

Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel

En studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar inom matematisk analys

Kerstin Pettersson

www.math.chalmers.se/Math/Research/Preprints
(välj Doctoral Dissertations)



Artiklar i avhandlingen

Artikel 1

Pettersson, K., & Scheja, M. (2008). Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(6), 767-784.

Artikel 2

Scheja, M., & Pettersson, K. (2007). Transformation and contextualisation: Exploring students' conceptual understandings of threshold concepts in calculus. *Manuscript submitted for publication*.

Artikel 3

Pettersson, K. (2008). Växlerkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang - En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 13(1), 29-50.



Syfte och forskningsfrågor

Att studera universitets- och högskolestudenters begreppsuppfattningar inom matematisk analys så som de kommer till uttryck i deras arbete med ett matematiskt material.

- Hur kontextualiserar studenter begrepp inom matematisk analys?
- Vilken dynamik finns mellan olika kontextualiseringar?

Kontext:

Den kognitiva struktur som aktualiseras hos individen i den uppkomna situationen

Intuition

En slags kognition som ger möjlighet till en omedelbar uppfattning där alla delar uppfattas direkt och tillåter resonemang utan att man behöver vila på det formella

Formella resonemang

Logiska slutledningar som vilar på formella definitioner och satser

Algoritmisk kunskap

Kunskap om räkneregler och procedurer. Inkluderar även studenters förmåga att beskriva och använda dessa regler och procedurer

Faculty of Science

Några teorier om begreppsutveckling

- **Conceptual change**
 - provisorisk förståelse byts mot mer vetenskaplig
- **Differentiering mellan kontexter**
 - att lära sig välja en förklaring lämplig i situationen
- **Missuppfattning eller försteg?**
- **Process – objekt** (Sfard, 1991)
- **Tröskelbegrepp** (Meyer&Land, 2005)

HÖGSKOLAN SKÖVDE
Kerstin Pettersson

Faculty of Science

Intentionell analys

- **intentionalitet** ett grundantagande
- **systematisering** av tolkande verksamhet
- en **modell** för agerandet
- försöker svara på **varför** individen agerade på visst sätt

HÖGSKOLAN SKÖVDE
Kerstin Pettersson

Intentionell förklaring genom en praktisk inferens

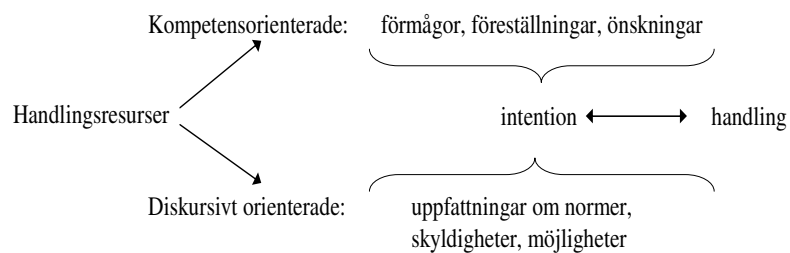
Premiss 1: P vill/önskar/avser att
åstadkomma x.

Premiss 2: P tror att han kan åstadkomma x
genom att göra y.

Slutsats: Därför; P gör y.

(efter Halldén, 2001, s. 10)

Sammanvägning av kognitiva och diskursiva aspekter



(efter Halldén, Haglund & Strömdahl, 2007, s. 29)

Intervjustudien

- Samarbete med Max Scheja
- 20 studenter på ingenjörsutbildning
- Har läst en kurs i matematisk analys
- Skriftligt förklara innebörden i begreppen gränsvärde och integral
- Skatta sin egen förståelse
- Intervjuer med fyra av studenterna

Kriterier för bedömning

Gränsvärde:

- 0. Innehåller inget med relevans för det matematiska begreppet
- 1. Bygger endast på enstaka exempel
- 2. Utrycker gränsvärde som en process
- 3. Utrycker gränsvärde som ett objekt
- 4. Anger gränsvärde både som process och objekt
- 5. Inkluderar formell behandling, t.ex. definitionen i någon form

Integral:

- 0. Innehåller inget med relevans för det matematiska begreppet
- 1. Bygger endast på enstaka exempel
- 2. Anger en av aspekterna omvänd derivata respektive area
- 3. Anger båda aspekterna omvänd derivata respektive area
eller anger både area och areaberäkning genom indelning i staplar.
- 4. Anger båda aspekterna area och omvänd derivata samt antyder definitionen (Riemannsumma/gränsvärde)
- 5. Inkluderar formell behandling, t.ex. integralens definition.

Faculty of Science


Studenternas förståelse bedömd utgående från de skriftliga uttågarna

Bedömning	0	1	2	3	4	5
Gränsvärde ^[1]	2	5	8	3	1	-
Integral ^[2]	-	10	7	2	-	-

^[1]En av studenterna besvarade inte frågan.
^[2]En av studenterna besvarade inte frågan.

Studenternas egen skattning av sin förståelse


Skattning	Inte alls bra	Mindre bra	Varken bra eller dålig	Ganska bra	Mycket bra
Gränsvärde	2	3	6	7	2
Integral	1	3	5	9	2



HÖGSKOLAN
SKÖVDE
Kerstin Pettersson

Faculty of Science

- ”jag försöker förstå hur man löser saker och ting”
- ”jag går inte runt och grubblar över varför det är så eller så”
- ”... det här med definitioner brukar jag inte lära mig utantill, tyvärr...”.



HÖGSKOLAN
SKÖVDE
Kerstin Pettersson

Algoritmisk kontext

- talar om hur begreppen används
- operationerna definierande egenskaper
- procedurrella kunskaper
- funktionellt för studenterna

I: Alla integraler är de areaberäkningar, och alla areaberäkningar är de integraler...?

Philip: Nej.

[...]

*Philip: Det är ju när integralen...
...om man till exempel...
... eller ja i och för sig. Om man har en...
Om du har ett sånt här hörn eller nånting...
... fast i och för sig kan du ju då räkna ut för det där...
... och räkna olika areor och sen lägga ihop dom. ...
Nu måste jag fundera om man kan göra det på alla integraler,
det har jag aldrig tänkt på...*

Algoritmisk begreppsuppfattning - försteg till en mer fullödig förståelse?

- studenterna har kunskaper utanför algoritmisk kontext
- studenterna skiljer på algoritmisk kontext och begreppslig
- provocerande frågor startar ihopkoppling

Problemlösningstudien

- grupper av studenter arbetat med en utmanande uppgift
- studenter från ett matematikprogram
- har läst nästan ett år matematik

Uppgiften:

Låt f vara en funktion definierad på hela \mathbf{R} .

- a) Hur många nollställen kan funktionen högst ha om för alla x gäller att $f'(x) \neq 0$?
- b) Om istället $f''(x) \neq 0$, vad gäller då för antalet nollställen till funktionen?
- c) Om vi istället har $f^{(n)}(x) \neq 0$, vad kan då sägas om antalet nollställen till funktionen?

Använd induktion för att bevisa ert påstående.

Studenternas arbete

- Formulerar korrekt hypotes
- Har god kunskap om induktionsbevis
- Har svårt att hitta passa in i mönster
- Om derivatan har m nollställen så kan funktionen ha högst $m+1$ nollställen
- Om p :te derivatan har högst m nollställen så har $(p-1)$ -derivatan högst $m+1$ nollställen
- Om p :te derivatan är skild från noll så har funktionen högst p nollställen

Faculty of Science

Diana: Men fortfarande, hur kan vi visa det? Vi kan derivera den där liksom, så får vi den där (pekar i Carls anteckningar på $f^{(n)}(x) \neq 0$ respektive $f^{(n+1)}(x) \neq 0$)


Carl: Mm.

Diana: Ja.

Carl: Ja, precis.

Carl: Och så, antingen är det färdigt eller så är det jättesvårt. (skratt)

Beth: Ja, vi har väl principen hur det liksom ska fungera...


 HÖGSKOLAN SKÖVDE
 Kerstin Pettersson

Faculty of Science

Diana: Om den är skild från noll, vad innebär det då för derivatan? Och om **funktionen** är skild från noll, vad innebär det då? ... om derivatan?

Carl: Nej, just det...

Diana: Det säger ju ingenting, eller liksom, det säger ju...

Carl: Nej det säger ju inte någonting...

Beth: Nej, det kunde högst vara ett nollställe, men den kanske inte har något nollställe liksom, och derivatan ändå...

Diana: Nej.

Alex: Men, men...

Alex: Det säger väl visst någonting, om en funktion är...

Diana: Nej.

Alex: ... skild från noll då säger det att, då korsar den inte...

Beth: Nej, den korsar inte.

Alex: Den korsar inte. Och då måste den vara antingen växande eller avtagande.

Diana: Den kan väl gå så här? (ritar) x-axeln kan ju alltid ligga under, det säger ju ingenting, funktionen kan ju hoppa och ha sig lite hur som helst här.




 HÖGSKOLAN SKÖVDE
 Kerstin Pettersson

Intuitiva idéer och formaliseringskrav

- Har och använder intuitiva idéer för funktion och derivata
- Ställer stora krav på formalisering av sina idéer
- Väl förtrogna med mall för induktionsbevis och vidhåller denna kraftigt
- Växlar mellan intuitiva idéer och formella resonemang
- Provocerande påståenden från gruppmedlemmar ger växlingar

Växlingar

- för att få stöd och kontrollera idéer
- för att få nya utgångspunkter
- för att reducera komplexitet
- för att driva problemlösningssprocessen

Slutsatser

- Algoritmisk kontext dominerande på inledande kurser
- Matematikstudenter kan utnyttja en formell kontext där intuitiva idéer utgör viktiga inslag
- Provocerande frågor initierar kontextväxlingar
- Förståelse av tröskelbegreppen kräver växlingar?

www.math.chalmers.se/Math/Research/Preprints
(välj Doctoral Dissertations)

Kerstin Pettersson
Högskolan i Skövde
kerstin.pettersson@his.se