom på denna metod för att räkna antalet kuber. Alla elever som upptäckte detta kom fram till det korrekta uttrycket, $n(n+1) \cdot 2$.

Lösning 5 Genom att dela en trappa i två och sätt ihop dem till en rektangel

En flicka förklarade med ritningen nedan:



Elevlösningsexempel16.

Hon räknade vidare korrekt och upptäckte att man kan multiplicera $(n+1)$ och en halv n för att räkna ut antalet kuber i en trappa. Till sist lyckades hon teckna ett samlat uttryck,

$$4(n+1) \cdot \frac{n}{2}.$$

Lösning 6 Genom att använda sig av svaret från den föregående uppgiften

Då eleverna räknade antalet kuber till ett 12-vånings torn, fanns det sex elever som använde resultatet från den föregående uppgiften, 84. Tre av dem tänkte på hur mycket ökningen blev och adderade 84 med ökningen, vilket var korrekt. Dock hade de problem att räkna antalet kuber för ett 100-vånings torn. Tre andra fördubblade 84 direkt, eftersom våningen blev dubbelt så hög.

Lösning 7 Genom att använda en tabell

Fyra elever ritade en tabell för att kunna se hur antalet kuber ökade på varje våning. Deras tabell var systematisk och man kunde se att de hade arbetat på det sättet tidigare. De som ritade tabellen korrekt, upptäckte att ökningen ökade med 4. Om sambandet har varit linjärt, hade de antagligen inte haft några problem att teckna algebraiskt, men i och med att detta var andragsgradsfunktion, kunde de inte gå vidare med tabellen.

Det var intressant att gå igenom japanska elevers lösningar i synnerhet för att det knappt fanns likadana lösningar. Det var bara hos ett par av dem, man tydligt kunde se att de skrev av andras. En elev skrev i sin reflektion att hon kunde komma på en lösning efter grupp-diskussionen, men det var bara hon som skrev just denna lösning. Jag kunde inte hitta likadana lösningar hos de andras i hennes grupp. Som reflektioner skrev två av de elever som kom på korrekta lösningar att det var bra att hon/han kunde tänka ut en lösning själv utan någon hjälp.

Eleverna var mycket positiva till ett sådant arbete där man kunde utnyttja alla sina matematiska kunskaper. Några var imponerade över att ett problem kan kräva kunskaper om både geometri och algebra, och många uppskattade att kunna arbeta i grupp och att höra andras goda idéer.

6 Diskussion och slutsatser

6.1 Lektioner och elevlösningar i Sverige

I detta avsnitt sammanfattar jag svenska matematiklektioner, och söker efter sambandet mellan lektioner och elevlösningar från min undersökning. I en svensk lärobok finns en mängd uppgifter som har vardagsanknytning. Där kan eleverna känna igen sig i problemsituationer. Det finns många intressanta och roliga uppgifter, och många av dem kan användas i undersökande syfte. Men i verkligheten finns det inte tid att undersöka uppgifterna grundligt under lektionstiden.

Uppgifterna fungerar också som träning för att eleverna ska lära sig hur de behandlar de nya begreppen medan de arbetar med uppgifterna. På grund av att det inte finns så mycket förklaringar om nya matematiska begrepp eller lösningsprocedurer, är det mycket viktigt med lärarens genomgång. Läraren anpassar sina genomgångar till elevernas behov och önskemål, men på grund av att alla elever arbetar på olika sidor i boken, passar en genomgång inte alltid varje elevs behov. När en elev fastnar i en uppgift, får hon hjälp av läraren enskilt eller i form av genomgång, och det är vanligt att hon frågar sina kamrater om hjälp. Det är inte alltid hon får hjälp. Då måste hon själv reda ut vilka matematiska begrepp och procedurer hon ska använda sig av, genom att prova sig fram till den rätta lösningen. Till sist skaffar hon sig självsökande attityder. De högpresterande eleverna klarar sig bra på det sättet och blir duktiga, självständiga uppgiftslösare. Många svenska elever kontrollerar det rätta svaret i facit när de kört fast, och de klurar sedan ut lösningen med hjälp av svaret. Risken är stor när eleverna hittar på ett eget sätt att lösa problem utan konkreta matematiska resonemang. Jag har sett många osäkra elever som inte kan se sambanden mellan uppgifterna. För dessa elever är varje uppgift en ny utmaning som de måste använda en annorlunda taktik för att lösa, även om uppgifterna egentligen har samma matematiska innehåll.

Det finns ett bra samarbete mellan eleverna och man kan se att de är vana vid denna arbetsform. Speciellt visar de högpresterande flickorna mycket hög samarbetsförmåga och de bygger upp idéer och tankar tillsammans för att lösa problemet. Eleverna är allmänt frispråkiga och ärliga, och ställer frågor när det finns några funderingar eller när de inte riktigt förstår. Detta kan naturligtvis leda till att genomgången går tvärsemot vad läraren har tänkt sig. Det finns tendenser till att skriva av ”duktigare” kamraters lösningar oavsett om eleverna verkligen förstått dessa eller ej.

Angående elevlösningarna, vill jag belysa en del som inte framkommit i japanska elevers lösningar. I den svenska skolan betraktas ”att gissa och pröva” och ”att sätta in ett konkret tal” som bra alternativa metoder för aritmetiska/algebraiska sätt. Eleverna upp-

muntras att använda dessa metoder som är erkända för bra problemlösningsmetoder (Polya, Larsen, et al., refererad i Björkqvist, 2001; Hagland, et al., 2005). Denna tendens kunde man se i de svenska elevernas lösningar. I t.ex. problemet ”Skolvägen” satte två flickor in konkreta tal. Den ena lyckades visa ett korrekt tankesätt genom att sätta in ett tal som kunde delas med både 3 och 2 medvetet eller omedvetet. Hon kunde dessutom rita problemsituationen korrekt, vilket de andra inte klarade av.

I elevlösningarna hos åk 9, fanns det sju olika algebraiska uttryck för att räkna antal kuber för n -våningstorn. Dessa olika variationer anser jag beror på den friare undervisningen i Sverige, där eleverna är vana vid att självständigt testa sig fram till en lösning. Det var övervägande de högpresterande eleverna som skapade en formel. De andra eleverna försökte använda sig av andra metoder, t.ex. tabelliknande eller med den enklare formeln: $4 \cdot n + 4 \cdot x$. En svag elev förvånade mig genom att han samlade den enkla aritmetiska talföljden på ett förnuftigt sätt som kunde ha utvecklats till en korrekt formel.

Däremot visade eleverna tydligt att de inte var vana vid att prata på ett matematiskt korrekt språk, något de nästan aldrig övar under lektionstid. När de skulle förklara, blev det oftast ganska kortfattat och många kunde inte berätta hur de tänkte. De elever som kunde teckna korrekta formler hade också svårt att redovisa korrekt skriftligt. Istället förklarade de muntligt för mig hur de tänkte.

Jag vill här lyfta fram tre pojkars lösningar, där de försökte få fram en formel utan matematiskt resonemang. Min första reaktion var att det var felaktigt att skriva en formel utan att undersöka figurens uppbyggnad, eftersom det var detta som var avsikten med problemet. Samtidigt tyckte jag att jag borde visa deras formler med beröm inför klassen för att de ”hittade” den rätta lösningen. Pojkarna försökte pussla ihop problemet och två av dem lyckades få fram det rätta svaret. Hur ska läraren bedöma dessa elever? Det var bra att de listade ut en formel denna gång, men när man ska reda ut mer komplicerade uttryck med t.ex. exponent eller tredjegradsuttryck, måste man lära sig att först undersöka för att hitta ett mönster och sedan teckna en formel. Deras metod fungerar antagligen på högstadienivå, men håller inte i längden i gymnasie- och högskolematematik.

Utifrån min sammanfattning av svenska lektioner, kan man se ett stort glapp mellan kursplanens mål och verkligheten. Först och främst finns det inte så mycket utrymme under lektionerna för eleverna att fundera på och undersöka ett problem grundligt. Genom att arbeta med ett problem djupare kan eleverna hitta matematiska samband och utveckla sitt matematiska resonemang och språk (Wyndhamn, et al., 2000; Hagland, et al., 2005). Svenska elever är påhittiga och smarta problemlösare, men det är inte säkert att de utnyttjar sina

matematiska kunskaper fullt ut. Detta beror mycket på att undervisningen inte är uppbyggd för att eleverna ska se matematiska samband mellan olika problem och olika matematiska moment. Ma (1999) förklarade de amerikanska lärarnas tillvägagångssätt, som att flera moment ofta behandlas individuellt utan kopplingar sinsemellan. Denna tendens kan man också se i svenska undervisningar. Det är väsentligt att undervisningen ger eleverna en klar bild av hur alla matematikdelar hänger ihop med varandra.

6.2 Lektioner och elevlösningar i Japan

Japanska läromedel visar att eleverna arbetar med ett svårare matematiskt innehåll i åk 8 och de koncentrerar mest på algebra, funktioner och geometri. Bokens upplägg är integrerat med ett undersökande problem för att presentera nytt stoff, övningsuppgifter, förklaring av det nya begreppet och fler övningsuppgifter. Dessa återkommer genom hela kapitlet. Ett moment bygger på de moment eleverna har lärt sig tidigare, och det presenteras nytt hela tiden. Det finns betydligt mindre antal övningsuppgifter och det förekommer inte repetitioner av sådant de redan tidigare lärt sig. En stor del av boken upptas av presentationer nytt stoff, bevisföringar och förklaringar.

Lektionsupplägget följer lärobokens upplägg. En lektion består av ett flöde som innehåller presentation av dagens stoff och en noggrann genomgång, elevers enskilda övningar, elevernas redovisning och diskussion av lösningarna. Detta flöde återkommer två, tre gånger under en lektion. Läraren talar om det konkreta målet, för att olika lösningsmetoder ska diskuteras. Genom att redovisa sina lösningar skriftligt och muntligt, lär eleverna sig att uttrycka sina tankar på ett matematiskt språk. Lärarna kunde lita på att eleverna redan lärt sig vad tidigare lektioner behandlat. Under genomgången behandlades ett fåtal problem och de förklarades noggrant av läraren. Ibland blev det en lång diskussion om ett enda problem. Denna bild passar bra på det som presenteras i japanska lektioner enligt Hiebert, et al. (1999), Jacobs & Morita (2002) och Hiebert & Stigler (2000).

Sammanfattningsvis har japanska lärare utvecklat en diskussionscentrerad undervisning för att eleverna ska upptäcka och fördjupa sina matematiska kunskaper (Minato, 2001). Här vill jag tillägga att innebörden av "en diskussion" i Japan är annorlunda jämfört med en i Sverige. Den svenska diskussionen har en mycket friare form när det gäller elevernas möjligheter att få uttrycka sig. Ibland skiftar diskussionsriktningen tvärtemot vad läraren egentligen har tänkt sig. Diskussioner under en japansk lektion verkar däremot vara

mer styrda och kontrollerade av läraren, eftersom elevernas funderingar och ”feltänkande” aldrig kommer fram. Detta innebär att det inte finns så mycket utrymme för de svaga eleverna att uttrycka sina tankar.

Det höga matematiska innehållet under lektionerna påverkade tydligt elevlösningarna. Eleverna utnyttjade sina kunskaper som de lärt sig tidigare fullt ut; att teckna och förenkla algebraiska uttryck, att göra en tabell för att kunna se mönstret, att tänka på proportionalitet och att generalisera aritmetisk talföljd. Många elever visade sina färdigheter av räkneoperationer med bråktal. Många var mycket duktiga på att redovisa sina lösningar på ett matematiskt språk, både skriftligt och muntligt. Det är naturligtvis tack vare övning under lektionerna genom åren. Även de som hade helt fel försökte förklara med ord så gott de kunde.

Japanska elevers svaga sida är, som R. E. Reys, et al. (refererad i Brenner, et al., 1999) har rapporterat, att de inte kan tänka på andra sätt än de har lärt sig. Detta kunde jag se på elevlösningar av problemet ”Skolvägen”. Även de högpresterande eleverna var fixerade vid att jämföra $\frac{4}{7}$ och $\frac{3}{5}$ och de hade svårt att tänka om, trots att de fick förklaringen, varför man inte skulle göra så.

Under japanska matematiklektioner förekommer sällan sådana strategier som ”att tänka konkret”, ”att gissa och pröva” eller ”att sätt in konkreta tal” eftersom de antagligen inte tillhör den genuina matematiken i Japan. När man har ett problem i vardagslivet, är det vanligt att gissa och pröva sig fram till det bästa sättet, eller att tänka konkret (Wedegé, 2002). Som Brenner, et al. (1999) påstod, saknas antagligen flexibilitet i den japanska undervisningen. I vissa sammanhang, speciellt då man arbetar med problem av undersökande karaktär, behöver man utgå från ett konkret fall, eller gissa och testa först för att kunna lösa problemet. För de svagare eleverna behöver problemet verkligen konkretiseras innan man börjar t.ex. teckna det algebraiskt.

I elevernas reflektioner uppskattade de grupparbeten för att kunna se olika lösningar. Samtidigt fanns det inga elevlösningar som såg precis likadana ut. Några elever föredrog att arbeta själva, och två utav dem var mycket stolta över att de själva kunde lösa problemet själva. Antagligen förstod de inte riktigt vitsen med grupparbetet. Detta berodde dels på att de inte var vana vid grupparbeten, och dels på tävlingsmomentet som styr mycket av inträdesprovet till gymnasieskolan.

6.3 Likheter och skillnader av elevlösningar mellan den svenska och den japanska skolan

Likheter

- Eleverna var mycket engagerade och intresserade av att lösa problemen, speciellt tillsammans med sina kamrater. De visade en stor glädje att tackla ett svårt problem och att ta del av andras lösningar.
- Det blev mycket diskussioner mellan eleverna på grund av den stora variationen av lösningar. Speciellt visade de högpresterande eleverna en betydande framgång med lösningen, men även några av de lågpresterande eleverna visade goda matematiska resonemang.
- Många elever i de båda länderna använde samma strategier och uttrycksformer när de löste problemen. Man kan sammanfatta att problemlösning gynnar både svenska och japanska elever.

Skillnader

- De svenska eleverna använde mer konkreta lösningar och prövade sig fram, vilket inte var vanligt i Japan.
- De svenska eleverna var duktiga på att samarbeta, speciellt de högpresterande flickorna. Vissa skrev av sina kamraters lösningar som sin egen lösning.
- De japanska eleverna visade mer abstrakt matematik i sina lösningar och flera variationer på lösningsmetoderna. De var vana vid att förklara och redovisa sina lösningar på ett korrekt matematiskt språk.

6.4 Vad kan vi lära oss av varandra?

Japanska sidan

- Det saknas flexibilitet både i undervisningen och i elevlösningarna. Eftersom det finns mycket bra matematiska förutsättningar hos japanska elever, är det viktigt att de regelbundet får arbeta med matematiskt rika problem så att de kan möta andra typer av problem än dem som de är vana vid. På detta sätt kan man höja elevernas matematiska kunskaper i helhet.
- Grupparbeten rekommenderas. Eleverna är i allmänhet duktiga på att ”prata matematik”. De får träna i att prata om sina tankar och lyssna på andras genom

grupparbeten. På detta sätt kan läraren lyfta fram de svaga elevernas funderingar och ”feltänkande” i vanliga samtal.

- På grund av detta rekommenderar jag den japanska undervisningen att arbeta mer med problemlösning. Både lärarna och eleverna kan då få en annan vision av matematiken.

Svenska sidan

För att sätta stopp på ”tomteverkstaden” i matematikundervisningen, finns det några förslag att ta efter från japanska lektioner.

- En reformering av läromedlen är viktigt eftersom undervisningen i Sverige styrs mycket av boken. Läroboken ska lyfta fram ”den röda tråden” i matematiken och visa samband mellan olika matematiska delar och moment. Det behövs systematisk organisation i hela grundskolans läromedel med fler matematiska förklaringar och färre uppgifter.
- Det behövs mer struktur i undervisningen. Lärarna kan styra grundligare diskussioner om ett par problem, för att eleverna skall upptäcka matematiska begrepp och samband. Det är bra med konkreta och vardagsrelaterade problem, men det behövs kopplingar till det abstrakta.
- Styrdokumentet ska vara tydliga gällande kraven på vad eleverna skall lära sig i varje årskurs. Svensk matematikundervisning är för individualiserad och det är omöjligt för en helklass att ha gemensamma välanpassade genomgångar under lektionerna, eftersom elevernas kunskapsskillnader är mycket stora.
- Kooperativ kompetensutveckling är en bra start för att skapa diskussioner kring undervisningarna i skolan. Lärarna kan fördjupa kunskaperna om undervisningen och matematiken, utnyttja varandras idéer och tankesätt, öppna för nya synsätt, och skapa gemensamma läromedel och mål i arbetslagen.

Referenser

- Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I Grevholm, B. (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (pp. 115-132). Lund: Studentlitteratur.
- Brenner, M. E., et al. (1999). Cross-National Comparison of Representational Competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 541-557.
- Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.
- Hiebert, J., et al. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washington, DC.: National Center for Education Statistics (ED).
- Hiebert, J. & Stigler, J. W. (2000). A Proposal for Improving Classroom Teaching: Lessons from the TIMSS Video Study. *The Elementary School Journal*, 101(1), 1-17.
- Jacobs, J. K. & Morita, E. (2002). Japanese and American Teachers' Evaluations of Video-taped Mathematics Lessons. *Journal for Research in Mathematics Education*. 33(3), 154-175.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Minato, S. (2002). Teachers' Mathematical Qualities based on the Three Lesson Models. (översättning av författaren: Jugyo Sankeiron ni motozuku Kyoshi no Sugakuteki Shishitsu). *Joetsu Journal of Mathematics Education*, 17, 1-20.
- Mullis, I. V. S., et al. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report – Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the 4th and 8th grades*. Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Pehkonen, Erkki. (2001). *Lärares och elevers uppfattningar som en dold faktor i matematikundervisningen*. I Grevholm, B. (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (pp. 230-253). Lund: Studentlitteratur.
- Polya, G. (1957). *Problemlösning – En handbok i rationellt tänkande*. Princeton: Princeton University Press.
- Sawada, T., et al. (2001). *Chugaku Sugaku 2*. Tokyo: Kyoiku Shuppan K.K.
- Sawada, T., et al. (2001). *Chugaku Sugaku 3*. Tokyo: Kyoiku Shuppan K.K.
- Skoogh, L., et al. (2001). *Möte med matte C*. Stockholm: Liber.
- Skoogh, L., et al. (2001). *Möte med matte D*. Stockholm: Liber.

- Skolverket. (2000). *Grundskolan – Kursplaner och betygskriterier 2000*. Stockholm: Skolverket.
- Taflin, E. (2006). Stordia från föreläsning 2 *Problemlösning, matematiska idéer och uttrycksformer*. Högskolan Dalarna.
- Winslöv, C. (2004). Quadratics in Japanese. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 1, 51-74.
- Wistedt, I. & Johansson, B. (1991). Undervisning om problemlösning - ett historiskt perspektiv. I Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red.), *Problemlösning*. (pp.13-22). Lund: Studentlitteratur.
- Wedge, T. (2002). "Mathematics – that's what I can't do" – Peoples affective and social relationship with mathematics. *Literacy and Numeracy Studies: An International Journal of Education and Training of Adults*. 11(2), 63-78.
- Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited on school mathematics as a situated practice*. Linköping: Linköping University.
- Wyndhamn, J., Riesbeck, E. & Shoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik: studier av styrdokument och klassrumsverksamhet i matematik- och teknikundervisningen*. Linköping: Linköpings universitet.

Bilagor

Bilaga 1 Observationsprotokoll

Observationsprotokoll

Skola _____

Klass _____

Datum _____ Tid _____

segment	längd (min)	beskrivning (problem, lärarroll, elevaktivitet, etc.)
1		
2		
3		
4		
5		
total		

Övrigt:

Bilaga 2 Analysmodell

Analysmodell Japan / Sverige 8 / 9 N=

Elevaktivitet	Eleverna tillämpade kända matematiska idéer i nya situationer.	Eleverna mötte nya matematiska idéer.	Eleverna förklarade, diskuterade, argumenterade.

Matematiska uttrycksformer som förekom	Konkret	Logisk/språklig	Algebraisk/aritmetisk	Grafisk/geometrisk

Exempel på matematiska idéer som förekom	Begrepp	Procedurer	Strategier	Formler	Konventioner
kända					
nya					

Bilaga 3 Stencil

月 日 () 第2章 「平方根」 平方根の乗除 KP40～42 No. 4		
今日のめあて		①平方根のかけ算とわり算ができる。 ②根号のついた数の変形ができる。
A	$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ となるだろうか。	
B	1. 次の (1)、(2) を計算せよ。 (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ $x = \sqrt{2} \times \sqrt{5} \text{ とする。}$ $x^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{5})^2$ $= (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{5})^2$ $= (\quad) \times (\quad)$ $= (\quad)$ したがって $x^2 = (\quad)$ x は正の数なので $x = (\quad)$ よって $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = (\quad)$ (2) $\sqrt{5} \div \sqrt{3}$ $x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \text{ とおいて}$ $x^2 = (\quad)^2 = \frac{(\quad)^2}{(\quad)^2} = \text{---}$ $x^2 = \text{---}$ x は正の数なので $x = \text{---}$ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{b}}} = \text{---} \quad a \geq 0, b > 0$ ※根号のついた式は、文字式の場合と同じく×の記号を省略できる。 例 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \text{---}$ $3 \times \sqrt{3} = \text{---}$ ★教科書P41 問1、問2をやりなさい。 2. $3\sqrt{3}$ を変形して、$\sqrt{a}$ の形にきなさい。 3. 次の数を根号の中の数ができるだけ小さな自然数となるように書き直せ。 ① $\sqrt{12}$ ② $\sqrt{200}$ $a > 0, b > 0 \text{ のとき、 } \sqrt{a^2 b} = \text{---}$ ★教科書P41問3、教科書P42問4をやりなさい。	
D	基本コース 問題集P34 A1	応用コース 問題集P34 A2
		発展コース 問題集P35 B
E	① $\sqrt{2} \times \sqrt{\text{---}}$ ② $\sqrt{\text{---}}$ を $a\sqrt{b}$ の形に変形きなさい。	
※	NO5はKP42の例3です。予習してこよう。	