

451b Äventyr med problemlösning

goran.emanuelsson@ncm.gu.se
lars.mouwitz@ncm.gu.se

Vad är ett problem?
Varför ska vi lösa problem?
Vem behöver kunna lösa problem?
Hur ser en bra lösning ut?



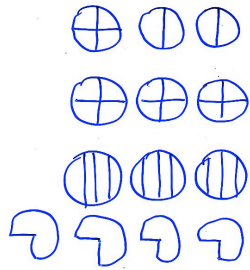
Den saknade kamelen

En man har 3 söner och 17 kameler. När han dör så visar testamentet att:
– äldste sonen ska få hälften,
– mellanbrodern en tredjedel,
– yngste sonen en niodel.
Sönerna är förtvivlade för att det inte går att dela på kamelerna utan att döda någon.

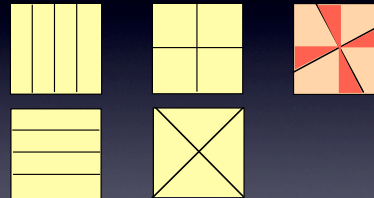
En vis man tycker synd om sönerna och låter dem låna en kamel vid uppdelningen. Då får den äldste 9, mellanbrodern 6 och den yngste 2, tillsammans 17 kameler. De kan då lämna tillbaka den lånade kamelen. Hur gick detta till?



Hur delar vi tre pajer på fyra?



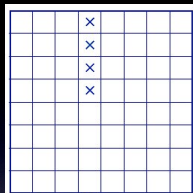
Hur kan du dela en kvadrat i fyra lika stora delar?



På hur många sätt kan du dela en kvadrat i fyra lika stora delar?



Hur många prickar har en gepard? kapitel 4



Efter Sam Lloyd i (Ulin, 2010)

Fyra söner skulle ära ett kvadratisk område. Enligt testamentet skulle sönerna dela området i fyra delar av samma storlek och form.



3 Chokladkaka för fem
En kaka är chokladglaserad på alla sidor utom den kvadratiska botten. Teenonen vill skära kakan i fem bitar så att var och en av de fem medlemmarna i familjen får samma mängd kaka och lika mycket glasyr. Snitten ska vara vinkelräta mot kakans översida. Alla snitt ska vara vinkelräta mot kakans översida och varje tomt ska få en del som är sammanhängande bit. Hur ska det gå till?

3 Chokladkaka för fem

En kaka är chokladglaserad på alla sidor utom den kvadratiska botten. Mor ska skära kakan i fem bitar så att var och en av de fem i familjen ska få samma mängd kaka och lika mycket glasyr. Snitten ska vara vinkelräta mot kakans översida. Alla ska ha en sammanhängande bit. Hur ska det gå till?

Dialoger om problemlösning, Nämnaren 4/1998

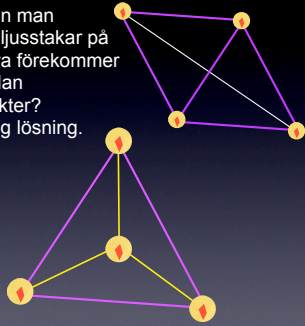
Syfte: Att ge intresserade och nyfikna läsare möjligheter att arbeta med problem och utbyta personliga reflektioner om tankar och ansträngningar med andra.

2009 DPL 40: Tre principer och fyra tankevaror	2008 DPL 37: Tre problem DPL 38: Heureka! DPL 39: Geometri	2007 DPL 36: Lagtävling DPL 35: Djurkalle! DPL 34: Ahal DPL 33: Vad är problemlösning?
2006 DPL 32: Konsten att generalisera DPL 31: Geometri – en del av vår kultur DPL 30: Kapten Oxensvans DPL 29: Utmanande problem med procedurer	2005 DPL 28: Klassiska problem DPL 27: Problem för nyfikna DPL 26: Professors inbjudan DPL 25: Spara och återvänd	2004 DPL 24: Osannolika systrar och opassande lekar DPL 23: Demokratisk modellering DPL 22: Problemlösning på bred front DPL 21: Behagliga och tjuvliga problem
2003 DPL 20: Jultrycto DPL 19: Matematik – ett pluggämne? DPL 18: Tankeäventyr i Underlandet DPL 17: Räkesdomen finns i betraktarens öga	2002 DPL 16: Situationer och frågor DPL 15: Osäker säkerhet eller säker osäkerhet DPL 14: Laborativ problemlösning DPL 13: För trettonde gången	2001 DPL 12: En fråga för alla! DPL 11: Problem med portkoden? DPL 10: Öppna problem DPL 9: Chokladkakeproblemet igen – igen!
2000 DPL 8: Chokladkakeproblemet, igen... DPL 7: Problem som utmanar DPL 6: Jogging i mentala landskap	1999 DPL 5: Problemlösningssyfte DPL 4: Fråga SMÅ:s sommarkurs DPL 3: Tankar kring broproblemet DPL 2: En tågräsa	1998 DPL 1: Problemlösare i gemenskap

DPL <http://ncm.gu.se/node/939>

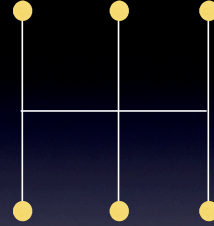
21 Ljusstakar på avstånd

På hur många sätt kan man placera fyra likadana ljusstakar på ett bord så att det bara förekommer två olika avstånd mellan ljusstakarnas mittpunkter? Figuren visar en möjlig lösning.



25 Snabba förbindelser

Städerna i figuren ska förbindas med varandra med ett kabelsystem så att varje stad kan få kontakt med varje annan stad. Kablarna kan också få bilda knutpunkter med tre eller flera kablar som i figuren. Den här lösningen är dock inte särskilt effektiv. Hur ska kablarna läggas för att den totala längden ska bli så liten som möjligt?



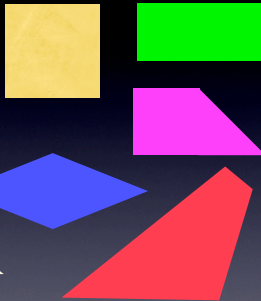
48 Intressant men fel

De gamla babylonierna lär ha använt en intressant, men felaktig, formel för att beräkna arean av fyrhörningar. De beräknade de två medelvärdena av fyrhörningens motstående sidolängder och multiplicerade resultaten.

- För vilka fyrhörningar stämmer formeln exakt?
- För vilka slag av fyrhörningar stämmer formeln som sämst?
- Kan du finna en korrekt areaformel där bara de fyra sidolängderna ingår?

Babylonierna beräknade medelvärden av fyrhörningens motstående sidolängder och multiplicerade resultaten.

- För vilka figurer stämmer formeln exakt?
- För vilka fyrhörningar stämmer formeln som sämst?



140, från DPL 40

Två ungdomar går på en järnvägsbro över en flod. När de gått $\frac{2}{3}$ av vägen hör de ett tåg tuta. En av ungdomarna springer åt ett håll, den andra i motsatt riktning. Lyckligtvis klarar båda att springa till en ändpunkt av bron precis i tid för att sätta sig i säkerhet när tåget kommer. Båda springer med farten 20 km/h.

Från vilket håll kom tåget och vilken fart hade det?



Nämnan nr 1, 2009

Ett rikt problem

- ... innehåller viktiga matematiska idéer / lösningsstrategier
- ... är lätt att förstå, god möjlighet att arbeta med för alla
- ... är en utmaning, kräver ansträngning och får ta tid
- ... kan lösas på olika sätt, olika strategier/representationer
- ... kan leda till att elever/lärare formulerar nya problem
- ... ger diskussion kring ovanstående utifrån elevernas olika lösningar

Rikedomen avgörs först i mötet med problemlösare.
Berikande problem ger vidgat synsätt på matematik/lärande.

1 MILJON KRONOR!

I en TV-pjäas kräver en kidnappare att få 1 miljon kronor i en väska som ska läggas på en parkbänk. Små sedlar ska användas.

– Räcker det med en kabinväska, om man använder 20-kronors sedlar?



Produktinformation
Brand: Samsonite
Material: Polypropylen
Mått: 40x55x20 cm
Volym: 32,0 l

Fermi:

Man kan räkna ut vad som helst på en tiopotens när.

Exempel: Antalet piano-stämmare i Chicago.

Hur många blad har trädet?



Hur många tranor är det vid Hornborgasjön?



- En dags regn i Dalsland = vattenbehov för Världen en månad?

Äventyr med Fermiproblem

- Problemens *öppenhet* ger tillfälle till kreativitet, att använda/inventera strategier eller upptäcka nya.
- Uppskattningar* har att göra med referenser men utmanar även andra aspekter av taluppfattning.
- Resultat *svårkontrollerade*. Svarens rimlighet behöver prövas: antaganden, uppskattningar, uträkningar, modeller och värderingar.

Referenser

Bengtsson, H-U. (2001). Fågelskit. *Nämnan* 28(1), s 24f.
Bergius, B. & Emanuelsson, L. (2008). Hur många prickar har en gepard? *NCM*
Nordell, B. (1994). Att uppskatta myggor. *Nämnan* 21(1), s 30f.
Ekenkrantz, L. (2005). Hur många blad har ett träd? *Nämnan* 32(2), s 37f.
Törefors, J. (1998). För allt smör i Småland. *Nämnan* 25(3), s 32f.

Andra Fermi-problem och beskrivningar av deras potential se t ex mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/shella2.html#2

Kängurun 2010

Torsdag 19 mars
Anmälan <http://ncm.gu.se>



Milou, förskoleklass – åk 2

Ecolier, åk 3 - 4

Benjamin, åk 5 - 7

Cadet, åk 8 - 9

Gymnasiets Cadet, kurs A

Junior, kurs B och C

Student, kurs D och E

Ecolier 17, Benjamin 15, Cadet 10, Junior 5

Det ligger sju kort i en låda. Kortet är nummerade från 1 till 7. Först tar Sofia upp tre kort. Sen tar Ali upp två kort. Det ligger alltså två kort kvar i lådan. Sofia säger sedan till Ali: "Jag vet att summan av talen på dina kort är ett jämnt tal." Vilken summa har talen på Sofias kort?



a 15 b 9 c 6 d 10 e 12

Känguru 2010

En talföljd börjar med de sju talen
11, 31, 41, 61, 71, 101 och 131.

Vilket åttonde tal förefaller naturligtast? (Ulin, 2010)

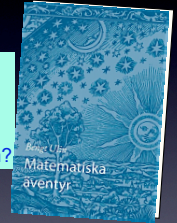
Fantasi och mönster?

Differenser 20, 10, 20, 10, 30, 30

Entalsiffran hela tiden 1

Alla primtal?

Primtal som slutar på 1 mellan talen?



Laborationen

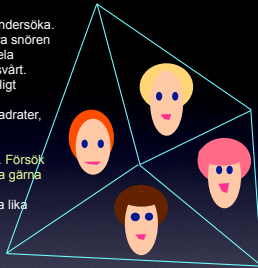
Fyra biologer vill ha lika stora områden att undersöka. Därför försöker de placera en käpp så att fyra snören dragna från käppen till områdets hörn ska dela området i fyra lika stora delar. Det visar sig svårt. Gör en så fullständig undersökning som möjligt av biologernas problem!

a) Undersök först enkla fyrhörningar som kvadrater, romber, rektanglar, parallelogrammer, parallelltrapets.

b) Undersök mer oregelbundna fyrhörningar. Försök avgöra när problemet är lösbart och motivera gärna med någon form av bevis.

c) Finns andra sätt att dela fyrhörningar i fyra lika stora delar, enkla metoder som fungerar för alla fyrhörningar?

d) Finns det en liknande metod för alla månghörningar?



Lars Mouwitz i Nämnaren, nr 2, 1998:
Att utveckla en problemställning

Paket för fyra bollar

Ta fram modeller eller skisser på förpackningar för 4 bollar åt en förpackningsfirma. Hur kan bollarna förpackas på ett attraktivt sätt? Förbered er på att presentera era idéer för firmans produktchef och marknadsförare.

Att tänka på:

Form, materialåtgång och design.

Hur ska ni packa in fyra bollar så att det går åt så lite material som möjligt?



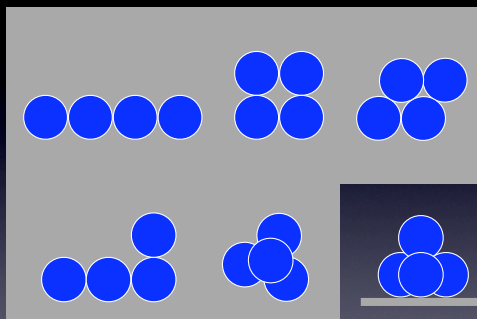
Paket för 4 bollar

I utvärderingen säger eleverna att det var en rolig och spännande uppgift. De blev intresserade att göra olika lådor och utvecklade också praktiskt kunnande att mäta, klippa och klistra under tiden.



Först tänkte vi ut en enkel form på en låda: vi trodde vi skulle göra samma form hela tiden, men så kom vi på att vi kunde göra olika former och då fick vi tänka om. Vi gjorde ett rätblock och sen en cylinder. Sen la vi två och två bollar mot varandra och ritade runt om. Det blev vägiga linjer och vi klippte ut en lång remsa som vi satte runt botten. Det var inte lätt att få det att passa. Men det gick! Vi konstruerade ett lock på samma sätt som botten.

Erik, Anna, Amadeus



Eko-problem december 2003

Ta fram modeller eller skisser på förpackningar för 4 bollar åt en firma. Hur ska du packa de 4 bollarna så att det går åt så lite material som möjligt?

I ekosändningar från kl 11, lösning 16.45 & 17.45
Läg också ut på NCM-webben med kommentar.

Problemet finns som 5 C



"formulera, gestalta, lösa problem ...
"geometriska begrepp, egenskaper, relationer..."

SAMMANFATTNING

Heuristiska principer

Leta efter mönster
Testa enkla eller extrema exempel
Använd olika representationer
Dela upp i typfall
Fundera på liknande problem
Gissa och pröva
Arbeta baklänges
Ställ upp en likhet
Försök hitta motsägelser
Lägg problemet åt sidan/byt strategi

Problemlösningsprocess

