

Elisabeth Rystedt & Lena Trygg

# Matematikverkstad

En handledning för laborativ matematikundervisning

2:a reviderade upplagan, 2013

*Elisabeth Rystedt* har drygt 20 års erfarenhet som lärare. Hon är från början mellanstadie lärare och har även arbetat som 7–9-lärare i matematik och svenska. Numera är hon anställd på Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, vid Göteborgs universitet, där hon bl a har varit projektledare för den nationella satsningen på Matematikutvecklare som genomfördes på uppdrag av Skolverket. Hon har ett särskilt intresse för kompetensutvecklingsfrågor samt laborativ matematikundervisning kopplat till språkutveckling.

*Lena Trygg* är textil- och matematiklärare som under 15 år undervisat i textilslöjd (åk 1–9) och i matematik (åk 6–9). Under sin tid som lärare byggde hon upp en matematiksal för elever i åk 6–9 och när hon sedan arbetade som lärarutbildare ökade hennes intresse för laborativ matematikundervisning ytterligare. Hon är idag anställd på NCM där hon ansvarar för matematikverkstaden. Hon är också redaktör för bl a Nämnaren och Strävorna.

*Elisabeth Rystedt* och *Lena Trygg* har tillsammans, på uppdrag av Skolverket, även skrivit kunskapsöversikten *Laborativ matematik – vad vet vi?* Den gavs ut 2010 och ger en bild av vilken forskning och vilket kunnande som finns om laborativa arbetssätt i matematikundervisningen. Båda författarna har också genomfört ett stort antal kurser i NCM:s regi kring hur man kan arbeta med matematikverkstäder i Sverige och även varit inbjudna som ledare för kurser i England, Belgien, Österrike, Mexiko och Indien.

Layout, omslag och foto: Anders Wallby  
Foto: Günther Dippe, Lena Trygg & Elin Flognman

NCM  
Göteborgs universitet  
Box 160  
405 30 Göteborg

Fax: 031 786 22 00  
e-post: [bestallning@ncm.gu.se](mailto:bestallning@ncm.gu.se)  
[ncm.gu.se/bestallning](http://ncm.gu.se/bestallning)

© 2013 NCM  
ISBN 978-91-85143-22-1  
Upplaga 2:1

Tryck: Ale tryckteam AB, Bohus, 2013

# Innehåll

## Förord

## Inledning

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| Matematikverkstad – vad är det? | 3 |
| Matematikverkstad – varför då?  | 4 |
| Matematikverkstad – hur då?     | 6 |
| Hands on – minds off?           | 7 |

## Uppbyggnadsarbete

|                        |    |
|------------------------|----|
| Hur börjar vi?         | 9  |
| Hur får vi tid?        | 13 |
| Hur kan lokalen se ut? | 14 |
| Vad kostar det?        | 16 |

## Laborativa material

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| Vilken är bakgrunden?                  | 17 |
| Vad är laborativa material?            | 19 |
| Varför använda laborativa material?    | 20 |
| Vad är bra material?                   | 22 |
| Hur och när kan material nyttjas?      | 24 |
| Vilka material bör finnas på skolan?   | 28 |
| Var kan man hitta laborativa material? | 29 |
| Hur kan vi skapa en struktur?          | 30 |
| Hur placeras material överskådligt?    | 31 |
| Var finns förslag på aktiviteter?      | 33 |

## Begrepp och uttrycksformer

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| Vad innebär begreppet begrepp?  | 35 |
| Vad är uttrycksformer?          | 37 |
| Vad är en begreppstavla?        | 41 |
| Vad innebär begreppsutveckling? | 47 |

## Förmågor

|                         |    |
|-------------------------|----|
| Vad menas med förmågor? | 53 |
|-------------------------|----|



|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| Laborativt arbetssätt i matematik                 |     |
| Vad säger styrdokumentet?                         | 67  |
| I vilka syften kan laborativa material användas?  | 71  |
| Hur kan laborativt arbete läggas upp?             | 80  |
| Hur kan lektioner läggas upp?                     | 92  |
| Hur kan ett planeringsunderlag se ut?             | 102 |
| "Kul matte" eller "riktig matte"?                 | 105 |
| Vilken betydelse har läraren?                     | 107 |
| Vad behöver läraren kunna?                        | 108 |
| Lärobok och elevers dokumentation                 |     |
| Vilken roll har läroboken i en matematikverkstad? | 111 |
| Varför ska elever dokumentera?                    | 116 |
| Hur kan elever dokumentera?                       | 117 |
| Till sist ...                                     | 139 |
| Referenslitteratur                                | 141 |

# Förord

Mycket har hänt i skolans värld sedan vi gav ut *Matematikverkstad – en handledning för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder* år 2005. Lgr 11, med en ny kursplan i matematik, har sjösatts och intresset för att arbeta laborativt har ökat stort under senare år. Inom MNT-satsningen har det varit möjligt att ansöka om medel från Skolverket för att utveckla matematikundervisningen. Under 2009–2011 inkom 3 888 ansökningar och ungefär hälften av dem innehöll sökorden "laborativ matematik" och / eller "matematikverkstad". I utvärderingen *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*, som genomfördes externt på uppdrag av Skolverket, visade resultatet att det finns ett starkt engagemang hos lärarna och ett stort behov av kompetensutveckling kring ett laborativt arbetsätt. Vi kan bara instämma och hoppas att vår revidering av Matematikverkstadsboken kan vara ett bidrag som underlättar för lärares möjligheter att utveckla det laborativa arbetssättet.

Vi har på uppdrag av Skolverket också tagit fram kunskapsöversikten *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* Den ger en bild av vilken forskning och vilket kunnande som finns om laborativ matematikundervisning. Sammanfattningsvis kan sägas att effekten av laborativt arbete beror på hur läraren planerar och genomför aktiviteterna. Det räcker inte med att bara plocka fram laborativa matematikmaterial eftersom det inte finns någon matematik i själva materialet. En forskare beskrev att förståelsen inte med automatik vandrar från elevens fingertoppar upp genom armen och till huvudet. Det är lärarens uppgift att lyfta fram matematiken, så att den blir synliggjord och möjlig för eleverna att uppfatta och förstå. Innehållet i Matematikverkstadsboken har ytterligare stärkts av det kunnande som redovisas i kunskapsöversikten.

Det finns en risk med laborativa aktiviteter. Om de bara blir ett kul avbrott på matematiklektionerna utan tydligt syfte och koppling till den ordinarie undervisningen, utnyttjas inte dess fulla potential. De kan bli enstaka "happenings", utan att eleverna får möjlighet att upptäcka matematiken i aktiviteterna. Det kan bli mer av att "göra" än av att "förstå". Vi vill att laborativ matematikundervisning ska bidra till att eleverna får ett ökat intresse – och ett fördjupat och bredat kunnande – i matematik.

## Vad är nytt i denna upplaga?

Denna upplaga har fått en ny undertitel – *En handledning för laborativ matematikundervisning*. Anledningen är att lärare som vi mött anser att boken ger ett betydligt bredare stöd för matematikundervisning än enbart för att bygga, använda och utveckla matematikverkstäder.

Boken har naturligtvis uppdaterats utifrån Lgr 11 och de största förändringarna gäller begrepp, uttrycksformer, förmågor och elevers dokumentation. Dispositionen i boken har till viss del ändrats och några avsnitt har blivit ersatta.

I kapitlet *Begrepp och uttrycksformer* har helt nya texter tagits fram. Begrepp betraktas som matematikens byggstenar och överallt betonas vikten av att varje elev får möjlighet att utveckla sin begrepps-förståelse. Men vad menas egentligen med ett matematiskt begrepp? Vad behöver undervisningen ta upp för att eleverna ska ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan dem? Ja, det är några av de frågeställningar som behandlas och en begreppstavla presenteras som stöd inför undervisningen av olika begrepp. En särskild fördjupning görs också i uttrycksformer, där betydelsen av att eleverna får arbeta med många olika uttrycksformer lyfts fram och laborativa aktiviteter på så sätt blir integrerade i den ordinarie undervisningen.

Ytterligare ett nyskrivet kapitel ägnas åt *förmågor*. En genomgång görs av olika matematiska förmågor och vad de innebär. Exempel ges på hur en och samma laborativa aktivitet kan ge elever möjlighet att vidareutveckla flera förmågor.

Texter om *elevers dokumentation* har omarbetats och fått större utrymme. Ett tiotal förslag visas på hur eleverna själva kan dokumentera. Det ger dem tillfälle att utveckla sitt språk och att få syn på sitt eget lärande. Vi ser elevers dokumentation som en kritisk faktor; när de laborativa materialen är bortplockade finns inget kvar som visar vilket lärande som skett. I samband med att eleverna dokumenterar sitt arbete finns ytterligare tillfällen för läraren att lyfta fram matematiken i aktiviteterna och det kan också bidra till att lärarna får ett rikare underlag vid analys och bedömning av elevernas kunskande.

Det finns webbhänvisningar till kompletterande material, men inga webbesök behöver göras för att man ska kunna tillgodogöra sig bokens innehåll. Till boken finns även en studiecirkel som består av ett antal träffar med utförliga och handfasta förslag på uppläggning, se [ncm.gu.se/mv-handledning](http://ncm.gu.se/mv-handledning).

Vi vill också rikta ett särskilt tack till Ola Helenius, Anette Jahnke, Lars Mouwitz och Kerstin Olofsson som med stort kunskande och engagemang hjälpt oss att reda ut begreppen i de nyskrivna texterna.

*Elisabeth Rystedt & Lena Trygg*

# Inledning

*Matte är kul när man fattar och tråkigt när man inte förstår.* Ja, så uttrycker många elever sin syn på matematik. Laborativa aktiviteter i en matematikverkstad kan skapa förståelse och leda till att matematikens olika sidor upptäcks och synliggörs.

Den här handledningen är tänkt som en resurs för lärare som är intresserade av att bygga upp en matematikverkstad på den egna skolan och som vill vidareutveckla ett laborativt arbetssätt i matematikundervisningen. På *Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM*, träffar vi lärare som besöker vår matematikverkstad. Många blir inspirerade till att göra något liknande på sin skola och ofta återkommer ungefär samma frågor om matematikverkstäder – vad, varför och hur?



Handledningen bygger på beprövad erfarenhet och genomgångar av relevant forskningslitteratur. I planeringsarbetet genomfördes också en undersökning av vilket stöd lärare vill ha när de ska bygga upp en matematikverkstad. Lärarnas önskemål har fått stort utrymme och handledningens uppläggning utgår från frågor och svar, samlade under följande huvudrubriker:

- Uppbyggnadsarbete
- Laborativa material
- Begrepp och uttrycksformer
- Förmågor
- Laborativt arbetssätt i matematik
- Lärobok och elevers dokumentation

Handledningen riktar sig i första hand till lärare som undervisar i förskoleklass, grundskola och motsvarande skolformer, men en stor del av innehållet kan också vara användbart i gymnasieskolan och vuxenutbildningen.

Handledningen är knuten till NCM:s webbplats, [ncm.gu.se/mv](http://ncm.gu.se/mv). Där finns bland mycket annat värdefull information om inredning, material, aktiviteter, länkar till aktiva matematikverkstäder och en studiecirkelhandledning.

Vi har valt att inte specifikt ta upp matematikmaterial kopplat till Fröbel, Montessori etc eftersom det finns väl beskrivet i annan litteratur. Arbete med miniräknare, mobiltelefoner, interaktiva skrivtavlor, datorer, surfplattor och annan media har naturligtvis också en viktig roll inom matematikundervisningen men behandlas inte här. I verkstaden är det lämpligt att även samla material avsett för matematikundervisning utomhus. Matematikverkstaden ger också goda förutsättningar för temaarbete och ämnesintegrering. På webbsidan [ncm.gu.se/slojd](http://ncm.gu.se/slojd) ges exempel på samverkan mellan matematik och slöjd.

Vi vill redan i inledningen poängtera att detta är en handledning för uppbyggnad av matematikverkstäder och en utveckling av ett laborativt arbetssätt, inte en exempelsamling med förslag på aktiviteter. De exempel som ges ska i första hand ses som illustrationer vilka belyser texten.

Vid vardagliga diskussioner om arbete i en matematikverkstad förekommer ord och begrepp som inte alltid är helt självklara. Ett



exempel är *materiel* – *material* som tidigare definierats på två skilda sätt. Numera kan material även betyda materiel. I Nationalencyklopedins ordbok förklaras *materiel* som utrustning för verksamheten medan *material* betyder både råämne för bearbetning och materiel. Här har vi valt att använda material synonymt med materiel.

Begreppen arbetssätt och arbetsformer hålls ibland åtskilda, men vår erfarenhet är att när lärare idag diskuterar arbetssätt så inbegrips även arbetsformer. I de kommande kapitlen innefattar därför arbetssätt också arbetsformer.

Ett begrepp som ofta återkommer i den följande texten är *laborativa aktiviteter* och därför kan det vara intressant att titta lite närmare på de ingående ordens historiska ursprung. *Laboration* innebär försök eller experiment som ofta görs i undervisningssyfte och ordet är besläktat med det latinska 'laborare' som betyder arbeta. Som kuriosas kan en jämförelse göras med det engelska 'labour' som har samma ursprung och översätts med arbete. *Aktivitet* är en verksamhet som kräver aktivt deltagande och ordet kommer från det latinska 'activus' som betyder praktiskt verksam.

Efter detta etymologiska nedslag kan laborativa aktiviteter i verkstaden definieras som verksamheter där elever arbetar praktiskt med försök och experiment, vilka har ett specifikt syfte för undervisningen i matematik.

## Matematikverkstad – vad är det?

En *matematikverkstad* kan se ut på många sätt, men oavsett dess yttre form ska den locka fram elevers nyfikenhet, fantasi och kreativitet och ge dem positiva upplevelser och erfarenheter av matematik. Elevernas lärande är centralt och aktiviteterna ska leda fram till ett vidgat och fördjupat kunnande i matematik. En verkstad är till för *alla* elever – såväl de som behöver extra utmaningar som de i behov av särskilt stöd.

Den optimala matematikverkstaden är till det yttre en större, inspirerande inredd och med laborativa matematikmaterial välfylld lokal vars innehåll ständigt utvecklas av lärare och elever. På en del skolor finns bara förutsättningar för "en skrubbi i källaren", ett avskilt utrymme i en större studiehall, en del av ett klassrum eller ett välorganiserat skåp och det mesta är naturligtvis bättre än inget. Ibland kan verkstaden främst fungera som materialrum, vilket kompletterar klassrum och matematiksalar. Vagnar och större mobilmateriallådor är andra alternativ som förekommer. Om du vill veta hur

matematikverkstäder runt om i landet ser ut kan du gå till webbsidan [ncm.gu.se/aktiva\\_mv](http://ncm.gu.se/aktiva_mv).

---

En skola har valt Sigma som namn på sin matematikverkstad. Sigma – där man lär sig matematik. På en annan skola har verkstaden fått namnet Origo. Andra benämningar på en matematikverkstad kan vara matematikrum, matematek, mattesmedja, matestuga, matelabb eller idéverkstad.

---

Att en matematikverkstad är uppbyggd ger inga garantier för att det sker en utveckling av elevers lärande i matematik. Om den i första hand ses som ett utrymme med en mängd ”kul grejer” utnyttjas inte dess fulla potential. Avgörande är att både lärare och elever är medvetna om syftet med arbetet i verkstaden och att matematikinhållet är i fokus – precis som inom all matematikundervisning.

Att arbeta laborativt kan också betraktas som ett förhållningssätt till undervisning i matematik. Det innebär, enligt vårt sätt att se, att ämnesdidaktiskt medvetna lärare uppmärksammar de delar i styrdokumentet som vinner på ett laborativt arbetssätt. Många av de idéer som beskrivs i denna handledning kan därför med fördel också tillämpas i andra lokaler än verkstaden.

## Matematikverkstad – varför då?

Det brukar sägas att ”repetition är all inlärnings moder” men travesteringen ”variation är all inlärnings moder” passar bättre i en matematikverkstad. Ett laborativt arbetssätt kan vara *ett* sätt bland flera för att vidga synen på matematikämnet. Genom att använda *flera* arbetssätt ges *fler* möjligheter till olika sätt att lära och *fler* elever kan upptäcka matematikens spännande sidor.

Den största utvecklingspotentialen i svensk matematikutbildning finns hos våra barn och ungdomar. Deras nyfikenhet, arbetsvilja och framtidsdrömmar är de viktigaste drivkrafterna i allt utvecklingsarbete.

Matematikdelegationen

---

## Argument för laborativt arbetssätt

Det är enkelt att hitta argument för att elever ska få möta ett laborativt arbetssätt på sina matematiklektioner.

- *Undervisning i enlighet med läro- och kursplan.* Det finns starkt stöd för ett laborativt arbetssätt i styrdokumentet.
- *Öka intresse för – och kunnande i – matematik.* Både nationella och internationella undersökningar visar att svenska elever inte når upp till önskvärda nivåer i ämnet matematik.
- *Skapa variation i undervisningen.* För att främja elevers begreppsutveckling behöver de få möta samma matematiska begrepp genom olika uttrycksformer, som exempelvis med hjälp av laborativa material, bilder, ord, omvärldssituationer och symboler.
- *Vidga synen på matematik.* Studier visar att den svenska matematikundervisningen i högre grad än i andra länder består av att räkna uppgifter i läroboken. Det leder till att alltför många elever uppfattar matematik enbart som siffror och bokstäver i en lärobok. Fler elever behöver få upptäcka matematikens spännande och fascinerande sidor.
- *Individualisera – både extra stöd och extra utmaningar.* Det är oftast enkelt att variera svårighetsgraden på laborativa aktiviteter. Ett exempel är när alla elever arbetar med samma aktivitet, men inom olika talområden.
- *Locka fram nyfikenhet och kreativitet.* Beprövad erfarenhet visar att laborativa material i sig kan väcka intresse och att aktiviteter kan leda till att elever själva börjar fundera över frågor som Varför blir det så? Stämmer det alltid? Vad händer om ...? etc.
- *Stödja språkutveckling.* Alla elever gynnas av att deras språk blir rikare och alltmer nyanserat. I en matematikverkstad där material exponeras synligt och åtkomligt, finns goda möjligheter att göra kopplingar mellan informellt vardagsspråk och formell matematisk terminologi.
- *Inspirera till lokal skolutveckling.* I en matematikverkstad kan lärarens kunnande och material samlas. Matematikverkstaden

kan utgöra ett nav för kollegialt lärande i syfte att elever ska uppfatta skolans matematikundervisning som relevant, lärorik, engagerande och spännande.

Av tradition har matematikämnet många gånger fått tidsmässigt bra schemapositioner men tyvärr schemalagts sent avseende lektionssalar. Följden har blivit att matematiklektioner inte sällan genomförs i lokaler avsedda för andra ämnen eller annan verksamhet. Matematikverkstaden ger möjlighet att synliggöra matematikämnet i skolan.

## Matematikverkstad – hur då?

Initiativ till att bygga en matematikverkstad tas ofta av engagerade lärare i samråd med kollegor och skolledare. När uppbyggnadsarbetet är slutfört erbjuds sedan all övrig personal som ska använda verkstaden möjlighet att vidareutveckla sitt kunnande om arbetssätt, aktiviteter och material. Många skolor organiserar detta internt genom att verkstadsansvariga lärare får riktade uppdrag av skolledare att ansvara för någon form av kompetensutveckling och blir kompenserade för arbetet. Andra skolor väljer att börja med att genomföra en studiecirkel, t ex *Matematikverkstad – ett laborativt arbetssätt* för att få en gemensam kunskapsgrund och först därefter börja bygga upp verkstaden. Oavsett vilket sätt som väljs, visar erfarenhet att det är lämpligt att särskilja arbetet med uppbyggnad av verkstad och kompetensutveckling tillsammans med kollegor – annars kan arbetsbördan bli alltför stor.

Att i ett tidigt skede formulera en gemensam vision för skolans matematikverkstad har flera fördelar. Syftet med visionen är att peka ut en riktning och ge en bild av hur det långsiktiga målet ser ut. En vision verkar som regel ouppnåelig, eftersom hänsyn inte behöver tas till t ex ekonomi, organisatoriska eller praktiska svårigheter. Men genom att formulera en vision kan målet bli tydligare och om det eventuellt finns olika uppfattningar kan de uppmärksammas och diskuteras så att det finns en gemensam bild av det kommande arbetet. Visionen kan sedan brytas ner i allt mindre och mer konkreta delar och ligga till grund för arbetet med att bestämma syfte och mål för verkstaden. Istället för *Vision* kan det mer verklighetsnära uttrycket *Förväntade resultat och effekter* användas.

I denna handledning beskrivs inledningsvis det praktiska arbetet med att inreda och utrusta verkstaden. Laborativa material diskuteras och hur de kan fungera som stöd och stimulans för elevers lärande.

Därefter görs en genomgång av vad som menas med matematiska begrepp och hur de kan representeras med hjälp av olika uttrycksformer. En begreppstavla har tagits fram för att ge stöd för undervisning om matematiska begrepp. Ett kapitel tar upp förmågor och exempel ges på hur elever kan få möjlighet att utveckla flera skilda kompetenser utifrån en och samma laborativa aktivitet. I ett annat kapitel påvisas det stöd som finns för laborativa arbetssätt i styrdokumentet och hur undervisningen kan struktureras och praktiskt läggas upp så att eleverna får möjlighet att uppfatta matematiken i aktiviteterna. Avslutningsvis finns ett kapitel med förslag på hur eleverna kan dokumentera och utvärdera sitt lärande utifrån det laborativa arbetet.

## Hands on – minds off?

Ibland används uttrycket *hands on – minds off* när matematikverkstäder diskuteras. Att det i verkstaden råder febril aktivitet under trevliga former behöver inte betyda att eleverna verkligen lär sig matematik. Aktiviteter och laborationer uppfattas ofta som ”en kul grej”. Det kan med andra ord vara enkelt att skapa tillfällen för *hands on*-arbete, men risken finns att det stannar vid aktiviteter där det kunskapsutvecklande som ska utvecklas åsidosätts: *minds off*. Det kan bli mer av att göra än av att förstå och lära. Läraren måste vara medveten om denna risk, uppmärksamma de återvändsgränder som kan uppstå och istället genomföra en matematikundervisning med fokus på mål och innehåll: *minds on*.

Laborativa material är ingen mirakelkur i sig utan läraren måste göra medvetna, didaktiska val utifrån frågor om

- *vad* som ska läras – vilket matematikkunskapsområde eleverna ska utveckla
- *varför* det ska läras – i vilket sammanhang aktiviteten ingår
- *hur* det ska läras – på vilka sätt eleverna ska arbeta för att utveckla förståelse.

Det laborativa arbetet ska fungera som en länk mellan det konkreta och abstrakta, men det sker inte med automatik. Eleverna behöver både stöd och utmaningar för att upptäcka matematiken i laborativa aktiviteter så att kunskapsutvecklandet kan generaliseras och användas i andra situationer. Det är lärarens uppgift att hjälpa eleverna att stärka dessa

samband. Ett svårt, men spännande uppdrag! Vi hoppas att denna handledning kan bidra till att arbetet i en matematikverkstad blir:  
*Hands on – minds on!*

# Uppbyggnadsarbete

Entusiasm och engagemang är, som i så många andra sammanhang, förutsättningar för arbete med och i en matematikverkstad. Att bygga, använda och utveckla en matematikverkstad är en omfattande och ibland stressig uppgift, men också mycket inspirerande och en källa till stor glädje och kollegial yrkesutveckling. Var alltid några stycken som hjälps åt – ha roligt tillsammans!

## Hur börjar vi?

Skilj på det arbete som hör till uppbyggnad av matematikverkstaden och det fortlöpande arbete som sedan behövs för drift och utveckling. Det är absolut nödvändigt att skolledare från början är delaktiga, de ska både stötta och driva på, kortsiktigt och inte minst på lång sikt.

En projektgrupp bör – för att inte säga måste – ansvara för uppbyggandet, men ska också se till att övriga kollegor har insyn och möjlighet att påverka arbetet. Gruppen kan utifrån den gemensamt formulerade visionen, se sid 6, skriva en projektplan över uppbyggnadsarbetet för att klargöra uppläggning och ansvarsfördelning. Förväntningarna anpassas då till verkligheten och missförstånd kan undvikas.

---

To teach effectively a teacher must develop a feeling for his subject; he cannot make his students sense its vitality if he does not sense it himself. He cannot share his enthusiasm when he has no enthusiasm to share.

*George Pólya*

---

## Projektplan

- *Syfte. Varför* gör vi det här? *Vad* ska verkstaden användas till, *vilka* ska använda den och *hur* ska den användas? Exempel finns under rubriken *Fortsatt verksamhet* på sid 12.
- *Mål. När* ska matematikverkstaden vara färdig för att börja användas? Vad menar vi här med "färdig"? Glöm inte att ställa frågan om målen är realistiska. Väldefinierade mål underlättar samarbetet, ökar motivationen och projektet får ett tydligt slut. Alla vet när det är dags att låta projektet ingå i den ordinarie verksamheten.

---

### Mål ska vara

- |                                                                   |                |
|-------------------------------------------------------------------|----------------|
| • milstolpar för att förverkliga en vision                        | • realistiska  |
| • en naturlig följd av visionen                                   | • meningsfulla |
| • mätbara                                                         | • förståeliga  |
| • tidsbestämda                                                    | • hanterbara   |
| • tydliga, dvs det ska gå att svara ja eller nej då de utvärderas |                |
- 

- *Avgränsningar.* Att göra avgränsningar är kanske det svåraste. Lika viktigt som att veta vad som ska göras, lika viktigt är det att vara överens om vad som inte ska göras inom projektets ram. Ett exempel: I samband med uppbyggnad av en verkstad efterfrågas kompetensutveckling av de lärare som ska använda den. De personer som bygger upp matematikverkstaden bör inte samtidigt – inom ramen för uppbyggandet – bedriva kompetensutveckling för sina kollegor. Detta bör ske antingen parallellt i ett eget projekt eller när verkstaden tas i bruk. Det sistnämnda rekommenderas.
- *Resurstillgång.* Hur mycket pengar är avsatta till matematikverkstadens uppbyggnad? När finns tillgång till lokal? Hur mycket tid finns för var och en? Andra resurser? Gör en inventering av inredning och material som redan finns på skolan och som kan placeras i verkstaden. Vem ska göra vad och ansvara för vad? Hur kan projektgruppens kompetens användas på bästa sätt?



- *Projektledare.* Behövs en projektledare eller går det bra ändå? Erfarenhet visar att det är en fördel när *en* person är ytterst ansvarig för att det som ska göras verkligen blir gjort.
- *Skolledning.* Vad förväntas av ledningen? Vad kan skolledningen förvänta sig av projektgruppen? Ska skolledare vara med i gruppen? Om inte, bestäm i det inledande arbetet när avstämningar ska göras.
- *Delaktighet.* Hur och när ska kollegor informeras och bli delaktiga? Vad förväntas av dem? Vad kan kollegorna förvänta sig av projektgruppen?
- *Nyckelpersoner.* Finns viktiga personer eller miljöer som kan vara en tillgång för projektet? Det kan vara någon på en annan skola med erfarenhet av motsvarande arbete eller en stödperson från högskolan. Vilka övriga personer, förutom projektgruppens medlemmar, ska vara inblandade? Finns det någon som kan orsaka bekymmer?
- *Tidsplan.* Planera bestämda mötestider. Det är alltid enklare att ställa in ett möte som inte är nödvändigt än att snabbt hitta en tid som passar alla. Bestäm även i detta sammanhang vem som ska göra vad, när det ska göras och när det ska vara klart.
- *Dokumentation.* Vilken form av dokumentation behövs? Förutom minnesanteckningar från möten bör det finnas en bilaga med en åtgärds- och beslutsförteckning. Har gruppen behov av annan dokumentation, tex för information som sprids via skolans webbplats?
- *Kritiska punkter.* Vilka är projektets svaga punkter? Gör en lista på det som skulle kunna hända men som inte får inträffa. Fundera sedan på hur dessa eventuella kritiska punkter ska kunna undvikas eller hanteras om de ändå uppstår. Exempel skulle kunna vara föräldraledigheter, byte av skolledning, försvagad ekonomi eller svårigheter med att frigöra tid för lärarna.
- *Utvärdering.* Vad ska utvärderas och när? Varför och för vem görs utvärderingen? Hur ska den genomföras och av vem eller vilka? Hur ska resultatet återkopplas och följas upp?

## Fortsatt verksamhet

Diskutera tidigt hur matematikverkstaden ska användas och vilka regler som ska gälla. Här är några exempel:

- Alla klasser får bestämda verkstadstider varje vecka. Övriga tider är bokningsbara.
- Arbets- eller lärarlag planerar bokning av matematikverkstaden för en period i taget utifrån behov och resurser.
- Matematikverkstaden bemannas med lärare som tar emot grupper av elever efter överenskommelse med klass- eller ämneslärare.
- Matematikverkstaden nyttjas främst som materialrum och kompletterar material som finns i klassrum eller matematiksal. I de fall material ska finnas till utlåning ställs krav på fungerande rutiner.
- Några salar får omfattande utrustning och matematikverkstaden används för mer specifika ändamål.
- Små skolor kan gå ett steg längre. Undersök om det med god schemaläggning och samarbete finns möjlighet att all matematikundervisning kan förläggas till matematikverkstaden. Om inte, kan det kanske fungera om det istället för en verkstad görs i ordning två välutrustade matematiksal som har en del material gemensamt.

## Ansvar

Bestäm vem som ansvarar för vad. Att alla ska ansvara för allt är ett ineffektivt sätt att fördela arbete. Skilj på arbete för att underhålla och utveckla verkstadens innehåll och den matematikundervisning som sker där. Några exempel:

- Inom skolan finns idag olika former av karriärtjänster för t ex utvecklingsuppdrag och mentorskap för nyutbildade lärare. Kanske kan ansvar för utveckling av skolans matematikverkstad ingå i en sådan tjänst.

- En lärare ansvarar för ordning och praktiskt arbete. En annan lärare ser till att framgångsrika aktiviteter dokumenteras och sprids till kollegor inom och mellan skolor.
- Ett lärarlag delar på arbetet efter vars och ens intresse och önskemål: en person ansvarar för litteratur, en för inköp, en för praktisk tillverkning, en ser till att förbrukningsmaterial fylls på, en håller sig à jour med aktuella kurser, konferenser etc.
- Annan personal tar hand om praktiskt arbete med inköp och ordning medan lärare sköter det pedagogiska arbetet.
- Elever görs delaktiga. De kan få egna ansvarsområden, utprova nya idéer, komma med förslag och synpunkter samt hjälpa till med tillverkning av material. På en skola utannonserades bland eleverna vaktmästartjänster i matematikverkstaden. I annonserna framgick arbetsuppgifterna tydligt och att lönen bestod av att "vaktmästarna" fick en egen reserverad tid varje vecka i verkstaden. Lärarna blev glatt överraskade av det stora antal ansökningar som kom in och löste det genom att dela upp läsåret i perioder så att flera vaktmästargrupper kunde få "anställning".
- Föräldrar bjuds in till exempelvis kvällar med matematik. Låt dem bidra med idéer som kan utveckla matematikverkstaden och dess användning, hjälpa till med materialtillverkning, anskaffning av material mm.

## Hur får vi tid?

När lärare får frågan om vilket stöd de önskar är det vanligaste svaret: *Vi behöver tid!* Tid för diskussion med kollegor om planering och till den praktiska uppbyggnaden. Tid också för att hitta, skaffa, organisera och sätta sig in i hur olika material fungerar. Tid för att arbeta fram uppgifter och aktiviteter: att prova, dokumentera och utvärdera.

Tid för ett speciellt ändamål, tex att bygga upp en matematikverkstad, kan ibland ordnas genom prioritering och omfördelning av de resurser som finns. Konferenstid kan avsättas och kompetensutvecklingsdagar utnyttjas. Ett annat sätt är att omfördela arbetsuppgifter inom arbetslaget. Tillfälliga resurser kan ibland frigöras för uppbyggnad

av en matematikverkstad. På kort sikt, tex under en begränsad uppbyggnadsperiod, kan vikarier vara en lösning på tidsproblemet. På lång sikt är det inte hållbart att enbart lita till extra resurser.

Erfarenhet påvisar betydelsen av att de lärare som bygger och utvecklar matematikverkstaden får utrymme till det i sin tjänst.

## Hur kan lokalen se ut?

Idéer om lokalens utformning kan man få genom att besöka redan fungerande matematikverkstäder. Via sökning på ordet matematikverkstad på nätet går det också att göra virtuella besök och se hur verkstäder på andra skolor ser ut. På NCM:s matematikverkstadssidor finns en karta med kontaktuppgifter till matematikverkstäder i Sverige.

Ett allmänt råd är att ha en lokal som ger gott om svängrum. Även om det ibland kan finnas förutsättningar för undervisning i mindre grupper bör det finnas möjlighet för hela klasser att vara i verkstaden samtidigt. Vilken inredning som behövs beror naturligtvis på hur lokalen ser ut, vad som redan finns och hur verkstaden ska användas. En genomtänkt färg- och ljussättning bidrar till en positiv och kreativ arbetsmiljö.

Möblering som ger stora arbetsytor och rejäla förvaringsutrymmen är en förutsättning för att matematikverkstaden ska fungera på bästa sätt. Möblerna bör vara flexibla, de ska lätt kunna flyttas om beroende på ändamål. Fundera igenom om det är en fördel att borden är hopfällbara eller av klaffmodell och om stolarna ska vara stapelbara. Eftersom antalet elever ofta varierar kan det vara bra med en grunduppsättning möbler som kan kompletteras med tex pallar. Hurtsar med hjul medför flexibilitet. Skåp eller hyllor kan placeras så att de avskärmar en lugn vrå.

Med god tillgång till material är det nödvändigt med förvaringsutrymmen i form av skåp och lådor. Om allt material är synligt kan det ge ett oroligt intryck och det finns elever som då får svårt att koncentrera sig. Det går att göra innehållet överskådligt trots att allt inte är synligt. I så kallade grytskåp rymms mycket material, även sådant som är skrymmande. Köksskåp av låg modell kombinerat med bänkskivor ger både förvaringsutrymmen och praktiska arbetsytor i lämplig arbetshöjd. Vägghasta skåp lämnar fritt golvutrymme i mitten av rummet. Länkar till inredningsföretag finns på [ncm.gu.se/mv\\_inredning](http://ncm.gu.se/mv_inredning).

Förutom skåp och lådor behöver det finnas hyllor, anslagstavlor och minst en magnetisk whiteboard. En interaktiv skrivtavla kan säkert komma till god nytta. Böcker placeras lättillgängligt för att locka till läsning. Några hyllplan, tex i form av tidskriftshyllor, kan reserveras för exponering av intressanta böcker. Anslagstavlor gör det möjligt att uppmärksamma aktuella händelser, nytt material, elevarbeten, spännande bilder i form av vykort och affischer etc – det ska ofta hända något på väggarna. Inspirationsmaterial ska vara både estetiskt tilltalande och intresseväckande. Finns tillgång till vatten och avlopp ger det ytterligare möjligheter i undervisningen.

Det är nödvändigt att var sak har sin plats. Idéer om hur material kan organiseras på hyllor, i skåp och lådor ges i kapitlet *Laborativa material*. Att märka upp allt material och dess plats är tidskrävande men underlättar för alla att hålla ordning.



## Vad kostar det?

Jämfört med utrustning för flera andra skolämnen medför en matematikverkstad förhållandevis låga kostnader. Mycket material är billigt och ibland till och med gratis, som kapsyler, tomkartonger, tändstickor, reklammaterial, tärningar och kortlekar. Samtidigt finns det ett rikt utbud av pedagogiska material på marknaden, så kostnaderna kan variera starkt beroende på vilka inköp som görs och hur mycket material som finns sedan tidigare. Lokalhyra och personal med speciellt ansvar för verksamheten står i regel för de största kostnaderna. Ska matematikverkstaden innehålla omfattande teknisk utrustning som datorer, datorprojektor, interaktiv skrivtavla, dokumentkamera och avancerade räknare stiger kostnaderna naturligtvis snabbt.



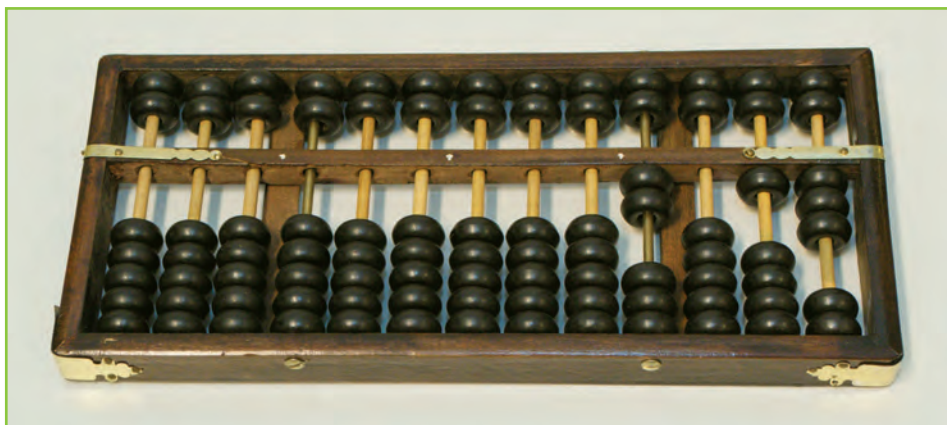
# Laborativa material

Laborativa material ska fungera som stöd och stimulans i undervisning och för inläring av grundläggande matematiska begrepp och idéer. Att välja, köpa in, tillverka och strukturera laborativa material upptar en stor del av arbetet med en matematikverkstad. Att sedan lära känna och använda material ändamålsenligt och effektivt är en än större utmaning.

## Vilken är bakgrunden?

Material har alltid använts för att hålla ordning på antal och som redskap för beräkningar. Tidigt brukades tex inbrända märken på djurben eller knutar på snören för att illustrera antal. Beräkningar utfördes med stöd av handens fingrar eller med hjälp av föremål.

Konkret material för underlättande av räkneoperationer har en lång historia även om det inte alltid varit helt accepterat. Exempelvis var abakus, räknepord med räknepennningar och kulram tidigt i bruk men användningen av dem försvann successivt när skriftliga räkneметoder växte fram. Konkret material trängdes undan när siffreräkning gjorde sitt intåg och boktryckarkonsten utvecklades.





Johan Amos Comenius framhöll redan på 1600-talet betydelsen av att använda olika sinnen och inte enbart ord i undervisningen. I boken *Didactica Magna* – stora undervisningsläran betonade han att all undervisning inledningsvis bör utgöras av saklig åskådning, tex i form av konkreta föremål. Först därefter bör orden tillkomma och ge ytterligare förklaring.

Den gyllene regeln för lärare: allt skall så mycket som möjligt visas fram inför sinnena.

Comenius

De två huvudprinciperna i *Didactica Magna* är konkret undervisning och samtalet som arbetssätt. Båda har relevans för arbete i en matematikverkstad.

---

### J. A. Comenius (1592–1670)

Tjeckisk pedagog och teolog som bl a verkade för en gemensam undervisning för alla samhällsklasser och för såväl pojkar som flickor.

---

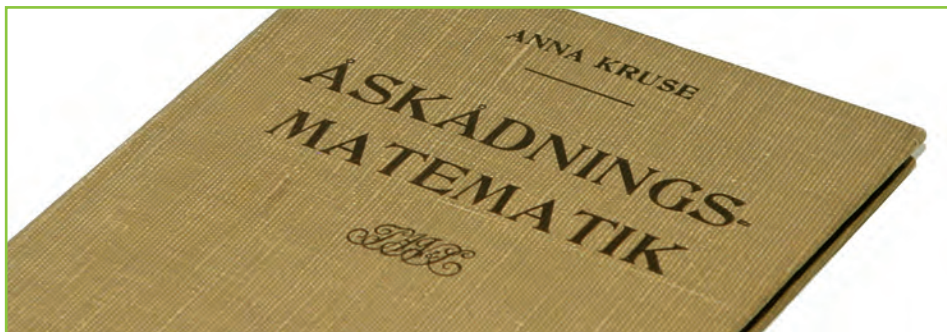
## ”Inget minneskunskapsplugg”

Anna Kruse beskriver i början av 1900-talet i sin bok *Åskådningsmatematik* hur material och stoff, snarare än lärares förklaringar och struktureringar, ska leda eleven till matematiska upptäckter där konktionen ska bidra till förståelse.

Stoffet skall läggas så tillgängligt, att barnen lätt kunna gripa det, så att de få en känsla av att de själva göra upptäckterna. De skola aldrig i matematiken få något färdigt. Den får ej vara något minneskunskapsplugg. Ja, jag går så långt, att jag skulle vilja säga: Barnen skola aldrig få någon regel för hur de skola göra. De skola ej ha några förklaringar, allt ska vara så klart och åskådligt, att det för dem blir en erfarenhetskunskap, som därför stannar i minnet, som skapar sin egen regel och därför ej behöver förklaras. – Man brukar tala om att barnen skola inlära det eller det och sedan inöva det. Jag skulle vilja säga, att de skola i ordets egentliga bemärkelse inse matematiken och sedan inöva den.

Kruse





**Anna Kruse** (1861–1931)

Lärarinna och senare föreståndarinna för Brummerska skolan i Stockholm. Hennes bok *Åskådningsmatematik* betraktas som ett klassiskt arbete om matematikundervisning. Boken finns även i nytryck från år 2010.

Under 1900-talet bidrog flera faktorer till att laborativa material blev allt vanligare i matematikundervisningen. En av anledningarna var att tidigare föreställningar om lärande utmanades och vikten av förståelse lyftes fram. Elever behöver göra många olika erfarenheter som senare ligger till grund för lärande på en mer abstrakt nivå.

## Vad är laborativa material?

I den matematikdidaktiska litteraturen finns inte laborativa matematikmaterial entydigt definierade, men ett vanligt sätt är att dela in dem i två huvudgrupper:

- *vardagliga föremål* vilka finns som verktyg eller föremål i vardagen, arbetslivet och naturen
- *pedagogiska material* som är speciellt tillverkade – kommersiellt eller av lärare och elever – för matematikundervisningen.

Att skilja på vardagliga föremål och pedagogiska material kan först tyckas enkelt, men snart uppstår frågan var gränsen egentligen går mellan dem. Se på uppräkningsen av följande material:

... stenar, kottar, snäckor, bönor, makaroner, knappar, tändstickor, kapsyler,  
hushållsmått, tärningar, lego, geostrip, multilink, kubikdecimetermodell ...

*Geostrip* och *multilink* är produktnamn för hopsättbara plastremsor respektive byggbara kuber.

Det är inte alldeles självklart vad som hör till vilken huvudgrupp. Vardagliga föremål som stenar får en pedagogisk funktion när de används för att visa hur oregelbundna kroppar kan volymbestämmas. Elever sänker ned en sten i ett vattenfyllt kärl, samlar upp och mäter den mängd vatten som rinner över, jämför med den ursprungliga mängden vatten och kanske dessutom gör omvandlingar mellan ml och  $\text{cm}^3$ .

Ett pedagogiskt material kan hanteras som ett vardagligt föremål, tex om en kubikdecimetermodell fylls med vatten och får fungera som blomkanna. Det som avgör i vilken grupp ett material placeras är *hur* och i vilket *syfte* det används. Materialet får sin mening i det sammanhang där det brukas.

I denna handledning förekommer *laborativa material* som samlande uttryck för både vardagliga föremål och pedagogiska material. Vi har också valt att utöka med spel som är lämpliga i en matematikverkstad.

## Varför använda laborativa material?

Det finns många skäl till att arbeta laborativt i matematikundervisningen, men det bör poängteras att laborativa material i sig inte utvecklar elevers kunskande. Gunnar Nilsson har i sin avhandling *Att äga pi* funnit att arbete med laborationer har en potential för att skapa förståelse och nya insikter, men för att så ska ske måste vissa villkor vara uppfyllda. I likhet med flera andra forskare har han kommit fram till att lärarens roll är central och att det har stor betydelse på vilket sätt läraren leder laborationen, ställer utmanande frågor och pekar på kritiska punkter. Andra villkor är att det finns utrymme för att prova olika lösningar och att det förs en diskussion mellan dem som arbetar laborativt.

Material är i sig inte konkretiserande – det är i undervisningen som de får en innebörd. På kommande sidor diskuteras hur arbete med laborativa material kan ges mening och underlätta för elever att nå förståelse.

## Mekanisk användning

Det händer att elever hanterar laborativa material på ett mekaniskt sätt, med bara ytligt lärande som följd och utan möjlighet att generalisera. Detta kan bero på hur konstruktören väljer att visa ett matematiskt begrepp. Elever kanske inte uppfattar materialet på samma sätt och därför behöver läraren lyfta fram och problematisera elevernas varierande tolkningar och alternativa sätt att uppfatta både material och begrepp.

Ibland saluförs ett laborativt material med huvudsaklig betoning på att det ska göra matematikundervisningen rolig. Lärare bör då fundera över syftet med produkten och granska försäljningsargumenten. Det bör påpekas att det inte enbart är kommersiella material som kan leda till att eleverna sysselsätter sig utan att ha tankarna med sig. Det gäller alla material och aktiviteter. Om en elev väger ett antal föremål utan att närmare fundera över hur de känns i handen eller reflektera över att små föremål faktiskt kan väga mer än större, lär det knappast leda till nya insikter.

Sambandet mellan elevens laborativa arbete och lärande i matematik är ibland svagt. För att elever ska få god kvalitet på sitt kunskapsutvecklande måste aktiviteterna väljas med omsorg och följas upp med deras egen dokumentation samt tankeväckande samtal så att begrepps-förståelsen utmanas och utvecklas.

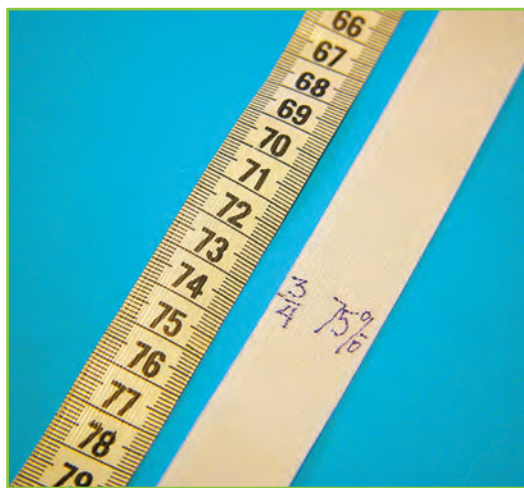
Elevers möjligheter att nå olika nivåer i sitt lärande står i relation till lärarens ämneskunskaper och erfarenheter av aktuella material. Det är med andra ord väsentligt att lärare får tillfälle att på olika sätt utveckla sitt eget kunnande. Detta kan ske genom internt erfarenhetsutbyte på skolan, när lärarna tillsammans testar material, provar dem i olika elevgrupper, följer upp, reflekterar, diskuterar och ger förslag på vidareutveckling, likaså när lärare får förutsättningar att delta i olika former av kompetensutveckling med externa handledare och föreläsare.

## Vad är bra material?

Många lärare efterfrågar förslag på bra material, men det är inte helt enkelt att svara på vad som är bra, mindre bra eller rent av dåligt. En del material kan anses vara bättre därför att de kan fylla flera funktioner och vidareutvecklas eller kompletteras. Exempelvis finns byggbara kuber som kan vara till nytta för snart sagt alla matematikområden som behandlas i grundskolan. Lärare och elever som arbetar med kuberna ofta och reflekterar över användningen ser undan för undan nya möjligheter med dem.

Andra produkter är enbart lämpade för ett specifikt ändamål och kan då i någon mening betraktas som mindre bra på grund av begränsad användbarhet. Å andra sidan kan ett material vara utmärkt, trots ett smalt användningsområde, om det underlättar förståelsen av ett kritiskt moment i matematiklärandet.

Att utgå från samma material för att belysa olika innehåll kan underlätta för elever att göra kopplingar mellan begrepp. Ett exempel på detta är *Tänjbar tallinje* som åskådligt kan visa bråk och procent samt sambanden mellan dem.



*Tänjbar tallinje* finns som en aktivitet under Strävorna, [ncm.gu.se/stravorna](http://ncm.gu.se/stravorna).

Vissa material lockar till aktivitet tack vare att de är sköna att ta i och har en tilltalande form eller glada färger. Detta gör att eleverna spontant provar material – kanske helt utan tanke på matematik. Läraren bör då ställa frågor som leder in och gör eleven medveten om matematikinnehållet.

Den fysiska kvaliteten är betydelsefull. Ett bra material ska tåla att hanteras av många elever under lång tid, det ska hålla utan att se slitet och tråkigt ut och vid behov enkelt kunna rengöras.

Granskas hela utbudet av laborativa material går det även att finna produkter som snarare låser elever vid vissa föreställningar än fungerar som ett stöd för fortsatt begreppsbyggnad. Ett material kan vara ett ändamålsenligt verktyg för elevers lärande, men också en åter-

vändsgränd för deras fortsatta förståelse. Detta kan tex inträffa vid arbete med cuisenairestavar där syftet är att eleverna ska få förståelse för mätningens idé genom att se relationer mellan stavarnas längder. Om eleverna fokuserar enbart på sambandet mellan färg och längd, som att vit = 1, röd = 2 osv reduceras uppgiften istället till triviala räkneövningar i addition.

Det som avgör i vilken mån ett material är bra, är alltså *hur* det används i förhållande till *vad* som ska läras.

## Spel

Det finns gott om både färdigproducerade spel att köpa och idéer om spel som elever och lärare kan göra själva och sedan utveckla – båda kategorierna har en given plats i verkstaden.

Det tycks finnas en vanlig, och kanske förenklad, föreställning om att spel är roliga och därför bra att spela, men det finns mer att hämta i spel än att enbart se dem som en guldkant på matematiklektionerna.

Det tar tid att tillverka och förbereda spel, och det tar tid att spela dem. Dessutom kan det vara svårt att organisera så det går att ha kontroll över vad som händer och vilket lärande som sker. Därför bör spel väljas med omsorg utifrån syftet med varje enskilt spel.

Gillian Hatch har under tre år studerat vad som händer då elever spelar spel med inriktning mot algebra:

Genom att spela spel kan nya, och ibland ganska svåra, begrepp introduceras för eleverna på ett sätt som är roligt och som utmanar tankarna. Spel uppmuntrar eleverna till samarbete när de söker efter lösningar och ofta arbetar de över sin vanliga nivå tack vare den avslappnade atmosfären då spel spelas.

Hatch, vår översättning

I *What kind of game is algebra?* beskriver Hatch fördelarna med att låta eleverna spela algebraspel. Vissa resultat var självklara, medan andra märktes först efter hand. Ett spel kan generera stora mängder färdighetsträning och ge algebraiska symboler mening. Ett bra spel bidrar till begreppsutveckling och att eleverna drar slutsatser och generaliserar. Spel kan utnyttjas för att introducera idéer och begrepp som kan vara svåra att komma åt på annat sätt.

Ett spel kan få elever att prata matematik, diskutera och se nyttan med tex huvudräkning. Spel avslöjar oftast inte hur ett problem ska lösas, vilket gör att de många gånger kan spelas på flera nivåer.

Det är accepterat bland elever att de lär sig reglerna efter hand. Spel spelas ofta i en omgivning där det finns hjälp att få och det underlättar också att spelpjäserna är konkreta föremål. Spel tillåter en elev att "gömma sig" bakom exempelvis spelregler tills han känner sig säker på det matematiska innehållet.

Givetvis finns det många andra aktiviteter som kan leda till de fördelar som finns beskrivna ovan, men några tycks vara unika för just algebraspel.

## Hur och när kan material nyttjas?

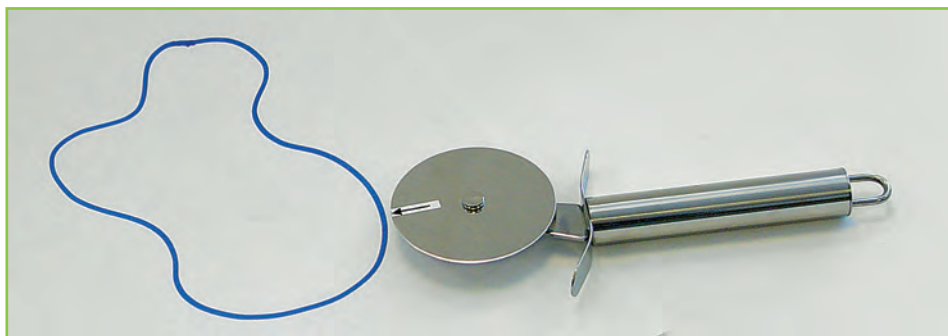
Hur och när laborativa material kan bidra till förståelse är frågor som behöver ställas vid lektionsplanering.

*Hur?* handlar om att känna till ett materials möjligheter så att det kan användas för helt skilda ändamål och aktiviteter. Även material som vid första anblicken kan tyckas starkt begränsade går oftast att bruka på fler sätt om någon förutsättning ändras. Ett spel kan tex ge större inlärningseffekt om deltagarna spelar i par och hela tiden måste diskutera nästa steg. Med ett meterhjul ska naturligtvis sträckor mätas upp, men aktiviteterna som sådana kan se mycket olika ut. Många aktivitetssidéer går att omsätta med flera sorters material. Några exempel på material och aktiviteter:

- *Elever sitter rygg mot rygg.* En bygger i hemlighet en figur, kamraten ska genom att följa den muntliga beskrivningen bygga en kopia. Material som kan användas är tangram, byggbara kuber, lego, mångfärgade stickor, mosaik och logiska block. I en sådan aktivitet behöver eleverna utbyta information och de ges möjlighet att kommunicera om och med matematik.
- *Bestämma bråk genom att jämföra.* Sätt en bestämd del i materialet till 1 eller en areaenhet. Jämför de olika delarna. Vilka är större? Vilka är mindre? Hur många gånger större eller mindre? Detta fungerar med cuisenairestavar, geobräde, tangram, mosaik och flera andra material. I denna och nästa aktivitet ges förutsättningar för att eleverna ska bli förtrogna med grundläggande matematiska begrepp. Eleverna får tillfälle att öva upp sin förmåga att använda olika bråkbegrepp och att se samband mellan dem.

- *Öva procent utan rutor.* Tag en handfull byggbara kuber, mosaik, mångfärgade stickor, pärlor, knappar eller leksaksdjur. Om dessa motsvarar 75 %, hur många ytterligare måste plockas fram för att det ska bli 100 %? Hur många procent är röda? I den här övningen får eleverna arbeta med begreppet procent. De kan också visa sin förmåga att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att beräkna hur många som fattas till 100 % och hur stor andel som har olika färger.
- *Dela saker.* Resultatet kan bli påtagligt olika om det är pengar, bananer eller ballonger som ska delas mellan flera personer. I de här situationerna kan eleverna utveckla sin förmåga att föra matematiska resonemang genom att motivera och argumentera varför resultaten kan bli så varierande beroende på vad som delas.
- *Positionssystemet* kan åskådliggöras med vitt skilda material. Några exempel är snäckor eller kottar i olika storlekar eller av olika art, egenhändigt gjorda lerfigurer, buntade glasspinnar, kapsyler samlade i olika stora burkar, tiobasmaterial och abakus. Eleven kan ges möjlighet att träna sin förmåga att representera tal med hjälp av konkreta föremål, via bilder och informella symboler för att sedan komma över till formella symboler som siffror. Läraren kan även göra kopplingar till historiska sammanhang och till hur symboler för tal har utvecklats i olika kulturer.

En lärare som är väl förtrogen med ett material kan lättare fånga tillfällena i flykten och utöka användningsområdet.



*En pizzaskärare kan fungera som ett litet mätthjul.*



Nästan alla – barn som vuxna – som första gången kommer i kontakt med ett nytt material börjar undersöka det. Det vrids och vänds, provas och frågor dyker upp: *Vad händer om ...? Kan man ...? Går det att ...?* Låt ett eller ett par av de första tillfällena i verkstaden gå till elevernas egna undersökningar. Detsamma gäller när ett nytt material introduceras. Att se hur elever tar sig an ett för dem nytt material kan vara ett bra sätt att avgöra om de förstått ett matematiskt innehåll eller om de bara har lärt sig att hantera det tidigare använda materialet rutinmässigt.

*När?* beror till stor del på de val som görs av arbetssätt. Ett material ska utnyttjas när det kan fungera som stöd eller bidra till begreppsutveckling och förståelse. Elever befinner sig på varierande kognitiva nivåer. De lär på skilda sätt och i olika takt. Därför bör användnings-sätt och tidpunkt för tillgång till material variera.

Några elever har redan så god förståelse av det aktuella begreppet att ett material inte fyller någon funktion. Dessa elever kan då istället använda samma material för färdighetsträning eller för ytterligare undersökningar.

Andra elever behöver ett taktilt material i början av begreppsutvecklingen, för att senare få ett visuellt stöd och till sist befästa begreppet utan hjälpmedel. Många lärare har berättat om elever som reser sig upp från sin plats för att gå och hämta ett material men vänder på vägen. Eleven har kommit till egen insikt om att stödet inte längre behövs.

Att säga att ett material ska användas på ett visst sätt, en viss tid och lika för alla är oftast felaktigt. Av den anledningen bör inte laborativt arbete enbart begränsas till schemabundna tillfällen i matematikverkstaden. Det finns inget som säger att det är just på tisdagslektionerna som material behövs. Därför är det nödvändigt att det också finns laborativa material i klassrum och matematiksal.

Av organisatoriska skäl kan det vara så att det bara finns ett visst tillfälle i veckan avsatt för varje klass i verkstaden. Då bör aktiviteterna väljas så att samtliga elever kan arbeta med dem samtidigt men på flera nivåer. Arbetet kan också läggas upp som stationssystem, vilket innebär en annan utformning av lektionen. Förslag ges på s 90–91.

## Att tänka på

Douglas H Clements och Sue McMillen ger i artikeln *Rethinking concrete manipulatives* sin syn på hur och när laborativa material kan användas. Punkterna nedan, fritt översatta, kan fungera som underlag vid diskussioner och ställningstagande till vilka material som ska



anskaffas till matematikverkstaden och vilka material som lämpar sig för den övriga matematikundervisningen.

- *Öka elevers användande av laborativa material.* De flesta elever utnyttjar inte laborativa material så ofta som de borde. Genomtänkt användning kan förbättra förståelse inom nästan varje område. Korta pass med material ökar inte lärandet i någon större omfattning. Det behövs inskolningstid för att elever ska uppfatta laborativa material som redskap för matematiskt tänkande.
- *Inse att elever skiljer sig åt och behöver använda material på olika sätt.* Många elever arbetar bäst om de får välja det laborativa material som passar dem eller kanske bara arbeta med hjälp av papper och penna. Elever behöver ha tillgång till laborativa material olika länge.
- *Uppmuntra elever att ta hjälp av laborativa material för att lösa problem och sedan reflektera över lösningarna.* Erfarenheter av olika slag hjälper elever att bygga upp och befästa förståelse. Be eleverna förklara varje steg i sina lösningar och att undersöka de fel som eventuellt har uppstått.
- *Skaffa egen lärarerfarenhet av material.* Elevers inställning till matematik förbättras då de arbetar med laborativa material, speciellt om läraren är väl medveten om dess potential.
- *Välj laborativa material för att elever ska använda dem.* Lärares demonstrationer är värdefulla, men material är i första hand till för eleverna.
- *Välj laborativa material som tillåter eleverna att ta tillvara sina informella metoder.* Material ska inte hindra eller begränsa elevernas arbete utan ska leda till att eleverna finner det meningsfullt att utforska matematiska idéer.
- *Var försiktig med att välja förkonstruerade laborativa material.* För yngre elever kan det tex vara bättre med kuber som kan sättas samman och tas isär än med färdiga tiostavar och hundra-plattor.
- *Välj material som kan fylla flera syften.* En del material, som spelmarkörer eller tvåfärgade kort, kan fungera som stöd för

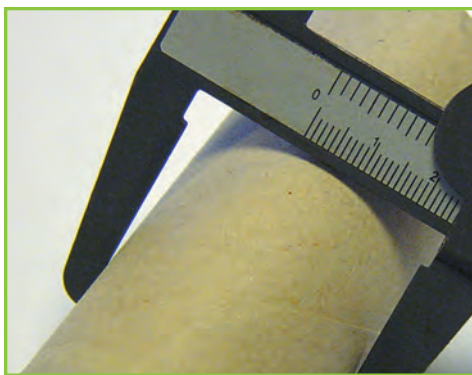
ramsräkning, platsvärde, aritmetik, mönster och många andra områden. Denna allsidighet gör att eleverna kan hitta flera användningsområden för ett material.

- *När ett område introduceras, välj ett enda laborativt material istället för flera olika.* En idé kan presenteras med hjälp av ett flertal laborativa material men elever kan dra fördel av att inledningsvis hantera ett som är känt. De behöver inte först ägna tid åt att bekanta sig med materialet. Ska då alltid bara ett material tas i anspråk? Nej, elever finner olika material meningsfulla. Att gemensamt reflektera över och diskutera samma begrepp med hjälp av flera olika material hjälper eleverna att göra den matematiska idén tydlig, *to abstract the essence*.

## Vilka material bör finnas på skolan?

Lärare brukar ofta upptäcka att det redan finns många material på skolan – fast oorganiserade och på olika platser. Det är därför bra att starta med en inventering. Vad finns i klassrum, grupprum, arbetsrum, materialrum, källare, vind, skolbibliotek och andra lokaler?

Många lärare har önskemål om näst intill obegränsade mängder material i verkstaden. Det finns flera fördelar med god tillgång på material – det räcker till alla, är lätt att variera, var och en kan få arbeta med ett material som passar dem etc – samtidigt är det viktigt att peka på nackdelar. Det spelar ingen roll hur mycket en skola satsar på laborativa material om inte lärarna har goda kunskaper om lärande i matematik. Det är bättre med färre material som alla kan använda än många som bara blir liggandes i skåp och lådor. Uppmärksamma de *behov* av laborativa material som finns och som allt eftersom uppstår.



## Listor till stöd

En matematikverkstad är fylld av material av skilda slag. På [ncm.gu.se/mv\\_material](http://ncm.gu.se/mv_material) finns listor över *kontorsmaterial*, *förbrukningsmaterial* och *laborativa material*. Listorna kan ge överblick, fungera som diskussionsunderlag och ligga till grund för egna sammanställningar. För att möjliggöra en god förvaltning av de ekonomiska resurserna bör det från början göras klart om avsatta medel ska disponeras för all sorts utrustning eller om de i första hand ska täcka inköp av laborativa material.

På de flesta skolor med en matematikverkstad bedrivs ändå största delen av matematikundervisningen i andra klassrum och matematiksalar. Därför är det viktigt att skolans lärare diskuterar igenom vilka material som ska finnas i de olika rummen. *Vad har vi plats för? Hur mycket kan vi vid behov låna från verkstaden? Ska det finnas en mindre depå nära klassrummen eftersom vi har lång väg till verkstaden?* En lista att utgå från vid dessa diskussioner finns också på webben.

## Var kan man hitta laborativa material?

Det finns ett näst intill obegränsat utbud av pedagogiska material och det tillkommer både nya produkter och försäljningsställen. En handfull av de större svenska företagen är kända av många lärare, men det finns andra mindre företag som inte är lika välbekanta. På webbsidorna på [ncm.gu.se/mv\\_foretag](http://ncm.gu.se/mv_foretag) finns länkar till både svenska och utländska företag. Flera företag skickar varje år sina nya kataloger till alla skolor, men eftersom alla inte gör det kan det vara bra att gå igenom listan och beställa de kataloger som saknas. Ägna tid åt att bläddra i dem då de inte bara visar material utan även kan ge uppslag till undervisningsinnehåll. Eftersom företagen har egna webbplatser är det smidigt att söka, jämföra och beställa material.

Vardagliga föremål och verktyg är oftast billigast och enklast att köpa i livsmedelsaffärer, varuhus och detaljhandeln.

En del läromedelsföretag har permanenta utställningar där laborativa material presenteras. Många ställer ut sina material vid tex konferenser, biennaler, biennetter och mässor. Det finns också mediacentraler, eller motsvarande, som har en öppen verksamhet dit lärare kan komma för att bland annat ta del av utställningar med läroböcker och laborativa material. Ett urval av laborativa material finns även i NCM:s matematikverkstad.

# Hur kan vi skapa en struktur?

Många som börjar bygga en matematikverkstad tycker, oavsett tidigare erfarenheter, att arbetet först känns rörigt och oöverskådligt. Att här ge en struktur som passar för alla verkstäder är svårt eftersom förutsättningarna varierar från skola till skola. Följande punkter kan ses som exempel på sätt att bringa ordning:

- **Att utveckla förmågor.** Det som ska styra och prägla matematikundervisningen är läroplanen. Genom undervisningen ska eleven ges förutsättningar att utveckla ett antal beskrivna förmågor i matematik. *Syfte* och *Centralt innehåll* kan arrangeras i en matris där exempel på laborativa material och aktiviteter skrivs in och knyts till kursplanen. Därmed förtydligas syftet med arbetet. Att varje ruta är ifylld är ingen garanti för att undervisningen är heltäckande, men det kan ge en fingervisning om vilket innehåll som behöver uppmärksammas och konkretiseras. Både grundskolans och gymnasieskolans kursplaner finns sammanförda i Strävorna och det finns mer att läsa på [ncm.gu.se/stravorna](http://ncm.gu.se/stravorna). Där finns även en matris som kan skrivas ut och kopieras till skrivvänligt A3-format för att ge plats för egna anteckningar.

strävorna

Genom undervisningen i rimligt matematik ska eleven ges förutsättningar att -

|                           | 1 utveckla förmågan att formulera och lösa problem | 2 utveckla förmågan att beskriva, analysera och använda matematiska begrepp och samband mellan begrepp | 3 utveckla förmågan att hantera procedurer och lösa rutinuppgifter | 4 utveckla förmågan att lösa, följa och värdera matematiska resonemang | 5 utveckla förmågan att kommunicera matematik och använda matematikens uttrycksformer | 6 upptäcka matematik som en utmanande, kreativ och estetisk verksamhet | 7 reflektera över matematikens utveckling och relevans | 8 utveckla förmågan att använda digital teknik för matematiskt arbete | 9 utveckla förmågan att tolka en situation samt utforma och värdera en matematisk modell |
|---------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| A Tal                     | 1A                                                 | 2A                                                                                                     | 3A                                                                 | 4A                                                                     | 5A                                                                                    | 6A                                                                     | 7A                                                     | 8A                                                                    | 9A                                                                                       |
| B Algebra                 | 1B                                                 | 2B                                                                                                     | 3B                                                                 | 4B                                                                     | 5B                                                                                    | 6B                                                                     | 7B                                                     | 8B                                                                    | 9B                                                                                       |
| C Geometri                | 1C                                                 | 2C                                                                                                     | 3C                                                                 | 4C                                                                     | 5C                                                                                    | 6C                                                                     | 7C                                                     | 8C                                                                    | 9C                                                                                       |
| D Sannolikhet & statistik | 1D                                                 | 2D                                                                                                     | 3D                                                                 | 4D                                                                     | 5D                                                                                    | 6D                                                                     | 7D                                                     | 8D                                                                    | 9D                                                                                       |
| E Samband och förändring  | 1E                                                 | 2E                                                                                                     | 3E                                                                 | 4E                                                                     | 5E                                                                                    | 6E                                                                     | 7E                                                     | 8E                                                                    | 9E                                                                                       |
| F Problemlösning          | 1F                                                 | 2F                                                                                                     | 3F                                                                 | 4F                                                                     | 5F                                                                                    | 6F                                                                     | 7F                                                     | 8F                                                                    | 9F                                                                                       |

- **Rubriker från Centralt innehåll.** För att organisera allt material i skåp och lådor har många verkstadsbyggare valt att göra en indelning från kursplanens ämnesinnehåll: taluppfattning, algebra, geometri, sannolikhet och statistik, samband och förändring samt problemlösning.

- *Planeringsunderlag.* Tankekartan som beskrivs på sid 102–105 sätter in aktiviteter och material i ett didaktiskt sammanhang. Det finns lärare som fyller i en tankekartan och sparar den tillsammans med underlag för aktiviteten i en pärm eller lägger ut den på skolans intranät. Tankekartorna kan sedan fylla flera funktioner: kom-i-håg till ett annat tillfälle, idéspredning kollektor och skolor emellan samt konkretisering av undervisningsinnehåll som blir tillgängligt för elever och föräldrar.

Det är möjligt att diskutera var ett material eller en aktivitet hör hemma – såväl den teoretiska kopplingen till kursplanen som den fysiska placeringen på hyllor och i skåp – nästan hur länge som helst. Många produkter och aktiviteter passar på flera ställen. Tärningar kan användas till taluppfattning och sannolikhet. Material för att mäta kan brukas till både taluppfattning och geometri. Talmönster startar ofta i aritmetik men kan fortsätta över till algebra, ibland via geometriska mönster. Exemplet kan göras många. Man måste helt enkelt till slut bestämma sig för hur strukturen i den egna verkstaden ska se ut, men också vara beredd på att den säkert kommer att revideras. Det är ingen nackdel, förutom att det tar tid, eftersom en verkstad ska leva och utvecklas.

Ett praktiskt bekymmer är också att alla material inte är av samma storlek och form. Därför kan det vara svårt att hitta en perfekt struktur som stämmer med de förvaringsmöjligheter som finns i lokalen.

## Hur placeras material överskådligt?

När grundstrukturen i verkstaden är bestämd ska alla material ordnas så överskådligt som möjligt. Någon form av lådsystem behövs även för de material som ska finnas på hyllorna.

- Ett väl beprövat och kostnadsfritt sätt är att använda locken till kopieringspapperskartonger. Tar de slut på skolan finns det säkert kontor i närheten som gärna delar med sig. Eftersom locken är lite större än A4-format passar det bra att laminera underlaget till en aktivitet och lägga det i locket tillsammans med det material som behövs. Lockets front märks med aktivitetens namn. En nackdel med locken är att de inte är stapelbara, men det kan lösas genom att hyllplan sätts tätt. I de fall lådans innehåll enbart består av ett laminerat ark och tunt material,

kan låga kartonger vara ett mer utrymmessnålt alternativ. Kartongerna kan förvaras i tex postsorteringsfack.



*Märk även hyllkanten. Det blir mycket enklare att hålla ordning – och att se vad som fattas!*

- Ett stapelbart och billigt komplement är plastburkar i alla tänkbara storlekar och färger. Fråga tex i affärer som säljer lösgodis om skolan kan få de tomma nästan kubformade plastburkarna.
- Champinjonlådor från mataffärens grönsaksavdelning är ytterligare ett stapelbart alternativ. Dessa lådor är större än kartonglocken och plastburkarna.
- Det finns också många snygga och praktiska lådor och kartonger att köpa. Några förslag visas på [ncm.gu.se/mv\\_inredningsforetag](http://ncm.gu.se/mv_inredningsforetag).
- Förutom lådor och kartonger kan material och aktiviteter exponeras på andra sätt. Tavellister och krokar är bra exempel.
- Glöm inte bort att utnyttja taket för att hänga upp saker, men undvik överexponering.





Många väljer att även samla lärlitteratur och lärares idéer och uppslag i matematikverkstaden. I uppmärkta tidskriftssamlare läggs lektionsbeskrivningar, aktiviteter, problemuppgifter, förslag, utvärderingar, broschyrer, kompendier etc så att de fungerar som idébank för samtliga kollegor.

## Var finns förslag på aktiviteter?

Lärare som börjar upptäcka hur stort utbudet av aktiviteter är inser snart att det handlar mer om att välja och utesluta än att försöka skaffa så mycket som möjligt. Här följer förslag och i förekommande fall finns länkar och annan information på [ncm.gu.se/mv\\_aktiviteter](http://ncm.gu.se/mv_aktiviteter):

- I *läroböcker* och särskilt i *lärarhandledningarna*, finns många bra idéer, aktiviteter och uppslag för en matematikverkstad. Det finns även mängder av *inspirationsböcker* som både innehåller aktiviteter och uppslag till egna lektionsidéer.
- Många av de aktiviteter som finns under *Strävorna* fungerar mycket väl i en matematikverkstad. Flertalet av dem ger förslag på hur laborativa material kan användas i arbetet med i princip alla olika matematiska innehåll som finns i kursplanen.
- *Uppslaget i Nämnaren* består av en praktisk lektionsidé som läggs ut i fulltext på Nämnarens webbplats.

- *Nämnares Problemavdelning* innehåller många problem som det går att arbeta laborativt med. Även dessa läggs ut i fulltext.
- *Kängurun – Matematikens hopp!* Tredje torsdagen i mars varje år genomförs denna internationella matematiktävling. Svenska arrangörer är NCM och Kungliga Vetenskapsakademien. Syftet är att stimulera intresset för matematik. Elever ska inte bara arbeta med problemen denna dag, utan dess möjligheter kommer undervisningen till glädje även efteråt, t ex genom lösning och diskussion i grupper och klasser. Mer information, tidigare års uppgifter och förslag på hur man kan arbeta vidare finns på Kängurusidan.
- Länkar till *andra tävlingar* som kan ge uppslag till aktiviteter finns också på Kängurusidan.
- *Adventskalendrar* med matematikinnehåll ges ut av t ex Nämnares, den danska tidskriften Matematik och den norska samarbetsorganisationen på [www.matematikk.org](http://www.matematikk.org).
- PRIM-gruppen har ställt samman ett antal matematikuppgifter i en *Uppgiftsbok* som kan laddas ner från nätet. Syftet är att eleverna ska få arbeta med uppgifter vars svar kräver lite längre redogörelser och resonemang. Uppgifterna lämpar sig för arbete i grupp, kan ha flera lösningar som är korrekta och många gånger är laborativa material både en tillgång och en förutsättning.
- *Mattegömmor* är det svenska namnet på laborativa aktiviteter från *Mathematics problem solving task center* i Australien. Läs också om Mattegömmor på Sveriges matematiklärarförenings webbplats, [www.smal-matte.com](http://www.smal-matte.com).



# Begrepp och uttrycksformer

I matematikundervisningen är elevernas begreppsutveckling i fokus. Det innebär att eleverna måste få tillgång till matematikens uttrycksformer för att kunna kommunicera i, med och om matematik. I detta kapitel görs en genomgång av begrepp och uttrycksformer. En begreppstavla presenteras, vilken kan fungera som stöd för undervisning om ett aktuellt matematiskt begrepp.

## Vad innebär begreppet begrepp?

"Alla" som undervisar i matematik talar om vikten av att arbeta med begrepp och att eleverna ska få god begreppsförståelse. I Lgr 11 skrivs det fram att undervisningen i matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla sin förmåga att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp. Men vad menas egentligen med begrepp?

Slår vi upp *begrepp* i en etymologisk ordbok framgår det att ordet ursprungligen kommer från det fornsvenska begripa, som i sin tur kan härledas från det lågtyska 'begripen' med betydelsen gripa (med tanken). I Nationalencyklopedin förklaras begrepp med "det abstrakta innehållet hos en språklig term".

Redan inledningsvis bör det uppmärksammas att ett matematiskt begrepp inte är för evigt definitivt, exakt, absolut och klart avgränsat – tvärtom kan det förändras och utvecklas över tid i takt med att matematiken och dess användning utvecklas. Ett exempel på detta ger Cecilia Kilhamn i sin avhandling när hon beskriver de förändringar som det begrepp vi idag benämner negativa tal har gått igenom:

### *Historisk utveckling av negativa tal i västerländsk matematik*

1500-talet: Inget erkännande av negativa tal.

1600-talet: Erkännande av negativa tal som lösningar till ekvationer.

Slutet av 1600-talet och början av 1700-talet: Negativa tal användes men med reservationer.

1700-talet: Fri användning av negativa tal och de förekom i böcker även om de inte var matematiskt definierade. Det fanns även matematiker som förde debatter mot negativa tal.

1800-talet: Försök gjordes för att ge en matematisk grund till negativa tal.

Slutet av 1800-talet: Formell matematisk definition av negativa tal.

Även om negativa tal successivt accepterades när det handlade om beräkningar, tog det ändå mänskligheten flera århundraden att erkänna dem som tal med egna egenskaper. I början av 1800-talet existerade inte negativa tal i det dagliga livet. Affärsmän och banker bokförde med hjälp av debet och kredit och undvek på så sätt negativa tal.

En lösning för att definiera negativa tal blev att omdefiniera begreppet tal. En utveckling av ett begrepp kan alltså leda till att även andra begrepp vidareutvecklas.

## Begrepp – matematikens byggstenar

Begrepp är mänskliga tankekonstruktioner och kan betraktas som matematikens byggstenar. Ett matematiskt begrepp kan vara ett matematiskt *objekt* som tex en kvadrat, en *process* som tex subtraktion eller en *egenskap* som tex volym.

Med exempelvis begreppet area avses det abstrakta innehåll vi lägger i benämningen area eller med andra ord – vad vi menar med area. När vi arbetar med begrepp i skolan behöver flera delar beaktas:

- *Begreppen representeras med hjälp av olika uttrycksformer.* Det kan ske med laborativa material, ord, bilder, omvärldssituationer och symboler.
- *Begreppens egenskaper.* I det här sammanhanget betraktas egenskaper synonymt med vilka kännetecken eller vilken beskaffenhet ett begrepp har. En egenskap hos addition är att det inte spelar någon roll i vilken ordning man adderar. Egenskaper hos ett matematiskt begrepp kan anges i definitionen. Egenskapen att arean av en yta inte ändras om ytan roteras kan tex ingå i en

grundläggande definition av begreppet area. De matematiska begreppens egenskaper kan också fastställas genom att man genomför ett bevis, tex visar att varje triangel i den euklidiska geometrin har vinkelsumman  $180^\circ$ .

- *Relationer till andra begrepp.* Varje matematiskt begrepp anknyter till andra begrepp. Det finns exempelvis en relation mellan begreppet kvadrat och begreppet area: varje kvadrat har en area. Däremot finns ingen lika uppenbar relation mellan kvadrat och subtraktion: man kan tex inte subtrahera en kvadrat från en annan kvadrat. Det går däremot att subtrahera arean på en mindre kvadrat från arean på en större kvadrat för att få fram skillnaden mellan storleken på kvadraterna. Begreppet area är inte begränsat till att handla om kvadrater utan har mening för såväl regelbundna som oregelbundna former.
- *Definition.* I en definition försöker man så exakt som möjligt att precisera vad som utmärker det aktuella begreppet, så att det också går att särskilja från andra begrepp.

Under rubriken *Vad är en begreppstavla?* på sid 41 ges ett konkret exempel på hur lärare kan få stöd i sin lektionsplanering för att ovanstående delar av begreppet tas upp i undervisningen.

## Vad är uttrycksformer?

Eftersom varje begrepp är en tankekonstruktion behöver de någon form av "etiketter" för att vi ska kunna kommunicera med och om dem. Vi måste därför representera begreppet med hjälp av olika uttrycksformer som tex laborativa material, ord, bilder, omvärldssituationer och symboler.

I Lgr 11 används benämningen "uttrycksformer" men i kommentarmaterialet till kursplanen i matematik förekommer både "uttrycksformer" och "representationsformer". I gymnasiets läroplan, Lgy 11, finns "uttrycksformer" en gång i den gemensamma syftestexten för matematikämnet, medan benämningen "representationer" förekommer under rubrikerna Centralt innehåll och Kunskapskrav.

Diskussioner förs bland matematikdidaktiker huruvida benämningarna uttrycksformer och representationer är synonyma eller om de står för olika företeelser. I det senare fallet finns lite olika tolkningar varav en är att representationen står för något, tex ett matematiskt begrepp, medan uttrycksformen anger formen, dvs hur matematiken kommuniceras. Ett konkret exempel på detta är när en person ritar flera olika trianglar som alla får representera begreppet triangel, men där uttrycksformen i samtliga fall är en bild.

I Nämnarenartikeln *Matematiska uttrycksformer och representationer* menar författarna att de båda orden ofta får stå för samma sak, men i artikeln tas de upp och förklaras separat. Liksom i det tidigare exemplet hör uttrycksformen samman med i vilka former som representationer uttrycks, men i artikeln för de även in med vilka medier som detta sker. Exempel ges på hur bildlig representation kan uttryckas med hjälp av en graf på papper, med grafitrande räknare, på interaktiv skrivtavla etc. Artikeln sammanfattas med att representationer och uttrycksformer naturligt går in i varandra och att det många gånger är enklast att tänka på dem som *ett* begrepp med både innehåll och form. Artikelförfattarna anser att oavsett synsätt så är det väsentliga att representationer och uttrycksformer är till för att vi ska få möjlighet att tänka på, använda och kommunicera matematiska begrepp på olika sätt.

---

## Representationer

Representationer ersätter något och står i stället för något annat. Själva ordet representation kommer av det latinska 'repraesenta'tio' som betyder "åskådliggörande framställning eller exempel". En viktig egenskap hos en representation är att den gör det representerade indirekt närvarande för användaren.

*Nationalencyklopedin*

I den engelskspråkiga litteraturen refererar termen representation till både process och produkt. "... in other words, to the act of capturing a mathematical concept or relationship in some form and to the form itself."

*NCTM*

---

Olikheter i synsätt kan också uppfattas som att kurs- och ämnesplaner är texter som är öppna för tolkningar. Det kan ses som ett tecken på att vi, inom matematikutbildning i stort, inte har någon tillräckligt entydig terminologi eller vedertaget språkbruk och att det är en ständigt pågående process att fylla orden med mening.

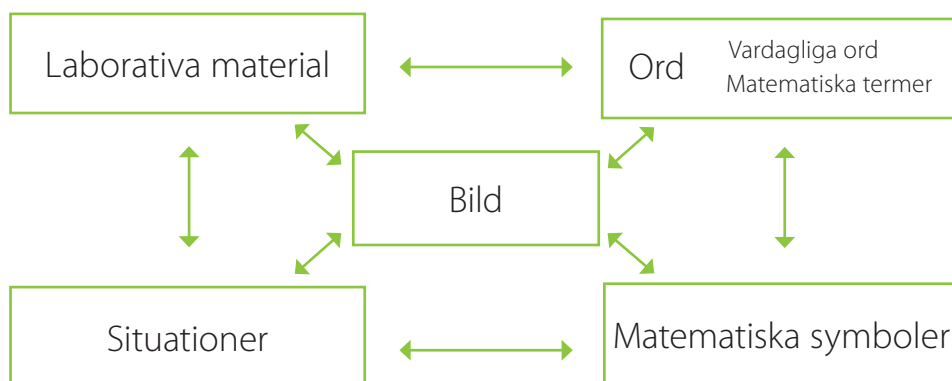
## Förstå och använda olika uttrycksformer

Lärande i matematik kan beskrivas som en kumulativ process där man stegvis får tillgång till allt fler och mer avancerade uttrycksformer. Att kunna uttrycka sig på flera sätt är ett tecken på god begreppsförmåga. ”Den som kan använda flera olika sätt att beskriva samma begrepp har en rikare begrepps bild och därmed en mer funktionell begreppskunskap”, konstateras i *Algebra för alla*.

För att få stöd i sin begreppsutveckling behöver eleverna ges möjlighet att möta ett och samma matematiska begrepp med hjälp av flera olika uttrycksformer. Begreppet kan därigenom bli mer konkret, tillgängligt för reflektion, hjälpa eleverna att få överblick och att strukturera sitt tänkande. Därför räcker det inte att enbart räkna med siffror och bokstäver i en lärobok utan eleverna måste få arbeta med fler uttrycksformer som att

- undersöka med laborativa material, ”penna och papper” eller digitala hjälpmedel
- med ord (vardagliga ord och matematiska termer) tala och skriva matematik
- använda bildspråk, med allt ifrån egna informella skisser till professionellt framtagna illustrationer
- exemplifiera med hjälp av verkliga och fiktiva situationer i närmiljö och omvärld
- beskriva sina tankegångar med hjälp av, för kunskapsnivån lämpligt, matematiskt symbolspråk.

Vi har omarbetat uppdelningen på fem uttrycksformer utifrån Richard Leshs klassiska schematiska bild över representationer och deras kopplingar till varandra.



Vi har valt att sätta rubriken *Ord* på en av uttrycksformerna där både informellt vardagsspråk och formella matematiska termer inkluderas. Både *Ord* och *Symboler* kan förekomma i såväl tal som skrift.

Man kan också välja andra sätt för uppdelning, som exempelvis i fysiska, bildliga eller grafiska, verbala, numeriska och symboliska uttrycksformer.

## Interna och externa representationer

I kunskapsöversikten *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* refereras till forskarna Gerald Goldin och Nina Shteingold som delar upp representationer i två kategorier:

- *interna representationer* är elevens eget vardagliga språk, visuella bilder, informella figurer och symboler etc
- *externa representationer* utgår från matematikens konventionella symbolspråk som tex sättet att notera i positionssystem, formell algebraisk notation eller hur tallinje och koordinatsystem används.

Samspelet mellan interna och externa representationer ses som fundamentalt för effektivt matematiklärande. Eleverna ska först få möjlighet att utveckla ändamålsenliga interna representationer som de sedan ansluter till de externa representationerna. Goldin och Shteingold anser att elevers begränsningar för att förstå matematik ibland kan bero på att deras inre system av representationer bara är delvis utvecklat och kan därför medföra hinder, svårigheter och missuppfattningar. Genom att öka fokus på interaktionen mellan interna och externa representationer finns det möjlighet att fler elever lyckas med skolmatematiken. I praktiken, menar de, innebär det att matematiska idéer introduceras genom att undervisningen börjar i det konkreta och sedan går vidare till allt mer abstrakta representationer.

## Översätta och välja mellan uttrycksformer

Elever behöver utveckla sin förmåga att översätta och välja mellan olika uttrycksformer. Det innebär förståelse för uttrycksformernas inbördes förhållande, att ha kännedom om deras styrkor och svagheter samt att kunna välja lämplig uttrycksform beroende på situation och syfte.

När elever aktivt engageras i att uppfatta sambanden mellan olika uttrycksformer, stärker det den matematiska förståelsen av begreppet, men det är inte givet att eleven på egen hand kan översätta mellan olika uttrycksformer som text mellan laborativa aktiviteter och matematiska symboler. Genom att se på vilka sätt som eleven representerar ett aktuellt begrepp kan läraren få värdefull inblick i elevens tänkande. Detta ger stöd för läraren att, där så behövs, bygga broar mellan elevens informella och matematikens formella uttrycksformer.

## Vad är en begreppstavla?

Undervisningen i skolan har en tendens att reducera begrepp till att vara en matematisk term och man belyser inte alltid innebörden i begreppen. Hur kan man då som lärare tänka inför planering av undervisning kring ett aktuellt matematisk begrepp?

En begreppstavla kan fungera som en tanke- eller arbetsmodell vilken ger stöd för att olika delar av ett begrepp beaktas: *egenskaper* hos begreppet, hur samma begrepp kan *representeras* med hjälp av olika uttrycksformer, *relationer* som finns till andra begrepp samt hur begreppet kan *definieras*.



*Begreppstavla som kan ligga till grund för den didaktiska lektionsplaneringen.*

Under läsningen av följande fyra sidor kan det vara bra att samtidigt ha ett finger vid den ifyllda begreppstavlan på sid 46.

Vi tänker oss ett arbetslag som ska undervisa om begreppet area. Någon vecka före introduktionen får eleverna skriva ner vad de tänker på när de hör ordet "area". Se till exempel Ellips sid 121. Elevernas svar fungerar som en fördiagnos där lärarna får reda på vilket kunskapsområde som finns hos eleverna. Utifrån Centralt innehåll i kursplanen bestämmer lärarna vilka egenskaper hos begreppet area som i första hand ska belysas. Detta skrivs in vid *Egenskaper hos begreppet*.

Lärarna är måna om att eleverna ska bli medvetna om *Hur begreppet kan representeras* med hjälp av olika uttrycksformer och de funderar över hur begreppet area kan representeras. De kommer i sin diskussion fram till följande:

- *Laborativa material*. Eleverna ska med hjälp av färgade papper, markörer, tangram, multilinkklossar, pepparkaksdeg, geobräden och andra material forma olika områden vars areor sedan jämförs, uppskattas, mäts och beräknas.
- *Ord*. Här handlar det om både elevernas *vardagliga ord* och korrekta *matematiska termer*. Lärarna vill skilja mellan den matematiska termen "area" och hur det ibland kommer till uttryck som "yta" i många elevers vardagliga språkbruk.

---

YTA. En yta är ett tvådimensionellt geometriskt objekt. Utanför matematiken används ordet också om utsidan av något, det ytterskikt som begränsar ett föremål mot omgivningen. En sådan yta kan vara slät, len, skrovlig, mjuk, grov, jämn, ojämn etc.

*Matematiktermer för skolan*

---

Av erfarenhet vet lärarna att en del elever säger ordet "yta" då de egentligen avser den matematiska termen "area". Det kan ha sin förklaring i att yta tidigare var benämning för area. I läroböcker till och med 1960-talet användes yta synonymt med area och det lever fortfarande kvar i många vardagliga sammanhang. Ett exempel är bostadsannonser som ibland uppger lägenhetsytan – inte lägenhetsarean. Lärarna vill ta tillfället i akt för att stödja elevernas språkutveckling och tänker uppmärksamma eleverna på betydelsen av både yta och area och skillnader där emellan.



- *Bild.* Eleverna får i uppgift att rita egna figurer som de ska färglägga för att illustrera att area är "storleken på den yta som täcks av färgen". Lärarna kommer att uppmuntra eleverna att rita både regelbundna och oregelbundna figurer så att de får många olika erfarenheter av begreppet area.

### Elevtankar

Följande utspelade sig på en lektion i åk 9. En elev löser uppgifter som:

Beräkna arean av en rektangel där sidornas  
längder är 5 cm och 3 cm.

Eleven skriver i sitt häfte:

$$A = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}^2 \quad \text{Svar: } 15 \text{ cm}^2$$

Efter några liknande uppgifter, som enligt facit är rätt uträknade, får eleven frågan om hon vet vad hon räknar ut.

- *Arean, så klart, svarar eleven.*

På följdfrågan

- *Kan du visa mig i en figur var arean finns?*

ritar eleven en rektangel och pekar snabbt på först den ena, sedan den andra sidan. På frågan om inte area kan vara något annat också svarar eleven att det kan vara de andra två sidorna också.

På frågan vad följande figur kan ha för area svarar eleven:



- *Den figuren, den har ingen area!*

*En elev som saknar förståelse för begreppet area, men som ändå får rätt enligt facit. Den kloka läraren upptäcker detta genom att ställa frågor om area även på en annan figur än en rektangel.*

*NämnaRENTA Uppslagsboken*

- *Situationer.* Lärarna diskuterar med eleverna om vad som har en area och i vilka situationer man behöver jämföra, uppskatta eller beräkna areor. När lärarna funderar över vilka förslag de kan tänkas få av eleverna, ges exempel på hur storleken på två bollplaner kan jämföras, hur man kan uppskatta arean på ett litet bord med hjälp av handflatan, hur mycket färg som måste köpas för att måla väggarna i ett rum. En lärare föreslår också att de kan ställa den något mer filosofiska frågan: Vad finns det för något som inte har area?
- *Matematiska symboler.* De symboler som kommer att behandlas är hur area förkortas och hur arean för kvadrat, rektangel, triangel och cirkel kan beräknas med hjälp av symboler i formler.

Under rubriken *Relationer till andra begrepp* samlar lärarna begrepp

- a. som kommer att tas upp i *direkt anslutning* till area. Vissa kan vara välbekanta för eleverna medan andra kanske behöver repeteras eller förklaras, t ex längd, bredd, bas, höjd, regelbunden figur, oregelbunden figur, enhet, yta och storhet.
- b. som kan *jämföras*. För att ytterligare befästa begreppet vill lärarna uppmärksamma eleverna på både *vad som är area* och *vad som inte är area*. Vilka likheter och skillnader finns mellan utvalda begrepp som t ex mellan area och längd, area och omkrets eller area och volym? Eleverna kan ge egna förslag på jämförelser samt diskutera likheter och skillnader. Se exempel på sid 125–126.
- c. som *har samband med* area i ett något mer utvidgat perspektiv. Exempelvis kan begreppet mönster beröras för att det geometriska innehållet ska kunna generaliseras och leda vidare till algebrabegreppet.

Genom att visa på relationer till andra begrepp synliggörs den väv av begrepp som matematik är uppbyggd av. Matematiken ses som en helhet och inte som isolerade delar utan samband med varandra.

MÖNSTER ska tolkas brett inom matematik. Det handlar om att undersöka ordning, regelbundenhet, strukturer och logiska samband bland exempelvis tal, former, rörelser, förändringar och beteenden. Mönster kan vara verkliga eller tagna ur fantasin, visuella eller mentala, statiska eller dynamiska, kvalitativa eller kvantitativa, för nytta eller nöje. Genom att se gemensamma mönster i till synes skilda problem och lösningar kan vi formalisera och utveckla metoder, vilka vi kan använda för att lösa andra problem. För att kunna "se" mönster mellan skilda problem måste vi dock släppa taget om den konkreta situationen, bli abstrakta och vaska fram de väsentliga aspekterna så att vi kan bli generella.

Anette Jahnke, *Nämnnaren* 2011:2

I *Definition av begreppet* uppges innebörden så precist och exakt som möjligt. I undervisningen kan ett begrepps olika delar – egenskaper, uttrycksformer, relationer och definition – tas upp i den ordning som är mest lämplig för eleverna. Kanske börjar man med att nysta i definitionen och avslutar med en laboration där eleverna undersöker vad som händer med omkretsen om formen ändras på områden med areor som är lika. Andra gånger kanske lärare väljer att gå mellan de fyra aspekterna beroende på hur eleverna resonerar. Det kan också ses som en avslutning på den process som ska leda fram till utökad förståelse för det aktuella begreppet. Ytterligare ett sätt är att redan inledningsvis ta upp definitionen som en slags inspiration för *det här är vad vi ska förstå när vi har arbetat med ...*

Det som kan hända när elever använder en matematisk terminologibok är att definitionen består av ännu fler och än mer svårförståeliga begrepp. Definitionen är matematiskt korrekt, men underlättar kanske inte alltid för elevers förståelse. Lärarna tänker därför att tillsammans med eleverna skriva egna förklaringar med vardagligt språk. Att kunna välja en lämplig definition som speglar begreppet tillräckligt strikt för sammanhanget och samtidigt är greppbar för eleverna är en central aspekt i undervisningen.

Definitionen kan även öppna upp för en upptäcktsfärd genom att ännu fler begrepp tas upp, vilka ytterligare kan fördjupa och bredda begreppet area.

## Hur begreppet kan representeras

### Egenskaper hos begreppet

som jag ska ta upp i min undervisning

- Area är mått på storleken av en begränsad yta
- Områden med olika form kan ha samma area
- Områden som har samma omkrets kan ha olika area
- Areaenheter:  $\text{mm}^2$ ,  $\text{cm}^2$ ,  $\text{dm}^2$ ,  $\text{m}^2$ ,  $\text{km}^2$
- Area kan tex räknas ut så här: basen  $\cdot$  höjden

Ord:

Elevers vardagliga ord: yta  
Matematisk term: area

Laborativa material:



Bild:



Situationer:



Symboler:

$$\begin{aligned} A &= \text{area} \\ A &= s \cdot s \\ A &= l \cdot b \\ A &= b \cdot h / 2 \\ A &= \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

# AREA

### Relationer till andra begrepp

- Längd, bredd, bas, höjd, regelbunden figur, regelbunden figur, enheter, yta, storhet
- Area – omkrets, area – längd, area – volym
- Mönster, algebra

### Definition av begreppet

Area = storleken hos en yta

Begreppstavlan är ett stöd för att olika aspekter av det aktuella begreppet uppmärksammas i undervisningen.

Begreppstavlan kan också fungera som stöd för eleverna om de själva får i uppdrag att analysera, som det uttrycks i Lgr 11, eller undersöka utvalda begrepp.

Efter genomförd undervisning avsätts tid för att gemensamt följa upp hur arbetet fallit ut, vilka lärdomar som kan dras utifrån elevernas förståelse och vilka förändringar och förbättringar som kan göras inför undervisning med nya elevgrupper.

## Vad innebär begreppsutveckling?

Begreppsutveckling innebär att successivt upptäcka och lära sig vad som är gemensamt eller utmärkande för exempelvis en grupp objekt, en grupp händelser eller en grupp beteenden. När små barn lär sig vad som är karaktäristiskt för det som kan betecknas med begreppet stol eller elever lär sig känna igen begreppet area, är det exempel på begreppsutveckling.

I litteratur om begreppsutveckling är Lev Vygotskijs tankar klassiska. Hans teorier handlar om begrepp i en vidare och mer generell mening och inte om specifikt matematiska begrepp, men de är direkt överförbara i detta sammanhang. Vygotskij menar att begrepp hjälper till att systematisera och att hålla ordning i det sociala och materiella kaos som råder runt oss. Begrepp speglar den underliggande teorin om hur tingen kan grupperas, hur de hänger samman, vilka förhållanden de har till varandra och vilka gemensamma egenskaper som finns. Att lära sig begrepp betyder att olika erfarenheter binds samman och att man förstår principerna. Detta innebär att långtidsminnet kan utnyttjas, för förhoppningsvis befast och grundmurad förståelse, istället för att korttidsminnet belastas med en mängd enskilda och isolerade faktauppgifter.

---

**Lev Vygotskij** (1896–1934)

Rysk språkpsykolog. Hans teorier är fortfarande aktuella för både pedagoger och psykologer.

---

Lärare kan stödja elevers begreppsutveckling genom att rikta uppmärksamhet både mot det som kännetecknar och det som särskiljer de aktuella begreppen. Det är extra viktigt att elever får snabb återkoppling när de arbetar med begreppsutveckling eftersom det ofta är svårt att ändra en felaktig uppfattning som har blivit befast.

## En process

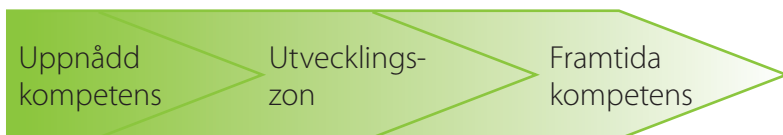
Begreppsutveckling kan ses som en pågående process där man allt eftersom lär sig att urskilja och formalisera sina begrepp ju äldre och mer erfaren man blir och desto mer undervisning man får. Begreppen kan efterhand förfinas, nyanseras och ges en alltmer exakt och precis innebörd och relateras till ännu fler begrepp. Det handlar om att förstå ett begrepp i en sådan mening att man kan använda det i de sammanhang som är rimliga. Att elever ska utveckla begreppet dubbelt kan vid första tanken höra hemma i de tidiga årskurserna: dubbelt så mycket som 5 är 10, men i senare årskurser utvidgas det till att dubbelt så mycket som  $x$  är lika med  $x + x$  eller  $2x$ .

Det kan därför vara problematiskt att ha scheman där eleverna, eller läraren, fyller i att de "kan dubbelt". Scheman kan däremot fylla en funktion för läraren vid bokföring av vad som har behandlats under läsåret eller för att eleverna ska få överblick över vad de ska göra eller har arbetat med under en viss period.

## *Den närmaste utvecklingszonen*

Den närmaste utvecklingszonen är ett begrepp som också har utvecklats av Vygotskij. Det beskriver avståndet mellan vad en elev kan prestera på egen hand utan hjälp och vad hon kan förstå under en vuxens ledning eller i samarbete med kamrater. Med god vägledning kan en elev lösa problem som annars skulle vara för svåra. Stödet kan exempelvis innebära hjälp med att reda ut vad som efterfrågas eller att problemet delas upp i mindre, välbekanta bitar. Att arbeta med uppgifter som ligger "snäppet över" den nivå man befinner sig på uppfattas många gånger som en positiv utmaning – av såväl barn som vuxna.

Det betyder att skillnaden mellan vad man kan och inte kan, inte alltid är glasklar. Det kan t ex handla om att lära sig använda en interaktiv skrivtavla eller att redigera bilder på datorn. Alla kan göra det om någon ger god handledning, men det tar en viss tid innan samtliga moment kan utföras på egen hand. Många situationer i vardagen och skolan har samma karaktär, det går att förstå vad som sägs och görs, men det är svårt att självständigt hantera alla led utan hjälp. Roger Säljö ser detta som en modell för hur kunskap bildas: Först exponeras man för resonemang och handlingar i ett socialt sammanhang, så småningom lär man sig att genomskåda dem, blir förtrogen med dem och till slut kan man självständigt genomföra dem från början till slut.



*Utvecklingszonen är avståndet mellan vad eleven kan på egen hand och vad som eleven kan med hjälp av någon mer erfaren person. (Lärande i praktiken)*

## Informellt – formellt språk

Under rubriken *Förstå och använd olika uttrycksformer* togs både elevernas informella vardagliga språkbruk och det formella matematikspråket upp. I matematikundervisningen behöver båda språken uppmärksammas och diskuteras. Målet är att eleverna ska utveckla sitt formella matematikspråk, men det förutsätter att de har ett vardagligt språk att utgå ifrån. Det är en styrka att obehindrat kunna växla mellan dem och är ett tecken på förståelse att både med vardagliga ord och matematiska termer kunna beskriva exempelvis ett cirkeldiagram eller en graf.

Elever har olika bakgrund och vilka begrepp de utvecklar i sin vardagsmiljö varierar stort. Idag kan skolan behöva ta ett större ansvar – jämfört med tidigare – att ge elever tillfälle att utveckla även vardagliga begrepp. Om elever ska tillägna sig formella matematiska begrepp kring viktenheter och enhetsbyten bör de först skaffa sig egna erfarenheter av att väga ett antal föremål med hjälp av en eller flera sorters vågar. Elever kan vara ovana vid att väga helt enkelt därför att hushållsvågar inte längre är lika nödvändiga i vardagen, eftersom mängden mjöl och socker numera ofta anges i deciliter och mängden potatis anges i antal potatisar och inte i en viktenhet. Även om det finns vågar av olika slag i mataffärer är det inte säkert att eleverna uppfattar att det är en våg och vilken funktion den har. Många är nog inte ens medvetna om att frukt och grönsaker ibland passerar en våg i kassan för att priset ska kunna beräknas.

I en matematikverkstad kan eleverna pröva att väga olika föremål med hjälp av både mekaniska och digitala vågar avsedda för skilda ändamål. Elever och lärare kan på så sätt skapa gemensamma referensramar och ett språkbruk som läraren sedan kan bygga den fortsatta undervisningen på.

Skillnaden mellan informellt och formellt språk kan bli uppenbar vid laborativt arbete. När två elever arbetar tillsammans med att lägga en figur med geometriska former av varierande storlek, fungerar det utmärkt att peka på en kvadrat och säga: *Ge mig den där fyr-*

*kanten.* Kamraten vet exakt vilken bit som avses, eftersom det i just denna situation bara finns ett begränsat antal fyrhörningar och en av dem precis har pekats ut.

I en liknande aktivitet sitter eleverna rygg mot rygg. Den ena eleven beskriver en figur och den andra lägger en likadan utan att se originalet. Då blir det problem om informationen enbart består av: *Börja med att lägga fyrkanten i mitten!* Kamraten undrar: *Vilken fyrkant?* Här måste en utförligare beskrivning ges och eleven säger: *Det är den fyrkanten som är stor och rak och avlång.*

I nästa aktivitet får den ena eleven bara svara ja eller nej på de frågor som ställs. Om det finns många former att välja bland, kan det bli omständligt och tvetydigt att med vardagsspråk ställa frågor när bitarna måste beskrivas i detalj. Det är effektivare att använda matematiska termer som entydigt utesluter ett antal bitar: *Är det en rundad form?* Nej. *Är det en triangel?* Nej. *Är den fyrkantig?* Ja. Vid det här laget har eleven börjat ringa in den efterfrågade formen och får gå vidare med alltmer specifika frågor. *Är det en kvadrat?* Nej. *Är det en rektangel?* Nej. *Är det en romb?* Nej. *Är det en parallelogram?* Ja. *Är det den minsta?* Ja!

Det är en stor fördel om det laborativa arbetet kan leda fram till att elever själva ser behov av och blir motiverade till att utveckla sitt formella matematikspråk.

## Elever uppfattar ord och begrepp på olika sätt

Det är antagligen sällan som ett begrepp är totalt okänt för alla elever i en klass. Några elever kan redan ha en god förståelse, medan andra har vaga eller mer eller mindre konsistenta föreställningar av begreppet. Det kan också finnas elever som gör direkt felaktiga kopplingar, som tex när de ska berätta vad de tänker på då de hör ordet "area" och de svarar att "det är något som är billigt" och gör en sammanblandning mellan area och rea (realisation). Andra liknande exempel är när de svarar att area hör ihop med opera och de ännu inte insett skillnaden mellan area och aria. Sådana svar ger läraren gyllene tillfällen att ta upp en diskussion om såväl det matematiska begreppet som de begrepp det har sammanblandats med.

En del elever kan ha uppfattningar av begreppet som kan vara korrekta i vissa sammanhang, men kanske inte alltid korrekta i ett matematiskt. Att elever associerar tex volym till volymknappen på en mobiltelefon eller till hårbalsam som påstås ge håret volym, är förståeligt och också helt korrekt. Här finns möjlighet att ta upp flera aspekter av begreppet volym och att det betyder olika saker i olika



kontexter. Därefter kan man fortsätta med att gå in på vad begreppet volym innebär i ett matematiskt sammanhang.

## Språkets betydelse

”Matematik och språk är ömsesidigt beroende; man behöver både matematiskt tänkande och språklig förmåga för att lösa problem”, är ett citat som hämtats från PRIM-gruppen i tidigare anvisningar till nationella prov. För många elever är det i första hand språket som lägger hinder i vägen för att de ska lyckas med matematik. En del elever kommer inte ens fram till det matematiska problemet i den benämnda uppgiften utan fastnar i texten med dess ord och begrepp.

Ebbe Möllehed har studerat hur elever i årskurserna 4–9 gått tillväga då de arbetat med problemlösning och han har granskat ca 10000 lösningar. Problemen har presenterats skriftligt och inom samtliga undersökta årskurser visas stora brister i textförståelse. Det är den faktor som påverkar problemlösningsprocessen allra mest, betydligt mer än räkneförmågan. Eleverna förstår inte innebörden i texten. Vissa ord och uttryck vållar bekymmer och ett stort antal elever har också brister i förståelsen av matematiska begrepp. Vardagliga uttryck som tur och retur tolkas felaktigt och begreppet dubbelt blir ”1 mer” eller ”2 mer”. I studien redovisas hur elever förväxlar namnen på geometriska figurer som kvadrat, rektangel och triangel, blandar samman omkrets och area och tolkar tex 5 % som  $1/5$ , 40 % som  $1/4$  eller 25 % som 25.

Det finns också forskning som pekar åt andra håll. Exempelvis har Torulf Palm i sin forskning om benämnda uppgifter visat att om man ändrar texten i en uppgift så att dess kontext blir mer autentisk så kan elevers lösningsfrekvens öka. Detta trots att texten ofta blir avsevärt längre och språkligt mer komplicerad. Det kan alltså å ena sidan vara nödvändigt att förstå den ingående matematiken, bland annat dess termer, för att kunna förstå sammanhanget i en uppgift. Men å andra sidan kan sammanhanget ge ett stöd så att förståelsen för ingående matematiska begrepp stärks.

Språkets betydelse för lärandet tas upp av Säljö i *Lärande i praktiken* och han beskriver sambandet så här: Att utvecklas och att lära innebär att språkliga distinktioner förvärvas så att nya hittills okända företeelser – som tex fotboll, cellbiologi och sannolikhetskalkyler – kan förstås på ett alltmer differentierat och nyanserat sätt.

Vygotskij betraktar språk och tänkande som tätt sammanlänkade och menar att den kognitiva utvecklingen hos barn hänger nära ihop med deras förmåga att använda språket. Barns upplevelser och

möjlighet att skaffa erfarenheter spelar dessutom en viktig roll för deras språkliga utveckling.

Det finns alltså goda skäl till att även fokusera på språket i matematikundervisningen och att det skulle gynna elevers lärande i matematik. Vid laborativt arbete kan diskussioner kring ord och begrepp uppstå spontant bland eleverna då de själva upptäcker att de behöver ha tillgång till ett större ordförråd. Inte minst blir detta uppenbart då de ska dokumentera och utvärdera sitt lärande. *Vad heter ...? Vad betyder ...? Hur kan man förklara ...? Finns det något annat ord för ...? Varför heter det ...?* I en verkstad finns också konkret material lätt tillgängligt för elever och lärare som vill visualisera begrepp som är föremål för diskussion.

## Fyra verb

Denna bok riktar sig i första hand till lärare i grundskolan, men det finns flera intressanta formuleringar kring begreppsutveckling i förskolan som vi anser vara allmängiltiga och oberoende av barns, elevers eller vuxnas ålder. I förskolans läroplan finns fyra verb i målbeskrivningen som på ett tydligt sätt beskriver vad det innebär att arbeta med begreppsutveckling: Förskolan ska sträva efter att varje barn ... utvecklar sin förmåga att *urskilja, uttrycka, undersöka* och *använda* matematiska begrepp.

I *Förskola i utveckling* beskrivs hur lärare kan arbeta för att små barn successivt ska kunna forma abstrakta begrepp för antal. Arbetsgången kan vara att barn i samspel med sin omgivning får konkreta erfarenheter av att uppmärksamma och urskilja likheter och olikheter mellan mängder. De uppmuntras att koppla samman sina erfarenheter med de språkliga uttrycken för mängd, som "två" och "tre". När barn sätter ord på eller på andra sätt uttrycker sina matematiska erfarenheter från lek, fantasi, temaarbete och vardagssituationer påbörjar de utveckling av matematiska begrepp. Vidare påpekas att även den omvända arbetsgången, när abstrakta begrepp konkretiseras, bidrar också den till begreppsutveckling.

# Förmågor

Förmågor har en framträdande roll i styrdokument från förskola till gymnasieskola. I det här kapitlet beskrivs kunnande i matematik utifrån åtta förmågor och hur alla kan komma till uttryck i en och samma laborativa aktivitet.

## Vad menas med förmågor?

I internationellt kursplanearbete har det under senare år blivit allt vanligare att beskriva elevers kunnande i matematik med hjälp av kompetenser eller förmågor. Benämningarna kompetenser och förmågor kan ges något skilda innebörder, men ska i vår text uppfattas som synonyma.

---

### Svenska Akademiens ordlista

*Kompetens* – tillräcklig skicklighet, behörighet

*Förmåga* – duglighet

---

Förmågorna delas upp i olika antal och benämns på varierande sätt beroende på i vilka ramverk och kursplaner de förekommer. Anledningen är att förmågorna i matematik inte är absoluta och därför har författare valt att göra skiftande indelningar för att beskriva kunnande i matematik. Principen är dock alltid densamma; att ge en helhetsbild av vad matematiskt kunnande innebär. En fördel med detta sätt att karaktärisera kunnande är att det fungerar oavsett ämnesområde i matematik och oberoende av elevernas ålder.

I svenska styrdokument lyfts förmågorna fram från förskola till gymnasieskola. I Lpfö 98 beskrivs vilka förmågor som förskolan ska sträva efter att varje barn utvecklar när det gäller matematik och i såväl Lgr 11 som Lgy 11 uttrycks explicit vilka förmågor i matematik som eleverna ska ges förutsättningar att utveckla. I Lpfö 98 finns dessa förmågor i matematik uppräknade under tre punkter, i Lgr 11 och Lgy 11 under fem respektive sju punkter.

Här återges "begreppsförmågan", som den uttrycks i de tre läroplanerna:

*Lpfö 98 rev 2010*

Förskolan ska sträva efter att varje barn

- utvecklar sin förmåga att urskilja, uttrycka, undersöka och använda matematiska begrepp och samband mellan begrepp.

*Lgr 11*

Genom undervisningen i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att

- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp.

*Lgy 11*

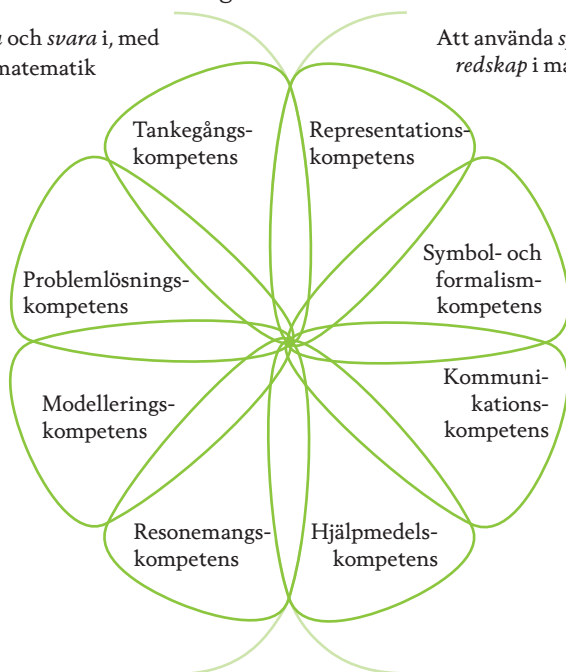
Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att

- använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.

I den danska KOM-rapporten, *Kompetencer og matematiklæring*, definieras åtta kompetenser som elever och studenter ska få möjlighet att utveckla från grundskola till högskola. Rapporten fanns med bland bakgrundsmaterialen när Lgr 11 arbetades fram.

Att fråga och svara i, med  
och om matematik

Att använda språk och  
redskap i matematik



I KOM-rapporten finns de åtta kompetenserna illustrerade i en blomform för att visa att de varken är hierarkiska eller helt skilda från varandra.

Vi har valt att i första hand utgå från KOM-rapporten eftersom den ger klargörande beskrivningar av de kompetenser som, enligt författarna, ingår i matematisk verksamhet. Vi återger en kortfattad och starkt begränsad presentation av huvudinnehållet i respektive kompetens. Urvalet har gjorts med tanke på vad som har relevans för arbete i en matematikverkstad och intresserade läsare hänvisas till ursprungstexten eller till andra skrifter som behandlar förmågor.

Observera att det inte finns någon hierarki mellan kompetenserna och att de ofta överlappar varandra.

## Kompetenser i aktiviteten Rika tärningar

I syfte att visa hur de olika kompetenserna kan utvecklas vid laborativ matematikundervisning har vi valt att exemplifiera dem utifrån aktiviteten *Rika tärningar*. Genomgången visar att eleverna kan ges förutsättningar att, i olika hög grad, utveckla samtliga kompetenser i en och samma aktivitet. Inledningsvis beskrivs aktiviteten:

### *Material*

Tre standardtärningar till varje elevpar och tre stora skumgummitärningar för lärarens demonstration.

### *Gör så här*

- Placera uppenbart slumpmässigt de tre stora tärningarna ovanpå varandra.
- Vrid "tornet" och visa eleverna att de kan se de flesta sidoytorna, men att det finns fem som är dolda; en i botten på den översta tärningen samt översta och understa sidoytan på de två andra tärningarna.



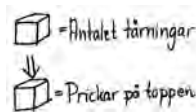
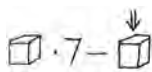
- Visa att du genom att bara titta på tornet kan säga vad summan av antalet prickar på de fem dolda sidoytorna är.
- Be en elev att kontrollera genom att addera de dolda sidoytornas prickar.
- Dela ut tre tärningar till varje elevpar och be dem att själva bygga nya tärningstorn.
- Gå runt i klassrummet och säg högt hur många prickar som är dolda i respektive tärningstorn.
- Låt varje elevpar kontrollräkna.
- Fråga eleverna hur det är möjligt att så snabbt kunna ange antalet dolda prickar. Ge dem tid att själva testa och prova. Om några elever kör fast, fråga om de vill ha en ledtråd. Eleverna kanske vill försöka ytterligare en stund, i annat fall kan de få förslag på hur de kan komma vidare:
  - Fundera över hur tärningen är konstruerad.
  - Vad händer om ni lägger ihop summan av prickarna på motstående sidor?
  - Prova med att bara använda två tärningar.
- När eleverna har förstått hur de kan gå tillväga, får några börja att med vardagsord beskriva hur de har tänkt. Läraren stödjer eleverna i hur det kan översättas till alltmör abstrakta representationer. Gå igenom varje steg och bokför så att alla kan följa hur formeln växer fram i små etapper:

Vardagligt språk

"Ta antalet tärningar och gånga det med sju. Ta sedan bort antalet prickar på toppen."

Vardagligt språk,  
men förkortat"Ta antalet tärningar  $\cdot 7$  och sedan minus antalet prickar på toppen."

Egna ritade symboler



Egna bokstavssymboler

 $t \cdot 7$  och sedan minus  $p$  $t = \text{ant tärningar}$  $p = \text{ant prickar på toppen}$ 

Matematiska symboler

 $n \cdot 7 - m$  $n = \text{ant tärningar}$  $m = \text{ant prickar på toppen}$ 

$$7 \cdot n - m$$

Formel

$$7n - m$$

När vi provat denna aktivitet med lärare är det många som spontant säger att den är fullt möjlig att genomföra tillsammans med eleverna i årskurs 2 eller 3 – även om krav på fullständig förståelse naturligtvis inte kan ställas. Man kan t o m påpeka att ”det här behöver ni inte kunna på egen hand nu, men när ni blir äldre kommer ni att kunna göra beräkningar med hjälp av formler”. Några lärare menade att det kan kittla yngre elevers intresse att få en inblick i vad algebraiska symboler och formler innebär.

*En ”magisk” variant för de yngsta eleverna*

Aktiviteten tränar sjukamrater, d v s hur talet 7 kan delas upp i två delar på olika sätt. Eleverna får omedelbar feedback då de kan kontrollera sitt svar genom att vända på tärningen och räkna antalet prickar.

- Presentera problemet med endast en tärning.
- Du kan säga att du har fått ”en magisk kraft” och kan se genom bordsskivor.
- Låt en elev slå tärningen på ett bord medan du tillfälligt tittar bort.
- Titta under bordsskivan och visa att du direkt kan tala om antalet prickar på tärningens undersida.
- Gör det flera gånger och låt eleverna kontrollera att det stämmer.
- Be eleverna undersöka om de kan avslöja tricket.
- Låt dem sedan berätta för sina kamrater.
- I nästa steg kan de arbeta parvis, slå en tärning varannan gång och själva säga hur många prickar som är dolda.
- I den gemensamma uppföljningen redovisar eleverna alla kombinationer av talet 7 och resultatet skrivs upp:  $1 + 6$ ,  $2 + 5$ ,  $3 + 4$  etc

En utförlig beskrivning av aktiviteten finns i Nämnarenartikeln *Rika tärningar*.

## Begreppskompetens

Begreppskompetens – eller tankegångskompetens som den heter i KOM-rapporten – innefattar att:

- känna till, förstå och hantera givna matematiska begrepp (se kapitlet *Begrepp och uttrycksformer*)
- utifrån ett begrepps egenskaper kunna lyfta det till en alltmer abstrakt nivå
- förstå vad generalisering innebär och att själv kunna göra generaliseringar så att en större grupp av objekt omfattas.

Med *konkret* menas sådant som kan uppfattas med våra fem sinnen, sådant vi kan se, ta på, flytta med mera, medan *abstrakt* är sådant som vi bara kan uppfatta med våra tankar och fantasier. I det här sammanhanget är föremål och hanterandet av föremål exempel på konkret, medan matematiska begrepp, samband och hur vi tänker med hjälp av dem exempel på abstrakt. *Generaliseringar* – i betydelsen att öka räckvidd eller omfattning hos ett påstående – kan göras både utifrån konkret material och abstrakt tänkande.

Elevers egna iakttagelser och resultat knyts ofta till konkreta och specifika situationer. I rapporten understryks att läraren måste kunna leda elevernas lärande vidare, så att de kan abstrahera och uppfatta generella sammanhang när det handlar om matematiska resultat.

### *Exempel på begreppskompetens i Rika tärningar:*

I aktiviteten tar eleverna steg från *en* konkret och specifik situation till ett abstrakt och generellt matematiskt sammanhang. När yngre elever endast använder en tärning kan lärarens analys se ut så här:

|          | Specifik                                                                                                             | Generell                                                                                  |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| Konkret  | Det är tre på ena sidan av den blåa tärningen. Allt (summan) ska bli sju. Då måste det vara fyra på den andra sidan. | Lägger man ihop talen mitt emot varandra på den här blå tärningen blir svaret alltid sju. |
| Abstrakt | $7 = 3 + 4$<br>$7 = 3 + \_$<br>$3 + \_ = 7$                                                                          | Summan av motstående sidor är alltid sju på denna typ av tärning.                         |



När äldre elever använder tre tärningar kan det beskrivas:

|          | Specifik                                                                                       | Generell                                                  |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Konkret  | Det finns tre tärningar. Jag tar tre gånger sju. Sen tar jag bort de fyra prickarna på toppen. | Ant tärningar gånger 7 och sen minus prickarna på toppen. |
| Abstrakt | $(3 \cdot 7) - 4$                                                                              | $7n - m$                                                  |

## Representationskompetens

Enligt KOM-rapporten innebär denna kompetens att kunna

- förstå och använda olika slags representationer
- översätta och välja mellan representationer beroende på situation och syfte.

En del av kompetensen är att kunna uppfatta inbördes kopplingar mellan olika representationer och ha kännedom om deras styrkor och svagheter. I Skolinspektionens rapport *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet* definieras representationskompetens som förmåga att ersätta en matematisk företeelse med en annan. Se även *Vad är uttrycksformer?* på sid 37–41.

*Exempel på representationskompetens i Rika tärningar:*  
Elever kan i en verklig situation uttrycka sambandet

- med hjälp av tärningarna
- med vardagligt och matematiskt språk
- genom att rita av tärningarna och prickarna
- med siffror och symboler i en formel.

De kan också se för- och nackdelar med de olika representationerna. Är det ett litet antal tärningar går det bra att använda dem men är antalet tärningar stort är formeln mycket effektivare, eftersom det går att få fram antalet dolda prickar utan att behöva räkna dem – oavsett antalet tärningar.

## Resonemangskompetens

I KOM-rapporten kännetecknas denna kompetens av att kunna *följa* och *bedöma* ett matematiskt resonemang. Enligt Lgr 11 ska eleverna ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att *föra* och *följa* matematiska resonemang. Vi har därför valt att beskriva vad samtliga tre verb kan innebära. Beskrivningarna utgår ifrån ovanstående texter samt kommentarmaterialen till grundskolans kursplan och gymnasieskolans ämnesplan, inklusive förarbete av Anette Jahnke och Marie Skedinger-Jacobsson.

- Att *föra* ett resonemang innebär att eleven själv eller tillsammans med andra tex föreslår, gissar, förutsäger, ifrågasätter, testar, finner mönster, förklarar, motiverar, argumenterar och generaliserar.
- Att *följa* ett resonemang innefattar att kunna tolka andras resonemang.
- Att *bedöma* ett resonemang betyder att man kan avgöra om egna eller andras resonemang är hållbara och kan ligga till grund för de påståenden, slutsatser eller förslag på lösningar som förs fram.

*Exempel på resonemangskompetens i Rika tärningar:*

*Stina:* Vad händer om man har fyra tärningar?

*Marko:* Ska man ta  $1 + 7$  då, eftersom man lägger till en tärning?

*Stina:* Nej, så kan det väl inte vara. Det är ju inte prickarna som ökar med ett, utan antalet tärningar. Kan man inte tänka fyra tärningar gånger sju minus prickarna på toppen?

*Marko:* Vi testar ...

## Kommunikationskompetens

Här handlar det om att kommunicera *i, med* och *om* matematik. Det betyder

- å ena sidan att kunna sätta sig in i och tolka matematikinnehållet i andras skriftliga, muntliga eller visuella beskrivningar
- å andra sidan att själv kunna uttrycka ett matematikinnehåll på olika sätt och på olika nivåer anpassat för mottagaren.

Resonemang och kommunikation kan tyckas ligga nära varandra. I det här sammanhanget innebär kommunikationskompetensen någon form av informationsutbyte, medan resonemangskompetensen även innebär att följa och bedöma argumentationen. Innehållet i kommunikation kan vara ett resonemang, men vi kan också kommunicera utan att något resonemang förs. En annan skillnad är att kommunikation sker mellan minst två personer medan resonemang också kan ses som en process mellan en individ och matematiken. Man kan tex resonera med sig själv om hur man ska lösa ett matematiskt problem.

*Exempel på kommunikationskompetens i Rika tärningar:*

Eleverna får i uppgift att beskriva vad de kommit fram till för både en elev i årskurs 1 och för en matematiklärare. På så sätt får de öva sin förmåga att skriva för olika mottagare.

## Modelleringskompetens

Modelleringskompetens är att kunna formulera, analysera och kritiskt granska matematiska modeller. Det innebär att

- utgå från en given situation, som i sig själv inte är matematisk
- kunna översätta problemställningen till ett matematiskt område som sedan resulterar i en matematisk modell
- analysera och kritiskt granska modellen i processens slutskede.

*Exempel på modelleringskompetens i Rika tärningar:*

- Eleverna utgår från en verklig situation (tre tärningar ovanpå varandra, där de ska ta reda på antalet dolda prickar),
- översätter till en matematisk modell (uttrycker den i vardagligt språk "antalet tärningar gånger sju minus prickarna på toppen" eller i formeln  $7n - m$ )
- och granskar modellen kritiskt. Är den matematiskt korrekt? Är modellen brukbar i den verkliga och ursprungliga situationen, dvs när de ska räkna ut antalet dolda prickar på tärningar som står ovanpå varandra? Finns det andra modeller – och i så fall vilka?

- I kompetensen ingår också att kunna "avmatematisera" en modell, dvs att gå från andra hållet och översätta tillbaka till en icke-matematisk situation. Eleverna ska då utifrån formeln  $7n - m$  illustrera situationen med hjälp av tärningar. De skulle också kunna visa hur formeln kan representera en annan verklig situation.

## Problemlösningskompetens

Denna kompetens består av att

- kunna formulera olika slag av matematiska problem
- lösa olika slag av matematiska problem.

I det här sammanhanget innebär "problem" att det är en matematisk fråga som kräver någon form av matematisk undersökning för att kunna besvaras. Begreppet "matematiskt problem" är inte absolut, utan är beroende av den person som ska lösa det. Det som är en rutinuppgift för en individ kan vara ett problem för en annan. Det är viktigt att hålla isär att "lösa problem" och att "lösa rutinuppgifter".

---

För att lösa ett problem kan man behöva bryta ner det och behärska olika procedurer och utföra delar som är av rutinkaraktär. Men problemet som helhet löses inte på rutin.

Anette Jahnke

---

### *Exempel på problemlösningskompetens i Rika tärningar:*

En elev förklarar: Vi började med ett enklare problem och tog först bara två tärningar. Summan av prickarna på motstående sidor är 7. Vi hade två tärningar och gångrade med 7, alltså  $2 \cdot 7 = 14$ . Sen tog vi bort prickarna på toppen, alltså  $14 - 4 = 10$ . Då förstod vi hur vi skulle tänka när vi hade tre tärningar.

## Problemlösningssmodell

Det finns många som har skrivit om värdet av problemlösning och hur man kan gå tillväga under processens gång. En av dem är George Pólya som redan 1945 lanserade en numera klassisk modell bestående av fyra steg:

- *Förståelse.* Vad innebär uppgiften? Är alla ord och begrepp förståeliga? Hur kan frågan omformuleras med egna ord? Vad efterfrågas? Vilka förutsättningar gäller? Finns illustrationer och varför finns de i så fall med? Finns överflödig information? Saknas några uppgifter?
- *Plan.* Liknar uppgiften något tidigare problem? Vilka delfrågor kan ställas? Vilken fråga bör ställas först? I vilken ordning bör övriga frågor ställas? Vilka Lösningsstrategier är tänkbara? Finns det fler möjligheter? Välj lämplig strategi, tex att
  - gissa och prova
  - söka efter mönster
  - dramatisera
  - rita en figur
  - förenkla problemet
  - skriva en ekvation
  - göra en modell
  - göra en tabell
  - arbeta baklänges
  - prova alla möjligheter.
- *Utförande.* Följ planen! Kontrollera varje steg.
- *Återkoppling.*
  - Kan resultatet kontrolleras? Är resultatet rimligt? Finns andra sätt att få fram lösningen? Finns det fler lösningar? Vilka?
  - Gäller alltid resultatet? Vad händer om villkor ändras? Vilka rimliga generaliseringar kan göras?
  - Analysera Lösningsstrategin. Fördelar? Nackdelar? Vad är kärnan i problemet?

Pólyas modell har efter hand vidareutvecklats. När det gäller planering och vilken strategi som ska väljas för att lösa det aktuella problemet kan listan kompletteras med ytterligare alternativ, som att göra listor och diagram, att arbeta med laborativa material – och att sova på saken. Ibland kan det helt enkelt vara bra att lägga problemet åt sidan, ägna sig åt andra verksamheter ett tag och fortsätta vid ett senare tillfälle. Inte sällan kan en idé om lösning dyka upp när man minst anar det.

Det kan uppfattas som att Pólyas problemlösningssmodell innebär en linjär process och ge sken av att problemlösning alltid kan systematiseras. I själva verket är en kreativ problemlösningssprocess ofta ostrukturerad. Elever som lyckas bra med problemlösning är ofta flexibla i sitt tänkande. De "kör inte fast" utan byter spår om de upptäcker att den planerade strategin inte håller. En plan ska därför kunna ändras under lösningsprocessens gång.

Denna problemlösningssmodell är ändå gångbar vid planering av lektioner med laborativa aktiviteter. Det första steget – *förståelse* – och tillhörande frågor är lämpliga för att få djup i den inledande diskussionen och för att lägga en grund för den fortsatta processen. Därefter arbetar eleverna individuellt, i par eller i grupp och gör upp en *plan* för hur de ska lösa problemet innan de påbörjar sitt *utförande* av planen. Vid den avslutande diskussionen finns förslag på frågor under rubriken *återkoppling*. Är eleverna ovana vid arbetssättet kanske även de frågor som berör planeringen tas upp gemensamt. Frågorna är av allmän karaktär och behöver naturligtvis anpassas till både eleverna och till de aktiviteter som är aktuella.

## Symbol- och formalismkompetens

Kompetensen består bland annat av att kunna

- tolka, förstå och hantera symboliskt matematiskt språk och översätta fram och tillbaka mellan matematiskt språk och vardagligt språk.

Detta betyder också att ha kännedom om vedertagna konventioner inom det matematiska språket. Att t ex veta att siffersymbolen skrivs före variabeln och att multiplikationstecknet inte skrivs ut mellan siffersymbolen och variabeln ( $7n - m$ ).

Det finns lärare som förklarar sådana konventioner ungefär så här för sina elever: Detta är inget som man behöver försöka förstå, utan det är helt enkelt överenskommelser som har vuxit fram mellan människor som arbetar med matematik.

*Exempel på symbol- och formalismkompetens i Rika tärningar:*

I många små steg översätts elevernas vardagliga språk till en matematisk formel. Läraren avgör hur långt undervisningen, med avseende på elevgrupp, kan sträcka sig mot det matematiska symbol- och formelspråket.

"Ta antalet tärningar och gånga det med sju. Ta sedan minus antalet prickar på toppen."



$$7n - m$$

*Hjälpmedelskompetens*

Att kunna dra nytta av olika hjälpmedel och vara medveten om deras möjligheter och begränsningar är innebörden i hjälpmedelskompetens. Med hjälpmedel menas i detta sammanhang

- traditionella matematikhjälpmedel som linjal, passare, gradskiva
- tekniska hjälpmedel som miniräknare, grafitare, dator
- konkreta material som tärningar, geobräden, centikuber, klossar, brickor, stavar, kulramar och geometriska mallar.

Konkret material kan utnyttjas för färdighetsträning, för att undersöka sammanhang och mönster, stödja begreppsbildningen, testa hypoteser med mera.

Det kan tyckas så självklart att elever ska kunna använda material att det tas för givet att de kan det. Erfarenhet visar ändå att många elever har svårt att hantera exempelvis linjal, vinkelhake, gradskiva och passare på ett effektivt och ändamålsenligt sätt.

*Exempel på hjälpmedelskompetens i Rika tärningar:*

Aktiviteten ger eleverna insikt i hur en standardtärning är konstruerad. Principen för dess konstruktion kan eleverna även ta med sig om aktiviteten utökas till tärningar med exempelvis 8, 10 eller 12 sidor. Dessa är också stapelbara och på var och en av dem är summan av motstående sidor lika. För säkerhets skull är det bra att alltid kontrollera att tärningarna som ska användas verkligen är konstruerade på det sättet.

## Sammanfattningsvis

Genomgången av kompetenserna visar att vid en välstrukturerad laborativ matematikundervisning finns det många möjligheter för elever att utveckla olika förmågor. En och samma laborativa aktivitet kan ge elever förutsättningar att utveckla de förmågor som finns beskrivna både i KOM-rapporten och i Lgr 11.



# Laborativt arbetssätt i matematik

Ett laborativt arbetssätt får aldrig bli ett självändamål. Laborativ matematikundervisning ska bidra till att styrdokumentens intentioner omsätts i elevens dagliga verksamhet. Förslag ges på hur arbetet kan läggas upp så att eleverna får förutsättningar att uppfatta och förstå matematiken i aktiviteterna.

## Vad säger styrdokumentet?

Goda kunskaper om innehållet i de nationella styrdokumentet är nödvändiga för att fullt ut förstå värdet av den laborativa matematikundervisningens möjligheter.

Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011

Den samlade läroplanen som styr grundskolans verksamhet innehåller tre delar:

1. Skolans värdegrund och uppdrag
2. Övergripande mål och riktlinjer
3. Kursplaner samt kunskapskrav

## Skolans värdegrund och uppdrag

Det finns stöd för ett laborativt arbetssätt redan i läroplanens första del om skolans värdegrund och uppdrag. Vi har begränsat oss till några citat som har direkt betydelse för undervisning i en matematikverkstad och vad som kan eller ska utvecklas hos eleverna. En stor del av det som tas upp i denna handledning om laborativt arbetssätt är exempel på hur läroplanens intentioner kan realiseras i vardagen.

Den [utbildningen] ska främja alla elevers utveckling och lärande samt en livslång lust att lära. Lgr 11, s 7

Undervisningen [...] ska utveckla deras förmåga att ta ett personligt ansvar. Genom att delta i planering och utvärdering av den dagliga undervisningen och få välja kurser, ämnen, teman och aktiviteter, kan eleverna utveckla sin förmåga att utöva inflytande och ta ansvar. Lgr 11, s 8

Skolan ska stimulera elevernas kreativitet, nyfikenhet och självförtroende samt vilja till att pröva egna idéer och lösa problem. Lgr 11, s 9

Skolans arbete måste inriktas på att ge utrymme för olika kunskapsformer och att skapa ett lärande där dessa former balanseras och blir till en helhet. Lgr 11, s 10

## Övergripande mål och riktlinjer

I de övergripande målen anges de normer och värden samt de kunskaper som alla elever bör ha utvecklat när de lämnar grundskolan. Målen anger inriktningen på skolans arbete. I en välplanerad laborativ undervisning kan eleverna ges möjlighet att utveckla sitt tänkande och att samarbeta med andra. Några citat som belyser detta:

Skolan ska ansvara för att varje elev efter genomgången grundskola

- kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet

- kan lära, utforska och arbeta både självständigt och tillsammans med andra och känna tillit till sin egen förmåga.

Lgr 11, s 13

I nedanstående punkter får lärare goda argument för att arbeta laborativt i matematikundervisningen. Under rubriken Kunskaper anges riktlinjer där det explicit anges att läraren ska organisera och genomföra sitt arbete så att eleverna

- utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga
- upplever att kunskap är meningsfull och att den egna kunskapsutvecklingen går framåt
- får stöd i sin språk- och kommunikationsutveckling
- får möjligheter till ämnesfördjupning, överblick och sammanhang.

Lgr 11, s 14

Läraren ska också

- svara för att eleverna får pröva olika arbetssätt och arbetsformer.

Lgr 11, s 15

Rektor har enligt läroplanens skrivningar både skyldigheter och goda förutsättningar att stödja laborativt arbete i matematikverkstaden genom sitt övergripande ansvar för att verksamheten som helhet inriktas mot de nationella målen. Rektor har också, i sin roll som pedagogisk ledare, ett särskilt ansvar för att skolans arbetsmiljö utformas så att eleverna får tillgång till handledning, läromedel av god kvalitet och annat stöd för att själva kunna söka och utveckla kunskaper, t ex bibliotek, datorer och andra hjälpmedel. Dessutom ska rektor ansvara för att personalen får den kompetensutveckling som krävs för att de professionellt ska kunna utföra sina uppgifter.

Erfarenheter visar att skolläringens intresse och engagemang för matematikverkstäder har avgörande betydelse för hur de byggs upp och framförallt vidareutvecklas. Matematikverkstaden bör vara hela skolans angelägenhet och ingå i skolans långsiktiga verksamhetsplan.

## Kursplaner samt kunskapskrav

Laborativ matematikundervisning, så som den tas upp i denna bok, får tydligt stöd i inledningen till kursplanen där det fastslås att ”matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet”. För att inte trötta ut läsaren med alltför många citat har vi valt att avgränsa oss till de som berör förmågor, eftersom det är dem som kunskapskraven utgår från. Se även kapitlet *Förmågor*.

Genom undervisningen i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter
- föra och följa matematiska resonemang
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.

Lgr 11, s 63

En väl genomförd laborativ matematikundervisning kan ge elever förutsättningar att utveckla samtliga förmågor.

Det centrala innehållet är uppdelat i sex områden i kursplanen: Taluppfattning och tals användning, Algebra, Geometri, Sannolikhet och statistik, Samband och förändring samt Problemlösning. Det är upp till läraren att utifrån didaktiska överväganden avgöra när laborativa aktiviteter kan stödja elevers förståelse för det matematiska innehåll som behandlas i undervisningen.

Kunskapskraven anger kunskapsnivån för godtagbara kunskaper och för de olika betygsstegen. En fördel med att arbeta laborativt och att elever dokumenterar sitt eget lärande är att det ger ett bredare underlag för att allsidigt utvärdera elevers kunnande. Det ger läraren tillgång till flera alternativa bedömningsinstrument än enbart skriftliga poängsatta prov.

## Allmänna råd

Skolverket har utarbetat *Allmänna råd med kommentarer om planering och genomförande av undervisningen*. Avsikten är att ge stöd för hur de statliga reglerna bör hanteras i praktiken och "syftar till att påverka utvecklingen i en viss riktning". Råden är inte så allmänna som det i förstone kan uppfattas utan bör "följas om skolan inte handlar på ett annat sätt som gör att kraven i bestämmelserna uppfylls". Skolverket rekommenderar en balans mellan olika arbetssätt och tar dessutom avstånd från en allt för hög andel individuellt arbete. Följande citat ligger i linje med ett laborativt arbetssätt:

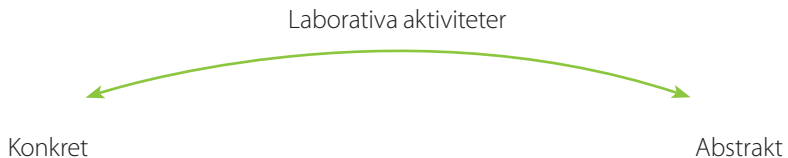
Läraren bör i sin ledning av undervisningen

- strukturera och styra de processer som sker i undervisningen och skapa balans mellan gemensamma genomgångar och diskussioner, enskilt arbete och samarbete mellan elever för att skapa goda förutsättningar för varje elevs lärande.

Allmänna råd, s 17

## I vilka syften kan laborativa material användas?

Hur kan styrdokumentens avsikter omsättas till laborativ matematikundervisning? För att utveckla matematiska begrepp och tankar samt för att upptäcka mönster och samband kommer laborativa material väl till pass. Material kan också brukas som åskådligt stöd för beräkningar, vid problemlösning och vara ett sätt att konkretisera matematiska begrepp som eleven redan är bekant med.



*Laborativa aktiviteter kan fungera som en länk mellan konkret och abstrakt.*

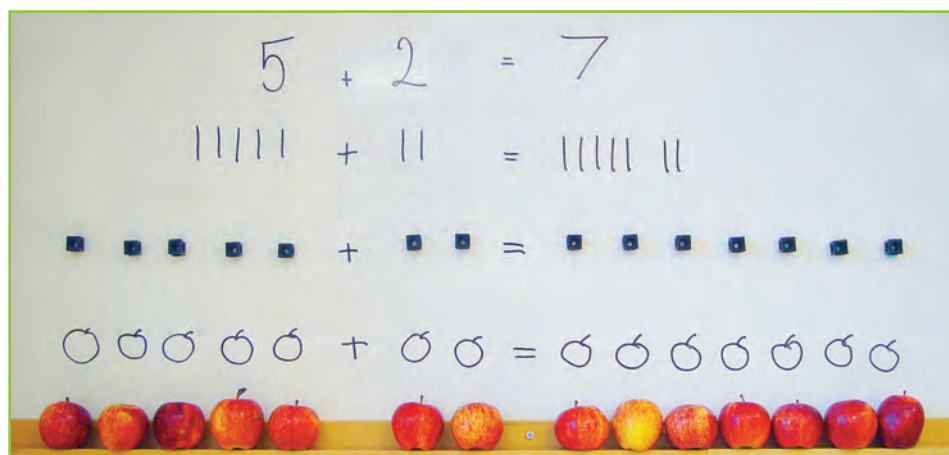
Oftast får eleverna gå mellan det konkreta och det abstrakta flera gånger. En elev kan arbeta med en aktivitet, få förståelse för det ab-

strakta matematiska innehållet och visa det i sin dokumentation. I en mer utmanande uppgift kan eleven behöva gå tillbaka till det laborativa arbetet för att få en djupare förståelse av de redan kända begreppen och för att utveckla nya. Laborativt arbete är alltså inte bara en angelägenhet för de yngsta eleverna eller för elever i svårigheter: det är angeläget för *alla* elever!

När man går från det konkreta till det abstrakta görs både vinster och förluster. Ett exempel är när elever upptäcker att 5 äpplen och 2 äpplen tillsammans blir 7 äpplen, genom att först lägga äpplena i två grupper och sedan föra ihop dem till en grupp. Eleverna drar slutsatsen att  $5 + 2 = 7$ , som ju är ett abstrakt påstående eftersom de inblandade äpplena inte längre nämns. Fördelen är att detta påstående gäller i många olika sammanhang, inte bara för äpplen utan även för croissanter, motorcyklar, människor, planeter etc.

Nackdelen med påståendet  $5 + 2 = 7$  är att det inte längre finns något konkret exempel framför våra ögon, vilket gör att det hela lätt uppfattas som verklighetsfrämmande. Det är intressant att notera att ordet abstrakt kommer från det latinska 'abstractus' som betyder att något dras ut från något annat. I det här fallet har just *antalet* äpplen "dragits ut", men själva äpplena och deras form, färg, doft med mera finns inte längre med.

I grundskolan går det i regel att konkretisera matematik genom olika tillämpningar och på så sätt få bekräftat att matematiken faktiskt fungerar i praktiken. Det finns en väg tillbaka från det abstrakta till det konkreta. Den matematiska likheten  $5 + 2 = 7$  kan illustreras med äpplen, knappar, kuber, enkronor och på så sätt bli uppenbar även för elevens ögon och verksamma händer. Ju fler sinnen som engageras desto bättre och matematik framstår inte bara som ett skolämne utan som något som kan vara till nytta i vardagen utanför skolan.



Från äpplen till matematiska symboler.

## Generalisering

En god undervisning bör ge eleverna förutsättningar att utveckla förmågan att föra, följa och bedöma matematiska resonemang samt att dra slutsatser och att generalisera.

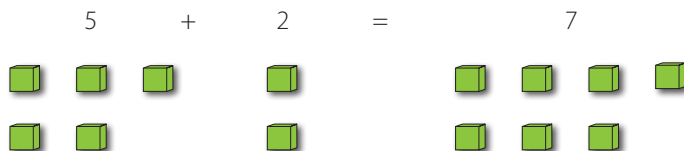
Graden av generalisering är ett uttryck för kvaliteten på elevernas kunskande. Eleverna kan ha i uppgift att finna ett matematiskt samband för vad som händer när ett udda tal adderas med ett jämnt tal. De kan då utgå från konkret material som äpplen – av praktiska skäl är konstgjorda ofta att föredra – och se vad som händer vid varje enskild situation: 5 äpplen + 2 äpplen = 7 äpplen. Efter att ha undersökt en mängd kombinationer och ordnat dem i en tabell kommer de fram till ett generellt påstående: Ett udda antal äpplen plus ett jämnt antal äpplen är ett udda antal äpplen.

Något äldre elever kan också formulera ett generellt samband som baseras på abstrakt matematik. De börjar med  $5 + 2 = 7$  och fortsätter att variera termerna tills de anser sig ha fog för ett allmängiltigt påstående: *Summan av ett jämnt tal och ett udda tal är udda.*

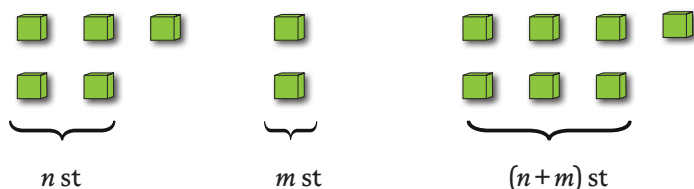
|          | Specifik                       | Generell                                                                    |
|----------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Konkret  | 5 äpplen + 2 äpplen = 7 äpplen | Ett udda antal äpplen plus ett jämnt antal äpplen är ett udda antal äpplen. |
| Abstrakt | $5 + 2 = 7$                    | Summan av ett jämnt tal och ett udda tal är udda.                           |

Uppgiften kan alltså starta i en konkret och specifik situation som avslutas abstrakt och generellt. Eleverna utgår från äpplen, men den slutsats som dras gäller för heltal, inte bara för äpplen.

En fördel med laborativa material i detta exempel är att det konkret går att se det generella sambandet. Läggs ett udda respektive ett jämnt antal kuber upp parvis så är det möjligt att se att summan är udda.



En kub ligger ensam – udda – även om alla kuber förs samman. Det är möjligt att se att detta samband måste gälla för alla olika antal kuber, så länge den ena mängden kuber är udda och den andra är jämn. Det kan finnas hur många par av kuber som helst i en udda mängd, det är bara den sista ensamma kuben som avgör att just den mängden är udda. I en jämn mängd med kuber är det alltid ett visst antal par av kuber, ingen kub är ensam. För att ytterligare lyfta matematikinnehållet finns här ett tillfälle att gå så långt som till ett algebraiskt bevis:  $(2n + 1) + 2m = 2(n + m) + 1$ .



I detta fall ger det laborativa materialet en vägledning – som siffer-symboler inte påvisar – för hur beviset kan genomföras. På motsvarande sätt kan resonemang föras om vad som sker då två udda eller två jämna tal adderas.

---

Bokstäverna  $n$  och  $m$  används ofta för naturliga tal.

---

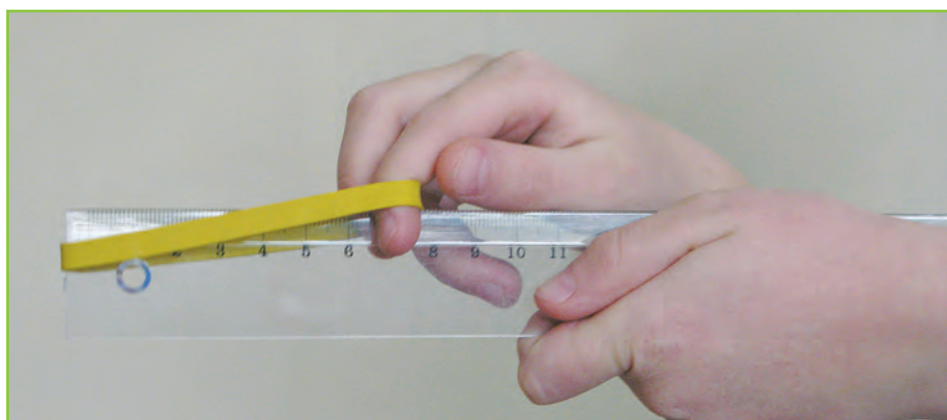
Ordet *udda* betyder att ett tal inte kan delas jämnt med två, utan rest. I Nationalencyklopedins ordbok uppges att ordet är släkt med udd som i sin tur förklaras som en spetsig ände på ett föremål. Synonym till udda är ojämn och motsatsen är jämn. I exemplet ovan är det tänkbart att associera det udda antalet kuber med en ojämn kant där en av kuberna sticker ut. En jämförelse kan göras med norskan där ett jämnt antal anges med ordet *par-tal* och därigenom på ett bildligt sätt visar innebörden i begreppet.

Material ger möjlighet både att arbeta undersökande och att demonstrera valda delar av matematik. Nedan ges två exempel på hur elever kan arbeta undersökande, då de skjuter gummisnoddar för att få underlag till en graf eller när de med hjälp av plockmaterial konkretiserar ett matematiskt uttryck. I det första exemplet startar eleverna i en konkret situation, i det andra i ett abstrakt uttryck. Därefter beskrivs hur material används av läraren som redskap för att konkretisera innebörden av 0,5 och av elever när de demonstrerar vad som händer när ett heltal divideras med 0,5.



## Från konkret till abstrakt

Laborativa material kan fungera som en länk mellan konkreta händelser och abstrakta matematiska modeller. Från ett tidigare utgivet norskt material har en idé hämtats där eleverna ska skjuta gummisnoddar för att få underlag till en graf vilken beskriver skottets längd som en funktion av gummisnoddens töjning. Målet är att skapa förståelse för funktionsbegreppet och att ge exempel på matematisk modellering. Här är gummisnoddsskjutandet verkligheten och resultatet översätts rent matematiskt i en tabell och en graf. Slutligen får eleverna värdera modellen, d v s diskutera förutsättningar och begränsningar i verkligheten som kan påverka resultatet.



- Gummisnodden ska skjutas iväg med hjälp av kortsidan på en linjal, vilken hålls på högkant och mot magen.
- Förbered en tabell med två kolumner.
- Töj gummisnoddens 0,5 cm och skjut iväg den. Mät skottets längd och för in i tabellen. Öka töjningen med ytterligare 0,5 cm: skjut, mät, anteckna och upprepa till 4,5 cm.
- Använd rutat papper. Rita ett koordinatsystem och välj lämpliga avstånd på axlarna. För in värdena och rita grafen.

| GUMMISNODD      |                        |
|-----------------|------------------------|
| TÖJNING<br>1 cm | SKOTTETS LÄNGD<br>1 cm |
| 0,5             |                        |
| 1,0             |                        |
| 1,5             |                        |
| 2,0             |                        |
| 2,5             |                        |
| 3,0             |                        |
| 3,5             |                        |
| 4,0             |                        |
| 4,5             |                        |

- Låt eleverna försöka förutse vad som händer då snodden töjs till 5 cm eller 6 cm. Testa om det stämmer.
- Värdera den matematiska modellen. Vilka begränsningar finns? (Linjalen vinklas olika i både höjd- och sidled, gummisnoddarna blir "uttröttade", skottet blir snett ...) I vilka andra sammanhang kan modellen användas?

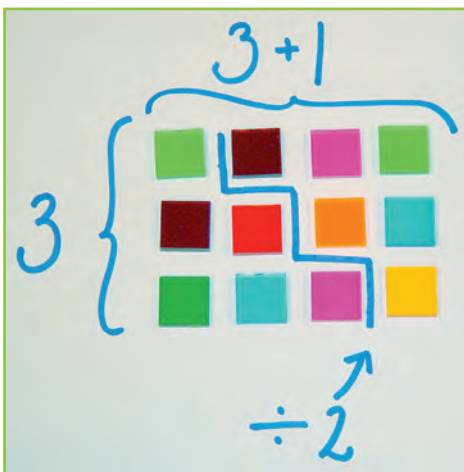
Ett alternativt och betydligt öppnare sätt att arbeta med denna aktivitet är att dela ut gummisnoddarna, be eleverna undersöka och beskriva sambandet mellan gummisnoddens töjning och skottets längd. Utifrån variationen i elevernas beskrivningar kan en diskussion föras om olika modellers för- och nackdelar.

### Från abstrakt till konkret

Utgångspunkt kan också tas i motsatt ände, dvs att laborativa material används för att visualisera ett abstrakt uttryck. Ett exempel på detta

är när elever utgår från uttrycket  $\frac{n(n+1)}{2}$  och med hjälp av valfritt material åskådliggör sambandet.

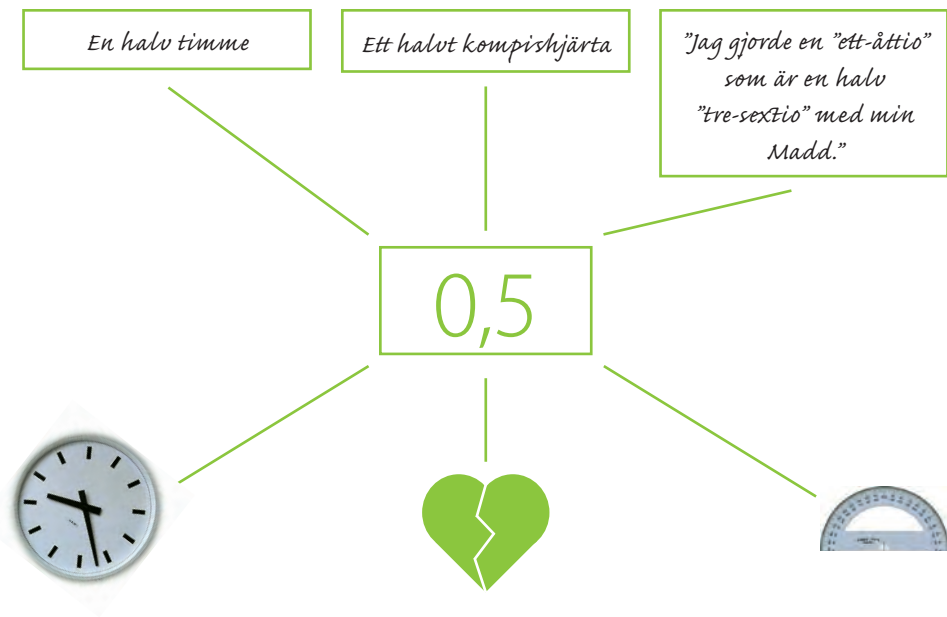
| $n$ | $\frac{n(n+1)}{2}$      |
|-----|-------------------------|
| 1   | $\frac{1(1+1)}{2} = 1$  |
| 2   | $\frac{2(2+1)}{2} = 3$  |
| 3   | $\frac{3(3+1)}{2} = 6$  |
| 4   | $\frac{4(4+1)}{2} = 10$ |
| 5   | $\frac{5(5+1)}{2} = 15$ |



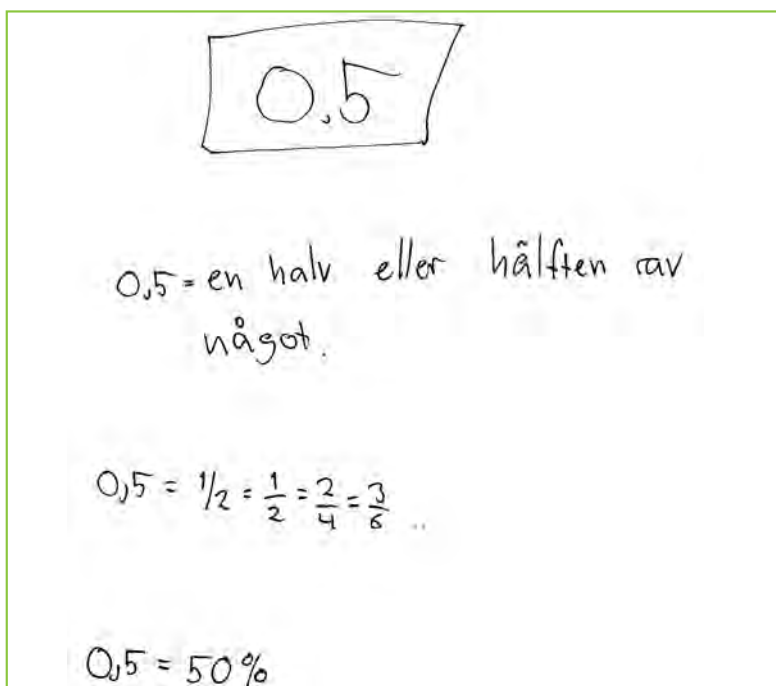
Vid uppföljning av aktiviteten redovisar eleverna vad de har gjort och beskriver hur de har resonerat. Jämförelser görs mellan de olika elevlösningarna. Påverkar valet av material redovisningen? Ger ett speciellt material bättre stöd åt korrekta tankeformer? Finns det material som snarare kan ge felaktiga föreställningar? Vilka material gynnar eller i värsta fall missgynnar lärandet?

## Redskap för läraren

Laborativa material kan även betraktas som redskap för läraren att konkretisera innebörden av ett abstrakt begrepp. Ett exempel är när undervisningen behandlar divisionsbegreppet och talområdet har utökats från heltal till decimaltal. Målet för en av lektionerna är att eleverna ska befästa sin förståelse för vad som händer när ett heltal divideras med 0,5. Lektionen inleds med ett gemensamt samtal om vad talet 0,5 kan betyda i vardagliga sammanhang och hur det kan representeras med hjälp av olika uttrycksformer. Läraren har då möjlighet att illustrera elevernas förslag med hjälp av material och eleverna gör egna anteckningar.



Lärarens sammanfattning på tavlan av elevernas vardagliga sammanhang.



Laborativa material är också redskap för elever när de ska visa hur de uppfattar det aktuella begreppet. Efter den gemensamma introduktionen ska varje elevgrupp på minst tre sätt demonstrera vad som sker när ett heltal divideras med 0,5. Eleverna skriver ner vad de gör och vad det resulterar i. Förslag som kan komma upp:

- *1 dividerat med 0,5.* En enliters flaska fylls med vatten och sedan hålls det över i halvlitersflaskor. Det räcker till två mindre flaskor:  $1/0,5 = 2$ .
- *3 dividerat med 0,5.* Tre jämnstora klumpar formas av modellera och varje klump delas sedan på mitten. Resultatet blir sex mindre klumpar:  $3/0,5 = 6$ .
- *6 dividerat med 0,5.* Sex meter snöre mäts upp och klipps i 0,5-meters längder. Det blir tolv längder:  $6/0,5 = 12$ .

Vid redovisningarna och den efterföljande diskussionen lyfts de generella matematiska sambanden fram med hjälp av material.

Eleverna använder sig av innehållsdivision i de tre exemplen. De demonstrerar hur många gånger en halv liter vatten "innehålls" i en-

litersflaskan, hur många halva klumpar som "innehålls" i de tre större klumparna och hur många gånger en halv meter snöre "innehålls" i det längre snöret. Tillvägagångssättet motsvarar en upprepad subtraktion av 0,5 eftersom eleverna först har exempelvis det sex meter långa snöret som de successivt minskar med 0,5 m allteftersom de klipper av snörstumparna. I dokumentationen sammanfattar eleverna sina slutsatser.

Att dividera med 0,5

- Att dividera med 0,5 är som att dela i halvor.
- När man dividerar med 0,5 blir det dubbelt så många.
- Att dividera med 0,5 ger samma resultat som att multiplicera med 2.

Viktor Henriksson

Under kommande lektioner följs resonemanget upp genom frågor som: Blir kvoten alltid ett heltal? Vad händer om täljaren inte är ett heltal? Vad händer om nämnaren varierar, tex om den är 0,4?

Jämförelser görs mellan innehållsdivision – eller ”mättningsdivision” – och den andra grundläggande tankeformen i division: delningsdivision, som svarar på frågan *Hur stor del?* Eleverna får i uppgift att använda laborativa material för att demonstrera t ex *1 dividerat med 2* och *3 dividerat med 2*.

I denna aktivitet har läraren startat i ett abstrakt begrepp (ett heltal ska divideras med 0,5) och med hjälp av laborativa aktiviteter gått över till konkreta händelser (eleverna arbetar praktiskt) för att sedan komma tillbaka till det abstrakta begreppet vid sammanfattningen.

### Delningsdivision och innehållsdivision

När är innehållsdivision lämpligast och när är delningsdivision smidigast? Exempel på hur de två tankeformerna kan underlätta eller komplicera en beräkning som görs ”i huvudet”:

#### 600/3

*Delningsdivision:* Om jag tänker att jag ska dela upp 6 hundralappar på 3 personer så att de får lika mycket var, är det lätt att komma fram till att de får 200 kr var.

*Innehållsdivision:* Försöker jag istället tänka ut hur många gånger som 3 innehålls (går) i 600 blir det besvärligare och det blir tydligt att denna tankeform inte är så effektiv.

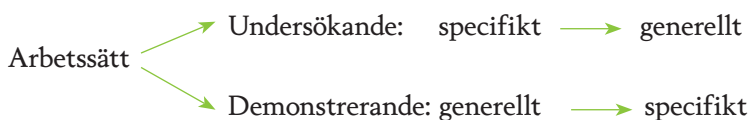
#### 600/200

*Delningsdivision:* Om jag skulle tänka på samma sätt som i delningsdivisionen ovan och fördela 600 kr till 200 personer så blir det också uppenbart att denna tankeform inte är så klok.

*Innehållsdivision:* Tänker jag istället på hur många gånger som 200 innehålls i 600 så är det enklare att inse att svaret är 3.

## Hur kan laborativt arbete läggas upp?

Det laborativa arbetssättet i matematik kan grovt sett delas in i två huvudkategorier: undersökande och demonstrerande.



*Undersökande arbetssätt* bygger på den *induktiva metoden*, vilket innebär att eleverna skaffar sig egna specifika erfarenheter som sedan ligger till grund för insikter i allmängiltiga och generella samband. Om målet är att få förståelse för hur triangelns area beräknas, inleds arbetet med laborativa aktiviteter där eleverna undersöker och prövar olika sätt att finna och bestämma triangelns area. Därefter förs en diskussion där läraren hjälper eleverna att se de matematiska sambanden så att de kan enas om att uttrycka en formel som gäller generellt – på ett för åldersgruppen lämpligt sätt. Läraren börjar alltså inte med att förklara formeln. Redan Comenius åsikt om att all undervisning ska inledas med konkret åskådning och att förklaringen ska komma i en senare fas, kan ses som ett uttryck för ett undersökande arbetssätt.

*Demonstrerande arbetssätt* har sin grund i den *deduktiva metoden* och börjar från andra hållet. Undervisningen utgår från det allmängiltiga och generella och leder över till det enskilda och specifika. I detta sammanhang kan det betyda att läraren demonstrerar hur triangelns area beräknas med hjälp av en formel och att eleverna sedan utgår från den vid sina fortsatta beräkningar.

---

#### Undersökande arbetssätt – ett exempel

##### 1. Laborativa aktiviteter

Elever skaffar egna erfarenheter av hur triangelns area bestäms.

##### 2. Formel

Utifrån de laborativa aktiviteterna kommer man fram till ett generellt samband som sedan används vid det fortsatta arbetet.

#### Demonstrerande arbetssätt – ett exempel

##### 1. Formel

Läraren och / eller läroboken presenterar formeln för hur triangelns area beräknas.

##### 2. Beräkningar

Eleverna använder formeln vid de fortsatta beräkningarna.

---

Valet av arbetssätt bör bestämmas utifrån vad som är i fokus för lärandet. Under matematiklektioner bör elever få möta både undersökande och demonstrerande arbetssätt. Astrid Pettersson uttrycker det så här i *Baskunnande i matematik*: "En effektiv lärandemiljö utmärks av att det är en god balans mellan olika arbetssätt, mellan elevens eget utforskande och kunskapssökande och en god och systematisk undervisning och handledning."

## Struktur för laborativt arbetssätt

Många lärare utgår från en väl beprövad grundstruktur för laborativt arbete som består av tre steg:

1. gemensam introduktion
2. laborativa aktiviteter
3. gemensam diskussion och uppföljning.

### 1. Gemensam introduktion

Introduktionen ska skapa förväntningar och en önskan hos eleverna om att få börja arbeta för att lära sig mer.

I det exempel som följer senare i denna text får eleverna på egen hand undersöka och upptäcka hur ett set med pentominobrickor är konstruerat. Ordet pentomino kommer från grekiskans 'penta' som betyder fem. När eleverna fått förståelse för hur formerna är konstruerade kan setet användas för andra aktiviteter. Som en introduktion till arbetet kan valda delar ur strävornaaktiviteten *Först se men inte röra* användas.

strävorna

4C

5C

## Först se men inte röra

FÖLJA RESONEMANG — KOMMUNICERA — GEOMETRI

**Avsikt och matematikinnehåll**

Visualisering är en viktig ingrediens i geometriundervisningen. Denna aktivitet handlar om att vika lådor, först i tanken och sedan allt mer praktiskt. Arbetet ger också kunskaper som är grundläggande för att kunna orientera sig i rummet och för att kommunicera med andra.

**Förkunskaper**

Kvadraternas egenskaper är nödvändig förkunskap.

**Material**

Linjal, sax, limstift, tejp och kvadratiska markörer.

**Beskrivning**

Aktiviteten består av två större delar. Först gör klassen en gemensam visualiseringsövning och i direkt anslutning till den fortsätter eleverna arbetet i smågrupper. Då ska de kommunicera och arbeta praktiskt.

Frågorna och anvisningarna som följer kan du läsa högt för hela klassen. Frågorna kommer säkert ofta att besvaras av flera elever i korus. Det är lämpligt att du då upprepar frågan och låter en elev svara.





*Först se men inte röra* handlar om att vika lådor, först i tanken och sedan allt mer praktiskt. Aktiviteten består av två större delar, en gemensam introduktion och sedan undersökande arbete i smågrupper. Här tar vi endast upp introduktionen som består av en gemensam visualiseringsövning. Frågorna och anvisningarna som följer läser läraren högt för hela klassen. Frågorna kommer säkert ofta att besvaras av flera elever i korus. Det är då lämpligt att upprepa frågan och låta en elev svara.

- Blunda – med båda ögonen.
- Föreställ dig en låda – fortsatt att blunda.
- Vad är lådan gjord av?
- Är den stor?
- Skulle du kunna få plats i den?
- Tänk dig en så stor låda att du skulle få plats i den.
- Föreställ dig nu en liten låda. Fortsätt att blunda.
- Tänk dig en så liten låda att det bara får plats en fingerborg i den.
- Tänk dig en lång låda.
- Har din låda något lock?
- Tänk dig nu en låda som har kvadrater till sidoytor runt om.
- Visst minns du vad en kvadrat är?
- Beskriv en kvadrat.
- Har din låda kvadrater till sidoytor nu?
- Också bottenytan ska vara en kvadrat. Är den det nu?
- Vad kallar man formen på en sådan låda som du nu har framför dig?
- Om din kubiska låda har lock så ta av det.
- Har du nu en låda utan lock framför dig?

- För att vara säker på att du inte har något lock, håll gula ärtor i lådan.
- Häll ut ärtorna igen.
- Vad är din låda gjord av?
- Tänk dig nu att den är gjord av papp.
- Beskriv vad du har framför dig nu.
- Fortsätt att blunda!
- Hur många kvadrater har lådan?
- Varje sådan kvadrat kallar man för en sidoyta. Även bottenytan kallas för sidoyta. Hur många sidoytor finns det?
- Tänk dig nu att du ska använda din låda på ett något ovanligare sätt. Du ska ha den till att skydda golvet medan du målar om en dörr. Då måste du breda ut lådan. Hur kommer det att se ut? Du vill breda ut så att alla fem sidoytorna syns. Och så att de sitter ihop. Dra dig inte för att använda sax. Fortsätt att blunda! Men klipp försiktigt. Det får inte bli några lösa kvadrater.
- Har du lådan utbredd framför dig nu?
- Hur många kvadrater ser du?
- Sitter alla fem kvadraterna ihop?
- Vik ihop utbredningen igen. Får du tillbaka lådan?
- Ser du lådan nu?
- Gör nu lådan så stor att varje kvadrats sida är ungefär så lång som ditt pekfinger.
- Bred ut lådan igen så att du ser alla sidoytorna och lägg på minnet hur utbredningen ser ut.
- Öppna ögonen – vänj dig vid ljuset – och rita utbredningen på ett papper.

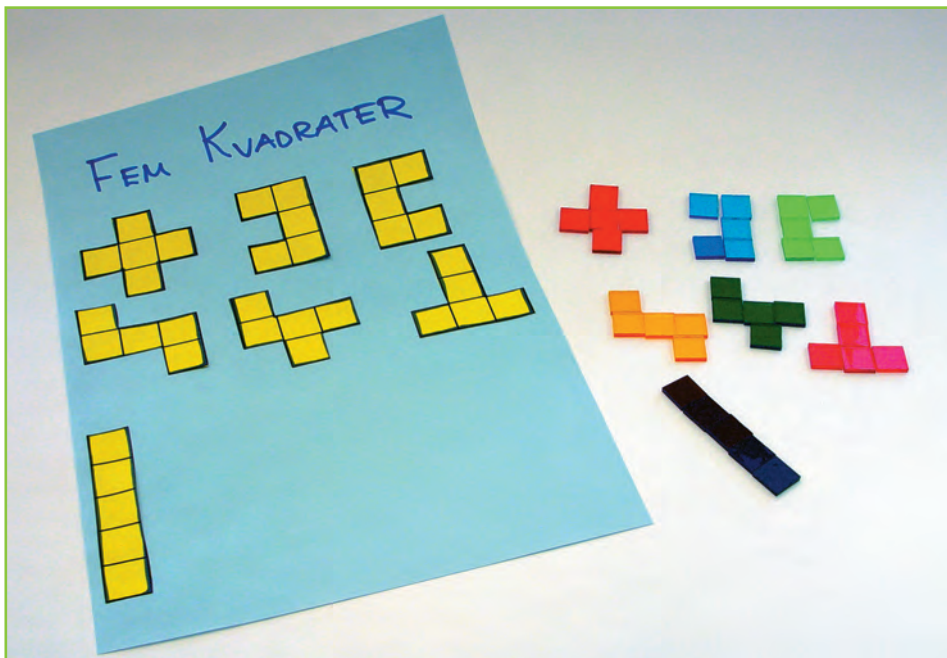
## 2. Laborativt arbete

I detta steg får eleverna arbeta med det centrala innehåll som är föremål för undervisningen på både kort och lång sikt. Eleverna ska samtidigt ges förutsättningar att utveckla de förmågor som har en naturlig koppling till det aktuella matematikinnehållet. Läraren kan också omvänt välja att anpassa det centrala innehållet till de förmågor som har valts ut.

I denna fas ingår inte bara att eleverna arbetar med aktiviteter och laborativa material utan hela arbetsgången mellan konkret och abstrakt och elevers dokumentation bör finnas med.

Som avslutning på introduktionen i detta exempel ritas varje elev utbredningen som är ett exempel på hur fem kvadrater i samma storlek kan sättas samman längs hela kanter. De ska sedan fortsätta att undersöka hur fem stycken kvadrater kan sättas samman på andra sätt, men fortfarande längs hela kanter.

Eleverna använder kvadratiske markörer i sina undersökningar, ritat funna former på färgat papper och klistrar upp dem på kartongark, vilka – förutom att de är dekorativa – kan underlätta elevernas redovisning och förtydliga för lyssnarna.



*En påbörjad aktivitet med pentomino.*

### 3. Gemensam diskussion och uppföljning

Efter att eleverna har arbetat laborativt följer en gemensam diskussion där kunskaperna sätts in i ett sammanhang och de matematiska upptäckterna lyfts fram, utmanas och värderas. Genom att jämföra begreppsuppfattningar och Lösningsstrategier kan elever "byta upp sig" till effektivare tankesätt. Eventuella missuppfattningar kan uppmärksammas och redas ut. Den avslutande gemensamma diskussionen är betydelsefull för elevers lärande och förståelse. Om laborationen löper under en längre period kan varje lektion avslutas med en summering av vad som hittills har upptäckts.

I exemplet med att finna alla pentominoformer är arbetet i slutet av första lektionen långt ifrån slutfört. Kartongarken sätts upp på väggen och läraren ställer frågor om hur många former de hittills hittat, om några av dem är lika och i så fall varför, om de använder något system i sitt sökande och hur många ytterligare former de tror att de kommer att upptäcka nästa lektion. Diskussion förs och prövning genomförs också av vilka figurer som kan vikas till lådor utan lock, liksom samtal om omkrets och area på de olika pentominofigurererna.

Under kommande lektioner fortsätter arbetet med att hitta alla de tolv möjliga pentominoformerna.

### Vikten av uppföljning

Internationella jämförelser visar att kinesiska elever i genomsnitt når bättre resultat i matematik än de amerikanska. Skillnader mellan kinesiska och amerikanska lärares kunskaper i matematik och matematikdidaktik har analyserats och resultatet visar att de kinesiska lärarnas goda kunskaper bidrar till de kinesiska elevernas framgångar. Jämförelse gjordes mellan sätten att undervisa kring subtraktion i de tidiga skolåren. De flesta lärare, både kinesiska och amerikanska, använde laborativa material, men aktiviteterna följdes upp på olika sätt beroende på lärarnas matematiska förståelse av dem. I motsats till de amerikanska lärarna hade de kinesiska lärarna avslutande gemensamma klassdiskussioner där eleverna visade, förklarade och argumenterade för sina lösningar. I diskussionen kunde elever ställa frågor som ledde till en djupare förståelse i matematik.

I Japan finns en särskild term – *neriage* – för den avslutande diskussionen i helklass. Den används för att beskriva den del av lektionen där eleverna presenterar och diskuterar sina Lösningsförslag. Syftet är att med lärarens hjälp bredda och fördjupa kunskandet om de

begrepp som varit föremål för lektionen. Det kan ske genom att utforska sammanhang, diskutera tankemässiga konflikter som utmanar elevens tänkande och att ge eleverna tillfälle att reflektera över sitt lärande. Lärarens uppgift är att "knyta ihop säcken" genom att tillsammans med klassen såväl komma överens om korrekta och optimala lösningar som att identifiera vanliga missuppfattningar.

Kognitiv konflikt är ett nödvändigt led i lärandeprocessen, vilket bl a Nilsson visat i sin studie *Att äga pi*. En av lärarens uppgifter är att utmana elevernas tänkande så att det blir uppenbart om de byggt upp felaktiga tankebanor. I den gemensamma diskussionen efter avslutad laboration finns utrymme för läraren att inta denna roll.

## Arbetsgång vid problemlösning

Vid problemlösning finns en arbetsgång som kan tjäna som inspiration och varieras beroende på undervisningens syfte.

1. Ett noga utvalt problem presenteras för eleverna.
2. Eleverna arbetar, oftast, först enskilt med problemet och går sedan samman i par eller smågrupper för att jämföra sina förslag och bestämma sig för vilken lösning som ska presenteras för klassen.
3. Läraren går runt, fångar upp skilda lösningsmetoder och delar in tavlan i samma antal rutor som metoder.
4. De olika lösningarna presenteras av eleverna inför övriga kamrater. Varje metod får ett eget utrymme på tavlan för att alla hela tiden ska ha en sammanställning över samtliga förslag. Vad skiljer denna lösning från övriga? Vilka likheter har denna lösning med övriga? Klasskamrater kan komplettera presentationerna och ställa frågor om dem. Så här kan man också tänka ... Jag undrar varför ...?
5. Gemensam diskussion utifrån de olika lösningsmetoderna. Fördelar? Nackdelar? Vilken / vilka lösningsmetoder är bäst att använda i just detta problem? I vilka sammanhang kan de andra lösningsmetoderna vara lämpliga?

Vid denna arbetsgång är det en fördel om eleverna i klassen har olika kunskaper i matematik. Ju fler lösningsförslag, desto mer diskussion.

Dessutom bör läraren sträva efter att missuppfattningar ses som en möjlighet till ytterligare lärande – inte något som kan uppfattas som genant. Missuppfattningar lyfts fram på ett medvetet sätt för att tänkbara orsaker ska bli föremål för diskussion och göra eleverna uppmärksamma på vanliga tankefel och varför de uppstår. Elevernas tankar och uppfattningar blir på så sätt ett innehåll i undervisningen och kan bidra till att förståelse utvecklas.

## Arbete i grupp

För att samarbeta måste man ha något att samarbeta om. Det är inte alltid lätt att arbeta tillsammans i en lärobok i matematik – speciellt om man inte befinner sig på samma sida. I en verkstad är det laborativa materialet tillgängligt för flera samtidigt och det blir därför en högst påtaglig utgångspunkt för samarbete.

## *Språkrör, sekreterare, fokushållare och tidshållare*

En tydlig struktur för problemlösning i grupp kan underlätta för både elever och lärare. I Nämnarenartikeln *Meningsfull matematik* ges ett exempel på hur alla elever kan bli delaktiga och känna ansvar för gruppens arbete genom att de tilldelas speciella roller som språkrör, sekreterare, fokushållare och tidshållare. Språkröret för fram gruppens åsikter och sköter kontakten mellan gruppen och läraren. När gruppen stöter på svårigheter är det bara den eleven som får be läraren om hjälp. Det kräver att språkröret förstår vad det är som gör att gruppen inte kommer vidare, att hon kan beskriva det för läraren och sedan förklara för sina kamrater. Att enbart språkröret får ställa frågor leder till en minskad arbetsbelastning för läraren. Sekreteraren sköter gruppens anteckningar. Fokushållaren ansvarar för att alla håller sig till ämnet och ska också se till att de återkommer till uppgiften om samtalet tar en annan väg. Tidshållaren ser till att tiden hålls oavsett om det rör sig om minuter eller flera lektioner.

Elever behöver få arbeta i samma grupp vid flera tillfällen – så de får möjlighet att förbättra och utveckla sina roller – innan de byter till nya gruppkonstellationer. Ofta är det en fördel om elever på någorlunda liknande kunskapsnivå arbetar tillsammans. I annat fall kan det resultera i att den "starke" eleven tar över i gruppen. Förutsättningen för att gruppmedlemmarnas skiftande roller ska fungera är att det råder ett positivt klimat där alla kan känna sig trygga med sina kamrater.

## Gemensam problemlösning

Ett annat sätt att stärka samarbete genom att göra alla delaktiga är de aktiviteter som ofta går under samlingsnamnet *gemensam problemlösning*. I korthet går det ut på att ett problem har delats upp i ett antal ledtrådar, oftast 3–6 stycken. Varje ledtråd presenteras i text eller bild på ett kort tillsammans med den gemensamma frågan. Varje elev i gruppen får 1–2 kort var. Var och en får läsa sin ledtråd högt för de övriga i gruppen hur många gånger som helst och det går bra att fråga om. Däremot är det *inte* tillåtet att *visa* texten och detta är den bärande idén för att det ska bli gemensam problemlösning. Ifall kortens text får visas är det vanligt att eleverna lägger sina kort på bordet och snart har en av dem tagit över hela arbetet och löst problemet på egen hand. Genom att var och en har sina ledtrådar – nödvändiga för hela gruppen – blir samtliga involverade i att lösa uppgiften.

Ovan beskrivna kort med gemensam problemlösning finns i speciella böcker och allt oftare i lärarhandledningar till matematikläromedel. Det är inte ovanligt att problemen förutsätter tillgång till exempelvis plockmaterial i form av stickor och byggbara kuber. Det underlättar på sikt om de kort som används kopieras, lamineras, klipps ut och förvaras i pippåsar.

## Självständigt arbete



En lärare kan inte ständigt finnas till hands för samtliga elever, därför är det nödvändigt att elever självständigt kan följa skrivna instruktioner. Det förutsätter en inskolningsperiod där eleverna görs medvetna om hur instruktioner ska läsas och följas. Instruktionerna i sig måste också anpassas till elevernas kunskande. För de yngsta eleverna fungerar illustrationer ofta bättre än text. Att kunna följa en instruktion med en kombination av text och bild är en färdighet som kan och bör övas upp. Denna färdighet är i allra högsta grad användbar även utanför skolan, tex för att förstå monterings- och bruksanvisningar.

## Tillgång till matematikverkstaden – men bara ibland

Alla lärare har inte tillgång till matematikverkstaden varje lektion. Hur kan arbetet organiseras för att verkstadstillfället ska kunna utnyttjas på bästa sätt? Först bör frågan om vilket innehåll och vilka aktiviteter som bäst lämpar sig för enskilt arbete, arbete i grupp eller i helklass övervägas och besvaras. Därefter kan en uppdelning av en periods lektionsinnehåll göras, dvs vad eller vilka moment som behandlas i klassrummet och vilket innehåll som kan berikas med hjälp av arbete i matematikverkstaden. Det ska inte vara vattentäta skott mellan klassrumsarbete och arbete i matematikverkstaden. Därför måste det alltid finnas en viss mängd laborativa material i alla klassrum och matematiksalar.

Man kan förbereda verkstadsbesöket med tex en matematikberättelse, ett problem, en hemuppgift eller en utmaning. Då blir eleverna väl medvetna om vad som väntar dem och vad som förväntas av dem. Några sätt att organisera:

- Låt verkstadsarbetet ske i helklass/helgrupp där alla elever arbetar med samma aktivitet och material. Välj i möjligaste mån aktiviteter där eleverna kan arbeta med varierande svårighetsgrader. Eleverna dokumenterar sitt arbete.
- Förbered stationer. Antingen cirkulerar grupperna och samtliga elever kommer i kontakt med samma innehåll, eller arbetar grupperna med innehåll avpassat för tex skilda kunskapsnivåer eller olika sätt att lära. Arbetet dokumenteras på lämpligt sätt.

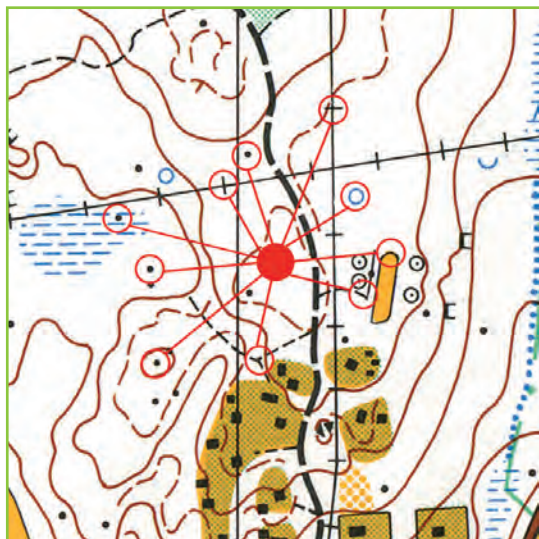
Nästa matematiklektion kan verkstadsarbetet följas upp i klassrummet med diskussioner, noggrannare dokumentation, arbete med motsvarande innehåll i lärobok, färdighetsträning etc.



## Stjärnmatte

Ett sätt att organisera laborationer är det vi kallar Stjärnmatte. I klassrummet, matematikverkstaden eller utomhus förbereds något fler stationer än antal elevgrupper. Varje station märks med ett nummer och på en central plats finns också en burk med motsvarande nummerlappar. Varje grupp drar en nummerlapp i burken och går till den angivna stationen, genomför laborationen, går tillbaka, drar en ny nummerlapp och går till nästa station. Arbetssättet förutsätter att de laborationer som eleverna ska arbeta med är fristående i meningen att de inte behöver genomföras i en viss ordning. Däremot bör det innehållsmässigt finnas en tydlig koppling mellan laborationerna så att eleverna inte upplever att de "bara gör" en massa olika aktiviteter. Fördelarna med Stjärnmatte är flera:

- Varje grupp kan stanna så lång tid de behöver på varje station – de behöver inte vänta in någon annan grupp.
- Laborationerna kan arrangeras så att flera stationer i första hand består av färdighetsträning som eleverna kan genomföra på egen hand. Läraren kan då få tid för att främst finnas till hands vid de laborationer där eleverna behöver mer lärarstöd.
- Vid varje station kan eleverna öva sin förmåga att utvärdera sitt lärande. Se exempel på sid 137–138.



Idén till Stjärnmatte kommer ursprungligen från en övning för barn som ska lära sig att orientera. De samlas tillsammans med ledarna på en öppen yta. Två och två tar de en karta och letar rätt på den enda kontroll som finns inritad. När de har besökt kontrollen springer de tillbaka, byter till en annan karta och springer till nästa kontroll. Barnen och de vuxna kan se varandra hela tiden.

# Hur kan lektioner läggas upp?

Innan vi går in på hur lektioner kan planeras vill vi påminna om de didaktiska grundfrågorna *Vad? Varför? och Hur?* Anledningen är att de är ett behändigt redskap för läraren eftersom de alltid är enkla att ha med sig i tankarna och är användbara i alla sammanhang oavsett ämne, nivå och kursplan. Frågorna hjälper läraren att fokusera på det väsentliga i sin planering.

Därefter ges tre förslag på arbetsgång för att ge eleverna möjlighet att gå mellan konkret arbete med laborativa material och ett abstrakt matematiskt symbolspråk: *Fyra nivåer från konkret till abstrakt*, *Tanketavlor* och *Fyrfältsblad*. I samtliga fall handlar det om att växla mellan uttrycksformer.

## De didaktiska frågorna

Laborativa aktiviteter kan bana väg från den kunskap eleven redan besitter till den nya kunskap som eftersträvas. Detta sker inte av sig självt utan läraren måste lyfta fram matematiken i aktiviteterna. Elever behöver få hjälp med att göra kopplingar mellan den laborativa aktiviteten och de abstrakta begrepp och generella matematiska samband som arbetet ska leda fram till.

De didaktiska frågorna bör ständigt beaktas för att ge önskvärda effekter i elevernas lärande. *Vad* eleverna ska lära, *varför* det ska läras och *hur* det ska läras ligger då bakom lärarens val och planering av aktiviteter.



I skolans matematikundervisning är det ofta hur-frågan som är i fokus vid planering. När det gäller laborativa aktiviteter är det avgörande för elevernas lärande att en förskjutning sker från enbart hur-frågan till att även behandla vad- och varför-frågorna. Risken för *hands on – minds off* kan då undvikas.

## Fyra nivåer från konkret till abstrakt

Det första förslaget på arbetsgång beskriver fyra nivåer, i en oavbruten följd, från konkret arbete till abstrakt symbolspråk:

*Konkret → Halvkonkret → Halvabstrakt → Abstrakt*

Med lärarens hjälp får eleverna stöd i att uppfatta sambanden mellan de olika stegen. Först beskriver vi arbetsgången övergripande, därefter ges ett exempel på hur den kan användas för att yngre elever ska få förståelse för hur talet 5 kan delas upp på olika sätt. I det efterföljande exemplet är det istället äldre elever som med hjälp av byggbara kuber får undersöka och diskutera hur vi enligt konventioner skriver kvadratcentimeter och kubikcentimeter.

1. *Konkret.* Arbete med laborativa material. Den konkreta nivån representerar ofta en verklig situation.
2. *Halvkonkret.* Laborativa material byts mot bilder, skisser eller elevernas egna enkla teckningar av något slag.
3. *Halvabstrakt.* Med den halvabstrakta nivån menas att bilderna byts mot informella symboler som tex ringar eller streck.
4. *Abstrakt.* Bilder och informella symboler ersätts med formella symboler, räkneregler, räknelagar och andra konventioner.

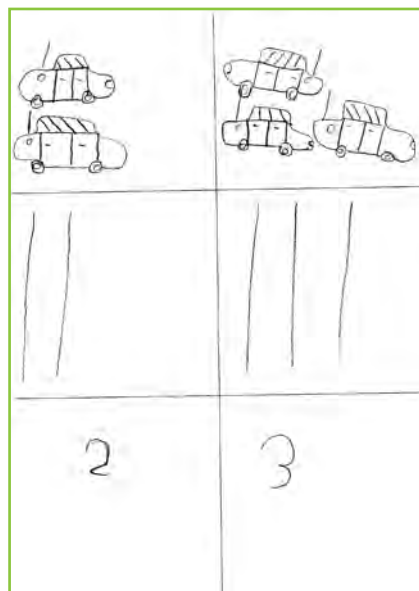
### *Bilparkeringen – ett exempel för yngre barn.*

*Uppgift:* Parkera fem leksaksbilar på två sidor av en parkeringsplats och hitta så många olika sätt som möjligt!



1. **Konkret.** Eleverna parkerar de fem leksaksbilarna på olika sätt.
2. **Halvkonkret.** Eleverna ritar hur bilarna står parkerade.
3. **Halvabstrakt.** Egna symboler används, tex ett streck för varje leksaksbil.
4. **Abstrakt.** Eleverna växlar från de egna symbolerna till formellt symbolspråk.

$$\begin{aligned}
 5 &= 0 + 5 \\
 5 &= 1 + 4 \\
 5 &= 2 + 3 \\
 5 &= 3 + 2 \\
 5 &= 4 + 1 \\
 5 &= 5 + 0
 \end{aligned}$$



Elevernas förslag på hur talet fem kan delas upp blir till innehåll i samtalet med läraren. En mer omfattande beskrivning finns i strävornaaktiviteten *Bilparkering*.

**2A**  
**3A**

strävorna

## Bilparkering

RUTINUPPGIFTER – BEGREPP – TALUPPTÄTTNING

**Avskat och matematikämne**  
Varje elev ska arbeta med de fyra stegen Konkret – Halvkonkret – Halvabstrakt – Abstrakt. Uppdelning av hela tid, i första hand upp till 10.

**Förkunskaper**  
Talräkna 1–10 samt föreställa för nollan.

**Material**  
En upprättad rätvinklig parkeringsplan och leksaksbilar.  
Berörande på hur många bilar som ska parkeras kan det behövas ett par olika stora parkeringsplatser.

**Beskrivning**  
Eleverna får ett givet antal bilar att parkera. De ska undersöka på hur många olika sätt de kan dela upp/ fördela bilarna på P-platserna båda sidor. Begrepp:  

- Ingen bilans behov tas till vilken färg eller modell det är på bilen. Det är endast antalet bilar som eleverna ska undersöka. Elever som förtur i färg och modell kan använda bilar som ser likadana ut.
- Det har ingen betydelse vilken parkeringsruta en bil står i. Eleverna ska bara bestämma vilken sida av parkeringen som bilen ska stå på.

 För att aktiviteten ska bidra till elevernas lärande och inte endast uppfattas som "en halvgrej" är det av största vikt att eleverna dokumenterar sina undersökningar:  
*Konkret:* Praktiskt arbete med att rita och parkera bilarna. Låt eleverna berätta vad de gör.  
*Halvkonkret:* Bilmans uppfattning på P-platserna båda sidor ritas av. Låt det bli ta tid och uppmärksamhet till så vid halvkongruens tecken som av bilar som används.  
*Halvabstrakt:* Det blir lite jobbigt att rita många fina bilar. Uppmanas alla initiativ till att försöka belysningarna till elevernas personliga informella symboler, kanske en ruta eller ett streck för varje bil.  
*Abstrakt:* Efterhand ersätts de informella symbolerna med allt mer formella symboler, dvs det blir en användning.

närmaren/NCM

ncm.gu.se/stravorna

sådan för kopieras

**I kvadrat och kubik – ett exempel för äldre elever.****Uppgift:** Vad skiljer  $\text{cm}^2$  och  $\text{cm}^3$  från  $\text{cm}$ ?

Vi vet att många elever använder skrivsätten  $\text{cm}^2$  och  $\text{cm}^3$  utan att reflektera över vad de egentligen står för.

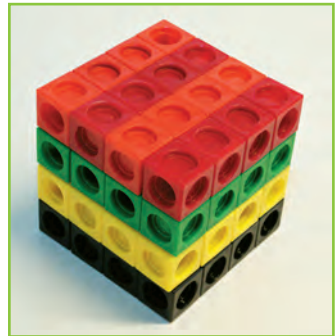
1. **Konkret.** Använd kuber som är byggbara åt alla håll. Låt varje elev bygga en stav med fyra kuber. Diskutera hur det muntligt går att uttrycka längden på staven.



Låt varje elev bygga ytterligare tre stavar och sätta samman de fyra stavarna till en platta. Diskutera på vilka olika sätt det muntligt går att uttrycka storleken på plattan.



Eleverna bygger ytterligare tre lika stora plattor och sätter samman dem till en kub. Diskutera hur det muntligt går att uttrycka storleken på kuben och hur de olika måtten förhåller sig till varandra.

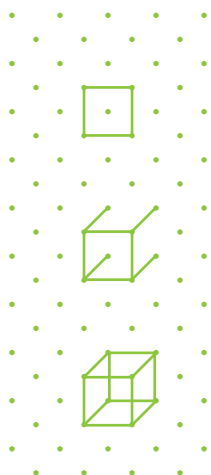


Upprepa eventuellt med kuber i andra storlekar eller med andra rätblock.

Bland Känguruproblemen finns många exempel som handlar om kuber, både relativt enkla och rejält utmanande. Ett exempel är följande:

**Två målade sidor.** En stor kub med måtten  $9 \times 9 \times 9$  har byggts upp av småkuber med måtten  $1 \times 1 \times 1$ . Kuben målas. Hur många små kuber får exakt två målade sidor? (Uppg 88, s 63 i boken *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*.)

2. **Halvkonkret.** Övergå till att använda prickpapper istället för fysiska kuber. På webbsidan [ncm.gu.se/matematikpapper](http://ncm.gu.se/matematikpapper) finns bland annat kopieringsunderlag för prickpapper, triangelpapper, tomma koordinatsystem, tallinjer, termometrar och tangrampussel samlade. Sidan utökas undan för undan efter förslag från lärare.



Om eleverna är ovana, visa steg för steg enligt teckningen hur kuber kan ritas på ett isometriskt prickpapper.

Eleverna ritar enstaka små kuber, stavar, plattor och stora kuber sammansatta av korrekt antal små kuber.

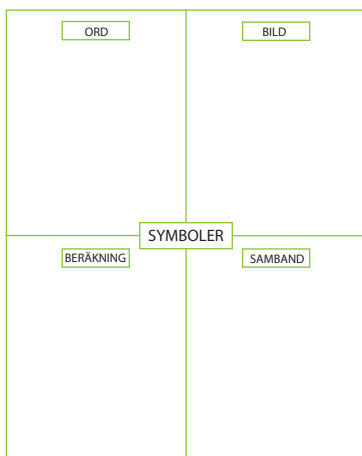
Leta upp fler uppgifter (t ex från Kängurun) där det är en hjälp att kunna rita av dellösningar på prickpapper.

3. *Halvabstrakt.* Låt eleverna fortsätta lösa "kubproblem" genom att rita egna, enkla figurer som ersätter de mer formellt ritade kuberna på prickpappret. Några elever kan redovisa sina sätt att rita.
4. *Abstrakt.* Ge förutsättningen att varje liten kub de använder har kantlängden 1 cm. På vilka olika sätt kan de nu skriva stavens längd, plattans och kubens storlek? Diskutera de formella sätten att skriva längd, area och volym. Vad står "de små" tvåorna och treorna, dvs exponenterna för?

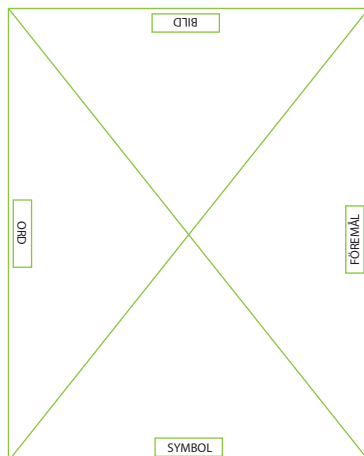
## Tanketavlor

De tanketavlor som presenteras här kommer från boken *Förstå och använda tal*, vars upphovsman är Alistair McIntosh. Tavlorna kan förändras beroende på i vilket syfte de ska användas, rubrikerna kan t ex bytas ut och antalet rutor ökas eller minskas. Eleverna kan arbeta enskilt, i par eller i grupp.

Tanketavla 1



Tanketavla 2



Läraren har förberett post-it-lappar (tex 13 – 8; 587 + 392;  $12 \cdot 0,5$ ;  $6/0,1$ ) som placeras i *Symbolfältet*. Det kan vara samma uppgift till alla eller uppgifter av olika svårighetsgrad. Eleverna ska sedan översätta uttrycket till relevanta tolkningar i vart och ett av de andra fälten. Till skillnad från den förra arbetsgången kan eleverna själva välja i vilken ordning de vill ta sig an de övriga uttrycksformerna.

I *Ordfältet* skriver de en räknehändelse, i *Föremålsfältet* läggs verkliga föremål och i *Bildfältet* ritas de en teckning, gör en skiss, ritas ett diagram, sätter upp en tabell etc.

I *Sambandsfältet* kan eleverna skriva egna kommentarer till hur de olika uttrycksformerna hör samman. En mer styrd variant är att eleverna uppmanas att beskriva ett matematiskt samband, tex mellan olika räknesätt:

| <i>Addition och subtraktion</i> | <i>Multiplikation och division</i> |
|---------------------------------|------------------------------------|
| $13 - 8 = 5$                    | $12 \cdot 0,5 = 6$                 |
| $13 - 5 = 8$                    | $12 / 2 = 6$                       |
| $8 + 5 = 13$                    | $2 \cdot 6 = 12$                   |
| $5 + 8 = 13$                    | $12 / 6 = 2$                       |

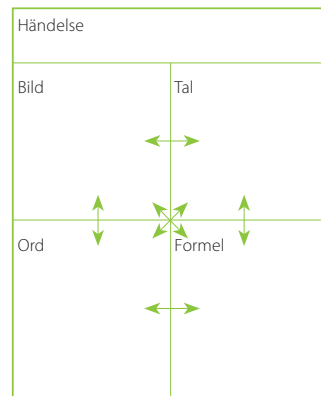
Tanketavlorna kan också vara ett stöd vid analys av elevers kunskande. Det blir synligt om en elev har svårt att göra kopplingar mellan uttrycksformer, vilket i sin tur kan vara ett tecken på att förståelse ännu inte nåtts.

## Fyrfältsblad

Det tredje exemplet på arbetsgång är från början en idé i *Algebra för alla* där syftet är att ge förståelse för översättningar mellan uttrycksformer. Fyrfältsbladet är i första hand lämpligt att använda vid algebra så elever kan se hur en formel växer fram utifrån en konkret händelse. När det gäller annat matematikinnehåll kan justeringar av rubrikerna behöva göras, det är inte alltid som det blir aktuellt med en formel. Titta gärna på det ifyllda fyrfältsbladet på sid 101 parallellt med läsningen av texten.

Längst upp på ett A4-papper lämnas plats för en huvudrubrik. Det övriga utrymmet delas upp i fyra rutor, så att varje uttrycksform får ett fält med rubrik.

Eleverna arbetar i smågrupper – de ska ju också kommunicera – men var och en gör sitt eget fyrfältsblad.



## Händelse

Läraren presenterar aktiviteten som i detta exempel innebär att ett mönster ska läggas med hjälp av bambukäppar. Det övergripande syftet är att hitta ett generellt samband mellan antalet rutor på rad och antalet bambukäppar. Så här ser en följd av rutor ut:



*Hur många käppar behövs för att lägga fem rutor, tio rutor, femtio rutor, sjuhundra trettioåtta rutor,  $n$  rutor?* Eleverna fortsätter lägga rutor med käppar samtidigt som de ska fundera över vad som sker i varje steg.

Eleverna väljer lämplig rubrik, tex Rutor på rad, och skriver det på avsedd plats.

## Bild

Eleverna ritar vad som händer. Det brukar fungera bra i de första stegen, men eleverna upptäcker ofta att det blir otydligt, kladdigt och "jobbigt" när rutorna blir allt fler. Det är en poäng med att eleverna tycker det känns besvärligt och omständligt.



## Rita en bild – vad menas?

I samband med problemlösning beskrivs tre olika kategorier av bilder av Kerstin Hagland i artikeln *Rita en bild!* i Nämnaren 2007:3.

### **Dekoration**

En dekoration är *ren utsmyckning* och kan, men behöver inte, ha något direkt samband med det matematiska problemet. Dekorationen bidrar varken till att problemet blir enklare att uppfatta eller lättare att lösa.

### **Illustration**

En illustration definieras som en *förklarande bild*. Illustrationen gör att det matematiska problemet blir lättare att uppfatta, men ger för övrigt ingen direkt hjälp för lösningen till problemet. Indirekt kan en bra illustration ändå ge en vink om hur man kan finna en lösning.

### **Schematisk bild**

En schematisk bild ses som en *översiktlig bild* som förtydligar det matematiska problemet och som därigenom underlättar lösningsprocessen. I bästa fall kan en schematisk bild leda fram till upptäckter av tydliga matematiska mönster som i sin tur kan ge upphov till förenklande generaliseringar. I artikeln ges exempel på matematiska bilder som kan vara till nytta vid problemlösning: del-helhetsbilder, trädidiagram, Venndiagram, händelsekarta och flödesschema, steg-för-stegbild samt tabell.

Bilden kan ge information om hur eleven tänker. Även en ren dekorationsbild kan ge läraren information om vilka delar som eleven tagit till sig – eller inte tagit till sig.

## Tal

Eleverna beskriver händelsen med hjälp av tal. I detta exempel är det lämpligt att organisera talfakta i form av en tabell för att visa antalet käppar i förhållande till antalet rutor. Äldre elever kan själva bestämma vilka variabler som ska finnas med och hur de ska placeras i tabellen. Yngre elever kan behöva stöd för att utforma tabellen. Det är en hjälp för många elever att med siffror skriva ut hur antalet käppar växer för varje ny ruta. I tabellen på det ifyllda fyrfältsbladet ges ett exempel på hur mönstret kan uppfattas.

## Tal

Det kan vara intressant att tillsammans med eleverna diskutera de olika betydelser ordet tal kan ha:

- siffra, antal, ordningstal
- muntligt uttryck, prat
- anförande, t ex att hålla ett tal till brudparet.

Ofta förekommer också tal slarvigt som benämning på uppgifter i en matematiklärobok, t ex "Räkna tal 37 b".

## Ord

Eleverna beskriver med egna vardagliga ord hur antalet käppar ökar vid varje ny tillkommen ruta. Förklaringen bygger på hur mönstret framträder i tabellen.

## Formel

En formel är ett matematiskt samband uttryckt i symbolisk form. Många gånger får elever tyvärr möta abstrakta formler som mystiska uttryck vilka ska läras in utantill. Eleverna ser inte att formler kan ha sitt ursprung i en konkret situation. För att underlätta förståelsen kan flera steg införas där informella skrivelser används innan den slutgiltiga formeln tecknas. Nedan ges exempel på hur den kan växa fram i mycket små steg, från informellt språk till ett allt mer formellt matematikspråk. Läraren avgör hur långt det är lämpligt att fortsätta mot det formella uttryckssättet med hänsyn till elevgruppen.

Det inringade vid 1, 2 och 3 betyder att uträkningen måste göras först och introducerar användandet av parenteser. Eleverna kan undersöka vad som händer om prioriteringsreglerna inte följs.

1. 1 bambukäpp +  $(3 \cdot \text{rutorna})$

2.  $1 + (3 \cdot \text{antalet rutor})$

3.  $1 + (3 \cdot \text{ant rutor})$

4.  $1 + (3 \cdot \text{ant rutor})$

5.  $1 + (3 \cdot \square)$        $\square = \text{ant rutor}$

6.  $1 + (3 \cdot n)$        $n = \text{ant rutor}$

7.  $1 + 3n$

8.  $3n + 1$

Ett syfte med att använda formler är arbetsbesparing. I matematik är det ofta en fördel att vara "lat på ett bra sätt", dvs att skriva så lite som möjligt, men exakt och generellt. I stället för att rita ruta efter ruta som gjordes under rubriken *Bild*, är det smidigare att ta hjälp av formeln. Det går då att få fram antalet käppar för vilken ruta i ordningen som helst. Poängen med formler blir troligen uppenbar för eleverna.

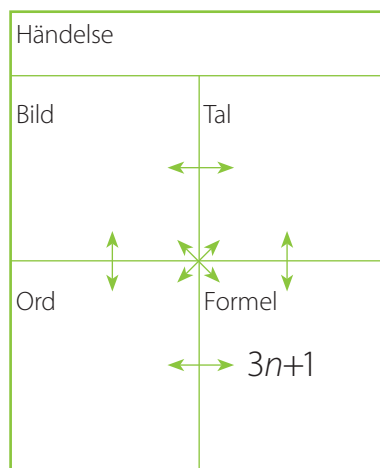
HÄNDELSE

RUTOR PÅ RAD

| BILD    | TAL                                                |
|---------|----------------------------------------------------|
| □       | ANTAL RUTOR: 1      ANTAL BAMBUKÄPPAR: $4 = 1 + 3$ |
| □□      | 2 $7 = 1 + 3 + 3$                                  |
| □□□     | 3 $10 = 1 + 3 + 3 + 3$                             |
| □□□□    | 4 $13 = 1 + 3 + 3 + 3 + 3$                         |
| □□□□□   | 5 $16 = 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$                     |
| □□□□□□  | 6 $19 = 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$                 |
| □□□□□□□ | 7 $22 = 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$             |

| ORD                                                                                                               | FORMEL                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>FÖRST EN BAMBUKÄPP OCH SEDAN TRE BAMBUKÄPPAR FÖR VARJE NY RUTA.</li> </ul> | $1 \text{ BAMBUKÄPP} + (3 \cdot \text{RUTORNA})$         |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>FÖRST EN BAMBUKÄPP OCH SEDAN TAR MAN TRE GÅNGER ANTALET RUTOR.</li> </ul>  | $1 + (3 \cdot \text{ANTALET RUTOR})$                     |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>FÖRST ...</li> </ul>                                                       | $1 + (3 \cdot \text{ANT RUTOR})$                         |
|                                                                                                                   | $1 + (3 \cdot \square) \quad \square = \text{ANT RUTOR}$ |
|                                                                                                                   | $1 + (3 \cdot n) \quad n = \text{ANT RUTOR}$             |
|                                                                                                                   | $1 + 3n$                                                 |
|                                                                                                                   | $3n + 1$                                                 |



Om elever istället får i uppgift att utgå från formeln och därefter fyller i övriga fält, blir uppgiften öppnare och mer avancerad.

## Hur kan ett planeringsunderlag se ut?

1A

Magiska kvadrater

strävorna

TALUPPFATTNING – HUVUDRÄKNING – MÖNSTER

**Avskilt och matematikinnehåll**  
 Avskilts är att ge eleverna färdighetsträning i huvudräkning, tillfälle att upptäcka mönster och att diskutera samt att generalisera. Aktiviteten kan användas som förberedelse till algebra.

**Förkunskaper**  
 Nödvändig förkunskap är addition i talområdet 1–15.

**Material**  
 Spelplan och nio kapslar till huvudräkningsruten. Material för att göra egna spelplaner eller spelplaner kan tillkomma, se separata beskrivningar.

**Beskrivning**  
 Eleverna kan arbeta enskilt eller i par. De behöver en spelplan och nio kapslar med talen 1 till 9. Kapslarna ska ligga så att summan av talen blir lika åt alla håll, dvs vagnrätt, lodrätt och diagonalt. Aktiviteten förutspås om elever får veta att summan i varje rad är 15. Ett exempel på lösning:

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Gesom spegling ges fler varianter av samma lösning. Det är enkelt att se om en lösning är korrekt:

- San ska vara placerad i mitten
- San ska inte vara placerad i ett hörn
- resten faller enkelt på plats genom att motstående tal är tvillingar.

**Introduktion**  
 I Nämndartikeln *Magiska kvadrater* återges en översikt om magiska kvadrater som kan användas vid introduktionen. Artikeln finns att hämta på [ncm.gu.se/pdf/namnaren/3841\\_04\\_3.pdf](http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3841_04_3.pdf).

**Uppföljning**  
 Diskutera med eleverna hur många olika lösningar det går att få. Vilka är de? Vilket tal står alltid i mitten? Varför? Vilken summa bildas alltid av de tal som står i motsatta positioner? 4+9, 9+4, 2+8, 8+2... Varför blir dessa? Är det udda eller jämna tal som finns i hörnen? Är det alltid så?

namnaren/NCM

[ncm.gu.se/stravorna](http://ncm.gu.se/stravorna)

sidan får kopieras



Det finns risk för att enstaka och isolerade aktiviteter inte leder till varaktiga kunskaper om de inte blir satta i ett sammanhang. Man måste också tänka på att det sker en progression i det laborativa arbetet så att eleverna inte möter aktiviteter med matematikinnehåll på samma nivå varje år. På följande sidor finns ett planerings-

underlag i form av en tankekarta som kan underlätta val och planering av laborativa aktiviteter. Underlaget är lämpligt att använda på lektionsnivå och förutsätter en övergripande planering som har vad- och varför-frågorna i centrum. Denna tankekarta kan också fungera som ett stöd för analys av aktiviteter.

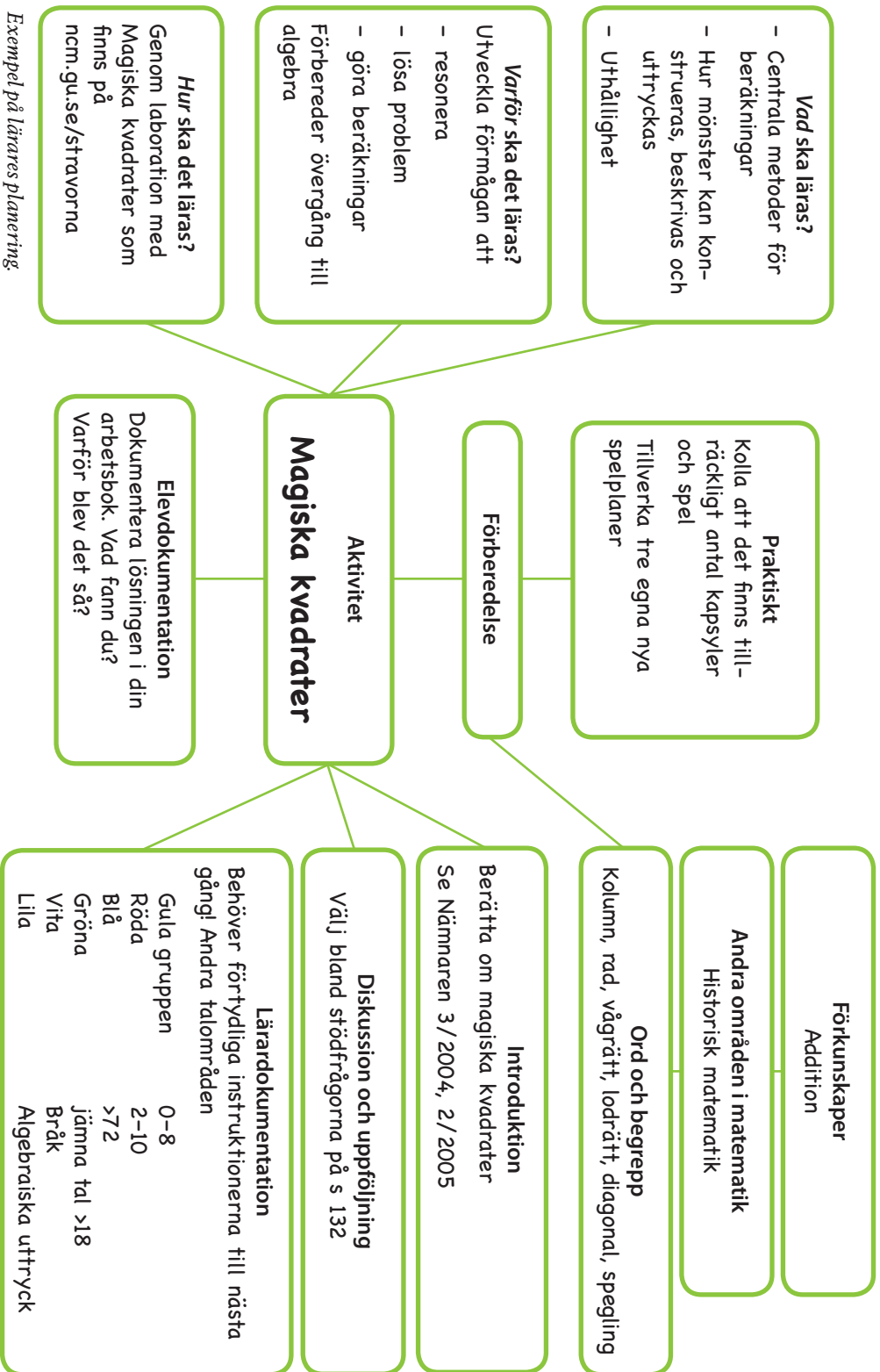
I mittenrutan skrivs aktivitetens namn och runt om finns ett antal rubriker som tar upp väsentliga nyckelområden. En tankekarta har fyllts i med noteringar kring aktiviteter med *Magiska kvadrater*, se Strävorna [ncm.gu.se/1A](http://ncm.gu.se/1A).

## Vad, varför och hur?

Till vänster på planeringsunderlaget finns de tre didaktiska frågorna om *vad* som ska läras (centralt innehåll), *varför* det ska läras (förmågor) och *hur* det ska läras. Lärarens förberedelser har delats upp i fyra delar:

- *Praktiska* förberedelser som behöver göras inför lektions-tillfället.
- *Förkunskaper* som elever behöver ha för att den laborativa aktiviteten ska kunna utveckla och stärka deras förståelse.
- *Andra områden i matematik* där aktiviteten sätts in i ett större matematiskt sammanhang. Man kan också lägga till ytterligare en ruta som får rubriken *Andra ämnen*. Där kan anteckningar göras om samplanering med annat ämne eller på vilket sätt det kan vara ett inslag i skolans ämnesövergripande arbete.
- *Begrepp* som behöver uppmärksammas. Vid arbete med elever som håller på att lära sig svenska språket kan man komplettera med en *gloslista* där vardagliga svenska ord skrivs upp, som kapsyl, påse och snodd.

Aktiviteten ska presenteras med en *introduktion* som väcker elevernas nyfikenhet. *Diskussion och uppföljning* kan ske i helklass eller i grupp beroende på arbetssätt och tidsutrymme. Under *lärardokumentation* kan intressanta observationer, kom-i-håg, påminnelser, fortsättning etc antecknas. *Elevers dokumentation* ska inte enbart vara ett kvitto som bevisar att eleven "gjort" en aktivitet. Dokumentationen blir didaktiskt intressant om den synliggör vilket lärande som skett – för eleven själv, för läraren och för föräldrar. I nästa kapitel finns förslag på hur elever kan dokumentera sitt lärande.



Exempel på lärares planering

På [ncm.gu.se/mv\\_dokument](http://ncm.gu.se/mv_dokument) finns en tom tankekarta som kan användas som den är eller tjäna som inspiration för en som anpassas efter egna behov. Det finns enkelt sökbara program för interaktiva tankekartor eller mindmaps på internet.

## ”Kul matte” eller ”riktig matte”?

En vanlig attityd till arbete med laborativa material kommer fram i Patricia Moyers undersökning av hur tio lärare använde material i sin undervisning under ett läsår. Inledningsvis tycktes termen ”kul” indikera att lärare och elever fann nöje i att använda laborativa material i sin undervisning och sitt matematiklärande. Fortsatta analyser antydde att inbäddat i lärarnas bruk av ordet ”kul” fanns föreställningar som hämmade de fördelar som användning av material kan medföra. Lärare gjorde skillnad mellan ”kul matte” och ”riktig matte”. Uttrycket ”riktig matte” refererade till lektionsdelar där de undervisade om regler, procedurer, algoritmer och använde läroböcker, anteckningsböcker, arbetsblad eller papper- och pennauppgifter. Uttrycket ”kul matte” fick beskriva delar av lektioner där eleverna arbetade och hade roligt med material. Många gånger sågs det som belöning för duktiga elever eller som ”en kul grej på fredagstimmen”.

### Trevligt avbrott

Om lärare *enbart* uppfattar laborativa material som ett trevligt avbrott sänder det signaler till eleverna att förklaringar som förstås genom aktiviteterna inte har något samband med ”riktig matematik”. Genom att betrakta laborativa material som ”en kul grej” begränsas elevernas möjlighet att få förståelse för matematik på ett engagerande och intressant sätt. Detta resonemang om material som belöning avspeglas i en artikel med rubriken *Matten blomstrar när lärare lär av varandra* i Lärarnas tidning. I texten berättas om Axel som går i årskurs 3 och tycker att matematik är det roligaste ämnet: ”... så finns det en massa spel. Man får liksom lite belöning när man kommer fram till spelen.”

Naturligtvis kan aktiviteter och spel fylla en funktion som belöning och som ett trevligt avbrott men de har en större potential än så genom att de samtidigt kan vara både roliga och inspirera till lärande.

## Varning för överdrifter

Fritz Wigforss framhöll redan under 1920-talet åskådningens roll i undervisningen, men han varnade samtidigt för alltför långt drivna krav på konkretion:

Den yttre åskådningen är emellertid ett medel att komma fram till den inre, till en åskådning i fantasien, till det åskådliga tänkandet. Och kravet på åskådlighet kan leda till överdrift i att visa barnen allt möjligt, som de redan har en klar uppfattning av, medan man försummar att uppöva deras förmåga av åskådligt tänkande. Ej blott vid den yttre åskådningen utan ock vid tänkandet bör man sträva efter självverksamhet från barnens sida.

Wigforss

---

### Fritz Wigforss (1886–1953)

Föregångare inom den svenska pedagogiska forskningen. Utvecklade bl a matematik- och skolmognadstest samt skrev läroböcker.

---

Samma tankegångar återfinns också hos Vygotskij, som tar avstånd från en undervisning som uteslutande vilar på åskådlighet och inte leder vidare till abstrakt tänkande. Undervisningen får inte stanna upp vid det som eleven redan behärskar och klarar självständigt; målsättningen måste vara att vidga gränserna för elevernas tänkande.

Om en elev behöver laborativa material som stöd för beräkningar bör detta i första hand användas i den inledande fasen. När eleven känner sig säker på att ha förstått hur han kan tänka vid räkneoperationen och skapat sig egna inre strategier ska materialet inte längre brukas. Det är inte meningen att eleven alltid ska ha konkret material för att lösa uppgifter av samma art utan det laborativa materialet ska istället hjälpa eleven att utveckla sitt tänkande i matematik. Det är inte heller möjligt att konkretisera all matematik, ibland måste förklaringar vara inommatematiska.



## Vilken betydelse har läraren?

Lärarens betydelse för elevers lärande framträder entydigt i många rapporter. I den stora forskningsöversikten av John Hattie som baseras på drygt 50 000 studier och över 80 miljoner elever visar det sig att läraren intar en nyckelroll när det handlar om vad som påverkar elevers studieresultat. Även i *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola?* lyfts läraren och lärarens kompetenser fram som särskilt framträdande för effekten av undervisnings- och lärandeprocesser. Den nationella utvärderingen, *NU-03*, visar att det finns ett starkt positivt samband mellan elevernas bedömning av om läraren undervisar bra eller inte och deras skattning av samma lärares förmåga att skapa intresse och engagemang.

”Lärarens funktion är, förutom att skapa en positiv miljö, att hitta lämpliga kreativa aktiviteter som leder mot de uppsatta målen och att hjälpa eleverna utveckla sitt tänkande och kunnande”, fastslås i *Matematik – ett kommunikationsämne*. Laborativa material lär i sig inte ut matematik. Lärarens kunnande är avgörande för hur matematik läggs till eller fångas upp när eleverna arbetar med material. Om laborativa material får en positiv eller negativ effekt på undervisningen beror i stor utsträckning på lärarens syfte med aktiviteterna.

Patricia Moyer lyfter fram lärarnas roll för att skapa matematiska miljöer, vilka ger eleverna nya erfarenheter och bidrar till att stimulera deras tänkande. Det räcker inte att lärare känner ett material väl, deras föreställningar om hur elever lär påverkar sättet att använda laborativa material. Lärare måste reflektera över hur elever beskriver matematiska idéer och hjälpa dem att utveckla ett allt mer abstrakt tänkande. En del lärare tar till laborativa material i försök att variera sin undervisning, men gör det utan att reflektera över hur det kan påverka förståelsen för matematikinnehållet. Mer material ger inte eleverna bättre begreppsuppfattning om det inte införs på ett genomtänkt sätt.

I *Lusten att lära* anger eleverna samstämmigt att läraren är den mest betydelsefulla faktorn för deras lust att lära. I rapporten betonas också att förutsättningen för att ett väl fungerande samspel ska komma till stånd mellan lärare och elever, är att eleverna blir medvetna om sin egen roll för ett gott arbetsklimat.

## Vad behöver läraren kunna?

För att arbete i en matematikverkstad ska falla väl ut behöver läraren ha en stabil förankring i både ämnesteorin och ämnesdidaktik samt medvetenhet om det uppdrag som ges i styrdokumentet. Ju tryggare en lärare känner sig med sina ämneskunskaper, desto större möjlighet finns för läraren att upptäcka och omsätta uppslag, idéer och aktiviteter till ett arbetssätt som gynnar varje elevs matematiklärande.

Forskningsresultater visar nokså entydigt at lærerens rolle er avgørende for elevenes motivasjon og lærelyst. En lærer som er faglig trygg, som kan variere arbeidsmåtene, og som kan skape entusiasme og nysgjerrighet blant elevene, vill få mange flinke elever med positive holdninger til matematikk. Dagens lærings-syn bygger på at elevene konstruerer sin egen kunnskap ut fra det de allerede behersker, og at dette skjer i et sosialt samspill mellom andre elever og lærere.

Ingvill Stedøy

Varje lärare som arbetar i matematikverkstaden måste veta *varför* arbetet genomförs och *vad* det innebär. Vikten av att först inhämta egen kunskap lyfts fram av många lärare. Lika betydelsefullt är det att sedan få tillgång till nya inspirationskällor, både under uppbyggnaden av matematikverkstaden och i fortsatt verksamhet.

Att ta del av andras erfarenheter, såväl positiva som negativa, är alltid ett bra sätt att skaffa kunskap, tex att söka stöd av mer erfarna kollegor eller besöka matematikverkstäder som är i bruk.

## Matematiklärare och taxichaufförer

Liping Ma har i sina studier bland annat ägnat sig åt att studera vilket kunnande i matematik som lärare behöver. Hon gör en jämförelse mellan lärare och taxichaufförer för att ge en bild av matematikkunnandets karaktär. Ma skriver att människor känner till sin stads geografi på olika sätt: En del, som tex helt nyinflyttade personer, kanske bara känner till den allra närmaste omgivningen kring den nya bostaden. Andra känner grannskapet ganska väl, men åker sällan därifrån. Några vet hur de ska ta sig till några få utvalda platser i staden som tex arbetsplatsen, affärer där de brukar handla eller biografen som de besöker. De vet hur de ska ta sig till och från dessa

platser genom att alltid välja en och samma väg och de avstår från att söka andra vägar. Taxichaufförer däremot, känner mycket väl till alla gator i sin stad. De är flexibla och finner tillfredsställelse och nöje i att ta sig från ett ställe till ett annat genom att hitta alternativa vägsträckor. Vid rusningstid eller trafikstörningar väljer taxichauffören olika färdvägar för att komma till ett givet mål beroende på den situation som råder. Man menar att det finns paralleller mellan taxichaufförens kunskaper om stadens gator och lärarens kunnande i skolmatematik. Båda har tillgång till någon form av mental karta över staden respektive skolmatematiken. En bra lärare har förmåga att hjälpa elever att nå samma mål, men på varierande sätt.

## Lesson study och Learning study

Många lärare vill utveckla sin undervisning och har därför valt att delta i Lesson study eller Learning study. För den som vill lära mer och ta del av vad andra har gjort finns en webbplats, [ls.idpp.gu.se](http://ls.idpp.gu.se), där lärargrupper redovisar genomförda studier, samt skriften *Learning study – en guide*.

Båda kompetensutvecklingsformerna innebär, i grova drag, att lärare tillsammans planerar, observerar, analyserar och förädlar sin undervisning.

*Lesson study* kommer ursprungligen från Japan och syftar främst till att utveckla och dokumentera bra lektioner. Utifrån frågor som Vad ska läras? Varför? Hur? planeras och genomförs lektioner. Lärarnas egna erfarenheter från det valda matematikinnehållet och lämplig litteratur används som resurser i diskussioner om hur eleverna kan förväntas ta sig an innehållet och vilken respons de då ska ge. Elevers tankar, lektionens innehåll och mål, samt lektionens aktiviteter och undervisningsmaterial är saker som särskilt beaktas.

*Learning study* är en utvecklad variant av Lesson study som har utvecklats i Hong Kong och Sverige. Learning study är grundad i variationsteorin och det är elevernas lärande som står i fokus. Exempel på frågor som deltagande lärare arbetar med: Vad innebär det att kunna det som vi vill att eleverna ska lära sig? Hur kan man på bästa sätt undervisa om något som är svårt? Vad är det i undervisningen som gör skillnad för elevernas lärande?

Elevers agerande och lärande under specifika laborativa aktiviteter kan på olika sätt utgöra utgångspunkt i både Lesson study och Learning study.



# Lärobok och elevers dokumentation

Det finns inget motsatsförhållande mellan matematikverkstad och lärobok – de kompletterar varandra och är förutsättningar för nödvändig balans i undervisningen. En faktor för framgångsrikt arbete i matematikverkstaden är att eleverna dokumenterar sitt eget lärande och kunnande i matematik.

## Vilken roll har läroboken i en matematikverkstad?

Stimulerande matematikmaterial finns ofta tillgängligt för yngre elever, men det tycks ändå vara så att många elever alltför tidigt möter matematik enbart i form av siffror och symboler, trots att de har behov av en undervisning som är mer konkret. Lärobokens roll i matematikundervisningen är stark och inget annat ämne tycks vara lika beroende av en lärobok. Detta är enligt internationella undersökningar särskilt tydligt i Sverige och leder många gånger till att matematikläroboken övertar rollen som kursplan, pedagogisk ledare och individuell studieplanering. Det blir läroboken som styr både innehåll och val av arbetssätt. Matematik blir synonymt med innehållet i läroboken. Det dominerande enskilda arbetet leder till att en alltför stor andel elever tappar intresse för matematikämnet.

I den nationella utvärderingen av grundskolan, *NU-03*, framgick att eleverna arbetade enskilt på matematiklektionerna ännu oftare än i början av 90-talet. I de *Allmänna råd* som gavs ut 2011 varnar Skolverket för en allt för hög andel individuellt arbete:

Utvärderingar visar att en hög andel individuellt arbete snarare får till följd att eleverna blir mindre engagerade i skolarbetet och att de uppnår sämre studieresultat. Resultaten påverkas dock i positiv riktning när läraren är aktiv och interagerar med eleverna utifrån en bred repertoar av arbetssätt och arbetsformer.

s 18–19

---

Matematikdelegationen skrev i sitt betänkande: Vi tar avstånd från den växande trenden av enskild räkning i svensk skola; allt talar för att denna trend är skadlig.

---

I rapporten *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet* presenteras en undersökning som genomfördes i grundskolan under våren 2009. Det visade sig att tiden med läroboksuppgifter ökade i takt med att eleverna blev äldre. Forskargruppen fann också en markant skillnad när det gällde vilka förutsättningar eleverna fick för att utveckla olika förmågor. Vid arbete i läroboken innebar 90 % av situationerna att eleverna skulle utföra procedurer som att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter. Med andra ord var det bara en mindre andel av situationerna vid läroboksarbetet som berörde övriga förmågor. Den stora skillnaden beror, enligt forskargruppen, på att den mest frekventa uppgiftstypen i läromedlen är att eleven ska utgå från en given regel och /eller ett löst exempel och sedan använda en algoritm utan att behöva aktivera några andra förmågor än den att hantera procedurer.

## Läroböcker och laborativt arbete

Problemet är inte *att* lärobok används utan *hur* och *varför*. Mycket talar för att använda matematikläroböcker – den inledande undervisningen möjligtvis undantagen. Det är resursslöseri om lärare själva ska agera läromedelsproducenter och arbeta fram alla uppgifter och aktiviteter de behöver i sin undervisning när det redan finns material som har utprovats.

Istället bör diskussionen handla om hur böckerna kan bli ett stöd för både elever och lärare, en tillgång i undervisningen och inte enbart "en mängd sidor som ska räknas". Ett sätt att finna svaret på hur frågan är att starta med varför-frågan. Vilka är matematikundervisningens mål och hur kan läroboken vara en hjälp för att uppnå dem? Här ges ett exempel på en arbetsgång där lärobok och laborativa aktiviteter kompletterar varandra:

1. Utgå från ett begrepp och välj en laborativ introduktionsaktivitet som kan skapa nyfikenhet och en vilja hos eleverna att lära mer. Alla elever ska kunna delta och ha möjlighet att förstå begreppet på någon nivå.

2. Efter arbete med introduktionen, och eventuell dokumentation, fortsätter eleverna med fler aktiviteter och uppgifter som breddar och fördjupar förståelsen. Nu kan läroboken ge ytterligare exempel på det aktuella begreppets innebörd. För att få än större variation på exemplen kan uppgifter väljas från olika läroböcker.
3. Elever fortsätter sedan med färdighetsträning för vilken det finns uppgifter i läroböcker och på tillhörande webbplatser. Variera med hjälp av exempelvis spel.

Några elever kan gå vidare till ytterligare fördjupning och då använda laborativa material tillsammans med läroboksuppgifter för att exempelvis finna generella samband.

En annan arbetsgång beskrivs i Strävornaaktiviteten *Stenhårda tal*. Där utgår eleverna från benämnda tal i läroboken och använder så kallade dekorationsstenar för att konkretisera matematikinnehållet i uppgifterna.


strävorna

**1A 3A**  
**5A**

## Stenhårda tal

PROBLEMLÖSNING — RUTINUPPGIFTER — UTTRYCKSFORMER — TALUPPFATTNING

**Avsikt och matematikinnehåll**

Eleverna får konkretisera läroboksuppgifter med hjälp av ett laborativt material och sedan fortsätta arbetet *hållkonkret* med bilder, *hållabstrakt* med egna ord och informella symboler och slutligen *abstrakt* med enbart formella symboler som siffror och konventionella räknetecken. Stor vikt läggs vid elevernas dokumentation.

Matematikinhållet handlar i första hand om taluppfattning, positionssystemet och beroende på hur textuppgifterna väljs kanske även problemlösning.

**Förkunskaper**

Grundläggande talbegrepp och för eleverna aktuella räknesätt.

**Material**

Dekorationsstenar eller andra markörer i olika färger och läroboksuppgifter.

**Beskrivning**

Välj textuppgifter i läroboken som i huvudsak handlar om tal, taluppfattning och räknesätt. Eleverna ska med hjälp av dekorationsstenarna visa eller konkretisera textuppgiftens innehåll. De ska också dokumentera sina lösningar.

**Introduktion**

Om eleverna är ovana vid att använda dekorationsstenar som konkretiserande material kan de få en inledande uppgift som består av att visa ett antal flersiffriga tal. De får själva bestämma vilket talvärde respektive färg har.

- Exempelvis kan talet 493 visas med hjälp av 4 röda, 9 gröna och 3 blå stenar.
- Skriv upp några tal och se efter att alla förstår grundiden.
- Gör också ett par räkneuppgifter gemensamt. Exempelvis kan  $452 + 234$  visas med 4 röda och 2 röda, 5 gröna och 3 gröna, 2 blå och 4 blå vilket ger 6 röda, 8 gröna och 6 blå, dvs 686.

Om eleverna är vana vid att jobba med dekorationsstenar kan exempelvis någon aspekt av problemlösningen tas upp. Är det någon av textuppgifterna som behövs extra uppmärksamhet? Betona värdet av att göra noggranna dokumentationer av ett mindre antal textuppgifter istället för att bara "komma fram till rätt svar" på många uppgifter. Det är också anledningen till att eleverna inledningsvis uppmanas att titta igenom uppgifterna för att skaffa sig en bild av vilka talområden som kommer att vara aktuella.




nämnamn/NCM
ncm.gu.se/stravorna


sidan för kopieras

## Vad tycker elever?

*När ska vi börja räkna? Idag har vi inte haft någon matte!* Sådana uttalanden känns säkert igen efter att eleverna har arbetat laborativt. Detta trots att hela lektionen eller kanske större delen av dagen egentligen handlat om matematik. Många elever har en snäv syn på ämnet: matematik innebär "att räkna i en mattebok". Detta är inte märkligt eftersom kunskap och slutsatser grundar sig på tidigare erfarenheter. För dem som enbart mött matematik i form av arbete i en lärobok är det förståeligt att de inte har kännedom om den vida syn på matematik som avspeglas i de svenska kursplanerna. Därför behöver elever uppmärksammas på vad som står i styrdokumentet och att det är dessa – inte läroboken – som avgör hur lärare och elever väljer och organiserar lektionernas innehåll. Det aktuella textavsnittet i kursplanen kan diskuteras på en för eleverna lämplig nivå.

## Elever är olika

Vi kan vara säkra på att elever är olika. En del elever uppskattar fasta rutiner och finner trygghet i att räkna framåt sida för sida i en och samma lärobok. De ogillar förändringar och vill att lektionerna ska vara förutsägbara, så att de vet vad som kommer att hända. De tycker det är tryggt att kunna se hur långt de hunnit i boken, vilka uppgifter de har gjort och vilka de har kvar.

Är eleverna sedan tidigare vana vid att det endast är boken som gäller i matematikundervisningen kan läraren till en början hjälpa eleverna att stryka vissa uppgifter eller sidor i läroboken och förklara när och hur de laborativa aktiviteterna ersätter lärobokens övningar.

Vissa elever tycker att det är jobbigt med ett undersökande arbetsätt eftersom det kräver mer engagemang och ofta större tankemöda. Att tänka självständigt, vara kreativ, ta initiativ, fatta beslut, samarbeta och dokumentera sitt arbete kräver ett annorlunda angreppssätt än enskilt arbete i boken. Andra elever avskyr moment som ställer krav på finmotorik:

Det är jobbigt att klippa ut saker när man får kramp i handen, fingrar fastnar i saxen och man klipper fel.

Elev, citerad i rapport från Skolverket

Om elever inte får stöd i det laborativa arbetet så att de kan ta önskvärda steg från praktisk verksamhet, via andra uttrycksformer, till



generella slutsatser, kan den laborativa matematiken upplevas minst lika abstrakt som en helt teoretisk undervisning. Läraren måste själv vara fullt införstådd med varför en speciell aktivitet presenteras för eleverna och kunna kommunicera det, så att eleverna blir uppmärksammade på vad som ska läras.

Även om elever är tveksamma till laborativt arbete i en matematikverkstad, finns ändå fördelar när en sådan är tillgänglig. Alla elever behöver förr eller senare redskap som linjaler, passare, gradskivor och miniräknare. Med en välutrustad matematikverkstad finns allt sådant ombesörjt.

Sist, men inte minst, visar erfarenhet att många elever uppskattar laborativt arbete. Lyckade aktiviteter leder till en positiv spiral för lärande i matematik. När elever arbetar praktiskt och undersökande och känner att de förstår kan det bidra till att självförtroendet stärks. Det kan göra att de upplever matematik som spännande och roligt, vilket i sin tur leder till att de vill och vågar ta sig an nya utmaningar.

## Vad tycker föräldrar?

Föräldrar kan vara undrande och även ifrågasätta värdet av laborativ matematikundervisning. En av anledningarna kan vara osäkerhet då inte ämnet gestaltar sig på samma sätt som det gjorde under deras egen skoltid. Läroboken kan uppfattas konkret på så sätt att föräldern lätt kan se "hur långt barnet kommit".

Föräldrars engagemang ska tas tillvara. De behöver få möjlighet till god information och insyn. Kunskap om vad som står i läroplanen och kursplanen i matematik samt en beskrivning av hur vi idag ser på matematik, kan förbättra förutsättningarna för att föräldrar ska vara säkra på att deras barn får den matematikundervisning de har rätt till. Att bjuda in föräldrar till skolan för att de själva ska få prova på liknande laborativa aktiviteter i matematik som deras barn arbetar med, brukar ge ökad förståelse för värdet av arbete i en matematikverkstad.

## Varför ska elever dokumentera?

Dokumentation – eller brist på dokumentation – kan vara en kritisk faktor om laborativt arbete ska leda till varaktigt lärande i matematik och inte bara bli ett ”görande”. Att eleverna dokumenterar sitt lärande och kunnande är nödvändigt av flera skäl. När den laborativa aktiviteten är genomförd och materialet tillbakaställt, finns ”ingen-ting kvar” som visar vad eleven har lärt. I en matematikbok går det däremot att även i efterhand se vilka uppgifter och sidor eleven har arbetat med.

Vid en etymologisk tillbakablick på ordet *dokument* i Svenska Akademiens ordbok framgår att det ursprungligen kommer från det latinska ’documentum’ och betyder bla skriftlig handling och bevis. Går vi vidare och slår upp *dokumentation* i Svenska Akademiens ordlista förklaras det med ”sammanställande och tillhandahållande av information” och att *dokumentera* innebär att ”styrka, bevisa”. I kommande avsnitt tas det upp hur eleverna kan styrka och bevisa – eller i detta sammanhang styrka och visa – sitt lärande och kunnande genom egen dokumentation.

I kunskapsöversikten *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* refereras till forskare som anser att skrivandet bidrar till att tankarna skärps. Antagandet att en stor del av vårt kunnande är underförstått innebär, enligt dem, att när våra tankar uttrycks explicit blir de också tillgängliga för vårt medvetande. Själva skrivandet underlättar den metakognitiva processen, då skrivandet kräver distans till det egna lärandet och den egna tankeprocessen. En förutsättning för goda resultat är att eleverna är införstådda med varför skrivandet bidrar till förståelse och att det pågår kontinuerligt under en längre tidsperiod.

I kommentarmaterialet till den danska gymnasiekursplanen ses förmågan att uttrycka sig skriftligt som ett centralt element i matematikundervisningen. Skrivande i matematik betraktas både som ett inlärningsredskap och ett utvärderingsinstrument. Att elever får handledning när de skriver texter i matematikämnet är därför en del av undervisningen.

I första hand kanske dokumentation förknippas med förmågan att kommunicera, men även förmågorna att formulera problem, använda och analysera begrepp, göra beräkningar, föra resonemang och att använda matematikens uttrycksformer kan bli aktuella när eleverna själva dokumenterar sitt arbete.

Behovet av dokumentation får naturligtvis avgöras med fingertoppskänsla så att eleverna inte uppfattar det som en besvärande på-

laga som förtar intresset för laborativa aktiviteter. Kravet på språkbehandling får avgöras individuellt.

Eleverna måste också känna förtroende för hur läraren använder deras texter. Det kan vara att läraren får okey av eleverna att läsa upp vad de skrivit och att de själva bestämmer om texterna får läsas av andra.

## Återkoppling

Elevers dokumentation kan användas för återkoppling mellan lärare och elev och har på senare år lyfts fram som en faktor med tydlig effekt för elevers lärande. Hattie har i den stora metastudien som tidigare nämnts, gjort en översikt av hur olika faktorer påverkar elevers studieresultat. Han fann tidigt ett starkt samband mellan goda resultat och undervisning som innehöll återkoppling. Det som många i första hand tänker på när det gäller återkoppling är när en lärare berömmar eller klandrar sina elever, tex genom att läraren ger specifik respons på elevens arbete eller uttrycker sig i mer allmänna ordalag om det som eleven har presterat. Men, betonar Hattie, återkoppling hade starkast effekt när den var riktad från eleven till läraren – inte från läraren till eleven. Det innebär att läraren söker eller åtminstone är öppen för signaler från eleverna om vad de vet, kan, förstår, vilka felaktigheter och missförstånd som kan förekomma och när de tappat intresset. Poängen är alltså att både lärare och elever måste söka respons på det de gör för att se om det fungerar och är ändamålsenligt.

I och med att eleverna skriftligt dokumenterar sitt laborativa arbete kan läraren ge antingen skriftlig eller muntlig återkoppling. Samtidigt får läraren information om hur eleverna har tagit emot undervisningen. Texterna kan visa om och i så fall vilka eventuella förändringar som behöver göras för att elevernas förståelse ska öka.

## Hur kan elever dokumentera?

Först några ord om vår syn på språkbehandling och hur elever kan få stöd i sitt skrivande. När det gäller krav på rättstavning, grammatik och korrekt matematikterminologi finns bara ett svar: det måste avgöras med professionell lärarkänsla, från situation till situation.

Vad ska eleverna få ut av sin egen dokumentation? Vad är det jag som lärare vill få ut av elevernas dokumentation? Är det elevernas tankar i matematik eller är det hur de språkligt uttrycker sina tankar?

Ett råd är att elevers texter i matematik inte bedöms ur ett språkligt perspektiv, förutsatt att det inte sker i samarbete med svenskämnet och att eleverna är införstådda med det. Om skolan har en nära ämnessamverkan kan eleverna se vinster med att en och samma text bedöms i två eller flera ämnen.

Alla elever måste känna sig säkra på vad som bedöms och inte bedöms. I annat fall kan det leda till att elever med svårigheter att producera text än mer vill avstå från att skriva. "Det blir ändå aldrig bra och nu märks det på matten också ..." Eleverna ska känna att deras språk duger, men att de tillsammans kan utöka ordförrådet och höja nivån på sitt eget språk.

I *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* beskrivs studier som visar att det är orimligt att tro att skrivande i sig spontant leder till att eleverna uttrycker sig utförligt och detaljerat. När skrivande sker utan specifika instruktioner blir det ofta "naivt". Det visade sig emellertid att de som fått någon form av stödfrågor hade bättre resultat på förståelsetest jämfört med kontrollgruppen. I en efterföljande studie visade det sig att allra bäst lyckades elever som fick både kognitiva och metakognitiva och dessutom direkta frågor om vad som behövdes för att öka förståelsen. Exempel på de tre kategorierna av stödfrågor finns under *Matematikjournal*, sid 127–128.

Det är inte lika självklart för alla elever att uttrycka sina tankegångar i skrift. En hjälp för elever kan vara att först få diskutera och uttrycka sig muntligt innan de skriver. Det tydliggör sambandet mellan tal och skrift.

Foton kan också berika och underlätta dokumentationen. Det ger en uppfattning av aktiviteten och det syns vilket laborativt material som har använts.



När jag la båten med tangrapusslet efter en bild kom jag på att det var enklast om jag börjar med de två största triangelbitarna. Kvadraten behövde jag inte använda.



Idag skulle vi lägga en stor kvadrat med alla 7 pusselbitarna. Det var mycket svårare än jag trodde. Först blev det nästan en kvadrat, men jag fick över parallelltrapetsbiten. Jag såg att kvadraten kan delas i två stora trianglar.



Sen skulle vi fortsätta och lägga en rektangel, en parallelogram och en stor triangel. Varje gång skulle alla 7 bitarna användas. Triangeln var enklast. När jag drog isär de två stora triangelarna i kvadraten från de andra små bitarna var det bara att vrida på dom till en jättestor.

Vi har valt att samla exempel på dokumentation under fyra huvudrubriker:

- Dokumentation som synliggör elevens kunskapsutveckling
- Dokumentation som lyfter fram matematiken
- Gemensam dokumentation
- Dokumentation i form av utvärderingar

Slutligen ges förslag på hur man praktiskt kan hantera de skrivna texterna. Flera av de dokument som visas på följande sidor finns att ladda ner från [ncm.gu.se/mv\\_dokument](http://ncm.gu.se/mv_dokument).

## Dokumentation som synliggör elevens kunskapsutveckling

Det finns många sätt att undersöka vad elever kan före och efter ett arbetsområde. En inledande dokumentation kan fungera som en fördiagnos genom att den ger information om det kunnande som finns hos eleverna innan ett nytt arbetsområde påbörjas. Kanske har eleverna ett mer omfattande kunnande än vad som kunnat förutses – eller tvärtom. Under gynnsamma förutsättningar kan texterna fungera som introduktion till det kommande arbetet. Förekommer missuppfattningar eller felaktigheter kan de uppmärksammas och redas ut. Elevernas formuleringar kan på så sätt användas aktivt i undervisningen.

I arbetets slutskede får de tillbaka sin dokumentation och utökar med det kunnande som de har tillägnat sig genom undervisningen. Lärande och kunskapsutveckling blir synligt för eleven själv, för lärare och för föräldrar. Elevernas dokumentation kan därför även utgöra underlag för individuella utvecklingsplaner och utvecklingssamtal. Tre exempel:

- *Före och efter*
- *Dokumentation i form av ellipser*
- *Detta vet jag om...*

## Före och efter

Innan ett begrepp ska introduceras antecknar eleverna vad de redan känner till om det, alternativt vad de kommer att tänka på när de hör ordet. Anteckningarna dateras. I slutet av lektionsserien fyller de på med ny text om vad de nu kan om begreppet. Texten kan skrivas med annan färg än vid första tillfället och det blir då synligt vilket lärande som skett under perioden. Denna dokumentation lämpar sig bäst när eleverna inledningsvis har en förhållandevis begränsad uppfattning om det aktuella begreppet. Det är också bättre att välja ut ett begrepp med ett relativt snävt innehåll jämfört med ett som är mycket brett och omfångsrikt, tex att välja "cirkel", "parallelltrapets" etc i stället för begreppet "geometri". Det kan annars bli alltför stor skillnad mellan hur mycket tid olika elever behöver för att skriva – beroende på hur mycket de redan kan.



Dokumentation – före

Dokumentation – efter

## Dokumentation i form av ellipser

|       |          |          |
|-------|----------|----------|
| Namn: | Datum 1: | Datum 2: |
|-------|----------|----------|

I god tid innan ett nytt begrepp ska introduceras gör eleverna de tre första av följande punkter.

1. Eleverna skriver det aktuella begreppet som rubrik i den minsta ellipsen. Tex volym, area, procent, primtal, ränta, räta linjen, koordinatsystem ...
2. I den näst största ellipsen skriver eleverna individuellt vad de kan om begreppet eller kommer att tänka på när de hör ordet.
3. Eleverna fortsätter därefter att parvis läsa varandras formuleringar. De kan "få" ord och uttryck av varandra som de skriver in i den största ellipsen. Det är alltså tillåtet att "skriva av", men det ska göras med urval. Dokumentet dateras.
4. Läraren samlar in och sparar dokumentationen.

Efter genomgångar, laborativt arbete och uppföljning:

5. Läraren lämnar tillbaka elevernas dokumentation och de skriver vad de lärt sig om begreppet. Denna gång skriver de *utanför* ellipserna. Nu ska det inte finnas linjer som begränsar utrymmet för vad de har lärt sig.

## Detta vet jag om ...

Denna dokumentation är en vidareutveckling av *Före och efter*, men här kan elevernas kunskande om de valda begreppen vara bredare och djupare. Varianten kräver en större arbetsinsats av eleven. Nu är det två begrepp som ska beskrivas var för sig, men också relateras till varandra. Eleverna får gott om tid att reflektera kring begreppen och sin egen förståelse av dem. De uppmanas att skriva hela meningar och eventuellt kan de först skriva utkast som sedan processas fram till en renskriven text. Läraren kan också ge vissa instruktioner som att det ska finnas med någon form av skiss, tabell eller liknande. Eleven ges härigenom möjlighet att visa sin förmåga att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang. Samlar eleverna utvalda arbeten i portfolio, kan denna dokumentation passa väl in där.

Detta vet jag om  
OMKRETS och AREA

Fredagen den 28 sept

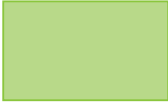
Omkrets är det som finns runt **om**. Man kan tänka att man ska gå runt om fotbollsplanen. Då får man omkretsen. Ska man räkna ut omkretsen lägger man ihop alla sidorna.



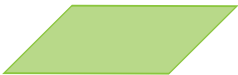
- Area är yta.
- Area är det som finns inuti.
- Ska man räkna ut hur stor arean är på fotbollsplanen får man ta längden gånger bredden.

Torsdagen den 11 oktober

Nu har jag sett att när man ändrar formen så blir omkretsen olika. Även om arean är samma. T ex om man ska bygga en hundgård, så kan det gå åt olika mycket nätstängsel även om hunden får samma storlek på golvet.




Det är likadant tvärtom. Om man har samma omkrets, så kan arean bli olika.

Tänk t ex att Nadja och Nisse ska bygga var sin hundgård. Nadja har 14 m nätstängsel. Det har Nisse också. Det kan ändå bli orättvist för deras hundar. Storleken kan bli olika i alla fall. Det beror på vilken form som hundgårdarna får.



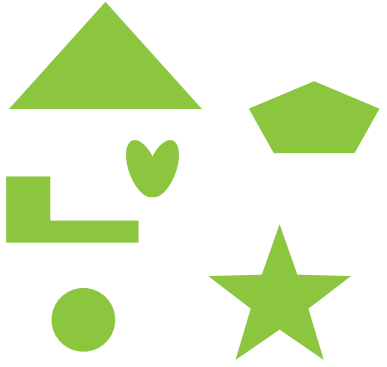
## Dokumentation som lyfter fram matematiken

Dokumentation kan göras under eller i slutet av ett moment för att elever ska visa vilken matematik de har uppfattat och vad de har lärt sig. Det ger läraren insikt i elevernas tänkande och förståelse och kan ge vägledning inför den fortsatta undervisningen. Under själva processen när eleverna dokumenterar sitt arbete finns också möjlighet för dem att upptäcka matematik som annars kanske hade förblivit dold för dem. Fem exempel:

- *Vad är? Vad är inte?*
- *Begrepp steg för steg*
- *Samla ord*
- *Likheter och skillnader*
- *Matematikjournal*

Först ges ett exempel där det handlar om att skilja ut *ett* begrepp från andra och sedan visas hur elever kan utveckla ett begrepp med hjälp av en arbetsgång i flera steg. Därefter ges förslag på hur läraren aktivt kan arbeta för att utveckla elevernas språk och hur jämförelser kan göras mellan flera begrepp. Till sist ges förslag på hur olika stödfrågor kan hjälpa eleverna att skriva innehållsrika texter.

### *Vad är? Vad är inte?*

| Det här är parallelltrapetser                                                       | Det här är <i>inte</i> parallelltrapetser                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |

Om eleverna använder laborativa material, kan de rita av objekten i respektive fält. Eleverna kan sedan antingen muntligt eller skriftligt mer utförligt beskriva vilka egenskaper som, i detta fall, begreppet parallelltrapets har och vad som avgränsar eller skiljer det från de andra begreppen.

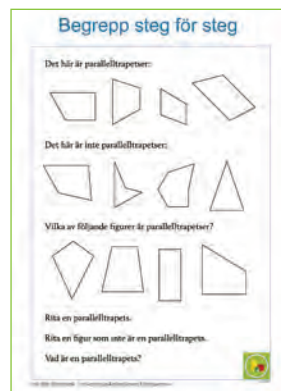
Till sin hjälp kan eleverna få tillgång till en lista med tänkbara egenskaper: parallella sidor, lika eller olika långa sidor, vinklars storlek, antal vinklar, räta linjer eller böjda kurvor, symmetrier, konvex eller konkav, regelbunden eller oregelbunden.

## Begrepp steg för steg

*Begrepp steg för steg* är en vidareutveckling av den förra dokumentationen med påståenden, frågor och uppmaningar i stigande svårighetsgrad. Först ges exempel, sedan motexempel och utifrån informationen avgörs vilka av figurerna som uppfyller kriterierna för begreppet. Därefter ger eleverna själva exempel och motexempel och slutligen beskriver de vad som kännetecknar det aktuella begreppet. Syftet är att ge eleverna tillfälle att utveckla sitt tänkande genom att jämföra och utesluta, formulera och testa hypoteser och till sist sammanfatta sina slutsatser.

Läraren kan utgå från de olika stegen vid genomgången och eleverna dokumenterar parallellt. Dokumentationen kan sedan sparas som ett faktablad i elevens egen "Begreppsbok".

- Det här är ...
- Det här är inte ...
- Vilka av följande ... är ...?
- Rita en ...
- Rita en ... som inte är ...
- Vad är ... ?



En variant är att inleda undervisningen kring ett begrepp med att dela ut *Begrepp steg för steg* som en uppgift eller fördiagnos till eleverna. Läraren får information om vad de behärskar respektive inte

behärskar och eleverna kan efter undervisningen komplettera med det som tidigare saknades. En annan variant är att elever själva väljer egna begrepp och redovisar de olika stegen. Därefter kan eleverna göra nya *Begrepp steg för steg* och byta med varandra.

## Samla ord

Vid aktivt arbete med språkutveckling kan lärare och elever samla och lista ord och termer som är bra att ha tillgång till vid dokumentationen. Ett exempel: Eleverna har under en period arbetat med statistik och gjort undersökningar som presenterats med hjälp av olika diagram. Nästa lektion ska jämförelser göras mellan stapel- och cirkeldiagram genom att eleverna redovisar samma undersökning i båda diagramtyperna. Lektionen inleds med *Samla ord*.

1. Läraren ber eleverna fundera över vilka ord och termer som kan vara bra att använda när man ska beskriva vissa begrepp, i detta fall stapel- och cirkeldiagram.
2. Eleverna skriver under några minuter ner sina förslag individuellt.
3. Parvis går de igenom sina respektive listor och kompletterar, om de vill, med kamratens förslag.
4. Vid den gemensamma genomgången i klassen skrivs alla ord och termer upp och går igenom, så att eleverna kan utnyttja dem vid sitt fortsatta arbete. Läraren kompletterar vid behov.

**Stapel- och cirkeldiagram**  
 frekvens, stapel,  $x$ -axel,  $y$ -axel,  
 värde på  $x$ -axel, värde på  $y$ -axel,  
 högsta värde, lägsta värde,  
 cirkelsektor, gradantal,  
 procentform, helhet ...

## Likheter och skillnader

Tidigare har nämnts att elevernas begreppsutveckling kan stödjas genom att uppmärksamhet riktas mot både likheter och skillnader. Här använder eleverna en mall för att få en enkel struktur på jämförelsen

|            |  |
|------------|--|
| LIKETER    |  |
|            |  |
| SKILLNADER |  |
|            |  |

och de kan ta hjälp av de ord som samlades in i den förra aktiviteten. Det är en fördel om eleverna först får en stund för eget tänkande och skrivande innan de fortsätter att arbeta parvis. Avslutningsvis görs en sammanfattning i helklass och läraren får tillfälle att ställa utmanande frågor och eventuellt utöka med ytterligare jämförelser.

Mallen kan användas för jämförelser som:

addition – multiplikation  
 multiplikation – division  
 bråkform – procentform  
 decimalform – procentform  
 förkortning av bråk – förlängning av bråk  
 tiotal – tiondel  
 medelvärde – median  
 längdskala – volymskala  
 uttryck – ekvation  
 graf – funktion etc.

## Stapeldiagram – Cirkeldiagram

### Likheter

- Man behöver göra en frekvenstabell först.
- Det är lätt att se vad som tex är populärast (frekvens).
- Man får veta mycket bara genom att titta.
- Man behöver inte läsa särskilt mycket.
- Det går att luras med båda.

### Skillnader

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- har staplar</li> <li>- lättare att läsa av exakt</li> <li>- resultatet kan ritas in direkt</li> <li>- visar antalet</li> <li>- man kan luras genom att kapa staplarna</li> <li>- man kan ofta räkna ut hur många som varit med i undersökningen.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- delas in i sektorer</li> <li>- inte så lätt att läsa av exakt</li> <li>- man måste räkna om till grader</li> <li>- visar fördelningen</li> <li>- man kan luras genom att "tippaner" cirkelarna</li> <li>- man kan inte räkna ut hur många som varit med i undersökningen om det inte står skrivet bredvid.</li> </ul> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

*Eleve exempel*

## Matematikjournal

Syftet med en matematikjournal är att eleverna ska notera vilka aktiviteter de har arbetat med och vad de har lärt sig med hjälp av dem. Bokföringen kan göras antingen med penna och papper eller med digital teknik. Innan arbetet påbörjas genomförs *Samla ord*.

För att eleverna ska få en fylligare och mer innehållsrik text kan de behöva stödfrågor av varierande slag. Eleverna måste också bli införstådda med att de inte enbart ska skriva kortfattade svar på stödfrågorna. Texten ska kunna stå för sig själv och förstås även av en läsare som aldrig har sett stödfrågorna. Det kan förklaras för eleverna: om någon skulle hitta din text, så ska den personen förstå vad du har gjort och vad du har lärt dig.

**Matematikverkstad**  
 Journal

Aktivitet: *Magiska Kvadrater*

Vad jag har gjort och vad jag har lärt mig:

Vi försökte att få samma summa åt alla  
 håll.  
 De jämna talen finns i hörnen.  
 Drar man ett streck mellan de udda talen  
 blir det som ett plustecken.  
 Talen på motsatta sidor om mittentalet är  
 tiokamrater.  
 $3 \cdot \text{mittentalet} = \text{summan}.$   
 I klassen hittade vi 8 olika lösningar.  
 Man får träna mycket på huvudräkning här.  
 Jag tror att den heter magiska kvadrater  
 för man upptäcker ganska många magiska  
 saker när man håller på med den.  
 Jag undrar varför det alltid blir tiokamrater  
 hela vägen runt femman.

Datum: *15/5 2012*

Namn: *Emelie*

Eleven har fyllt i sin journal  
efter att ha arbetat med  
magiska kvadrater.

---

**Kognitiva stödfrågor.** Frågor som berör tankeförmåga och intellektuella färdigheter.

**Metakognitiva stödfrågor.** Frågor som berör tänkande om det egna tänkandet.

---

Exempel på *kognitiva stödfrågor*:

- Var finns de jämna talen?
- Var finns de udda talen? Vad händer om du sätter 9:an i ett hörn?
- Vad upptäcker du om du tittar på talen som står på motsatta sidor om mittentalet?
- Vilka upptäckter kan du göra om du jämför mittentalet med summan av talen på varje rad?
- Finns det fler lösningar – och i så fall vilka?
- Vilken matematik kan du hitta i aktiviteten?

Exempel på *metakognitiva stödfrågor*:

- Vad var lättast?
- Vad var svårast?
- Varför tror du att vi arbetat med Magiska kvadrater under den här lektionen?
- Varför tror du att det heter Magiska kvadrater?

Exempel på *direkt fråga om förståelsen*:

- Är det något som du funderar över, när det gäller varför talen placeras på detta sätt i denna Magiska kvadrat?
- Hur skulle du kunna förklara för någon annan varför det blir tiokamrater runt 5:an?

## Gemensam dokumentation

Ett alternativ till tidigare förslag är att dokumentation görs gemensamt efter att det laborativa arbetet är avslutat, eller i dess slutskede, och fungerar då som en summering av de insikter eleverna fått. Två exempel:

- *Mindmap*
- *Anslagstavla*

### *Mindmap*

Läraren avgör vilka rubriker som ska finnas med på en mindmap utifrån syftet med övningarna. Eleverna fyller sedan på med sina upptäckter eller så kan eleverna redovisa vad de kommit fram till och läraren systematiserar svaren under lämpliga rubriker.

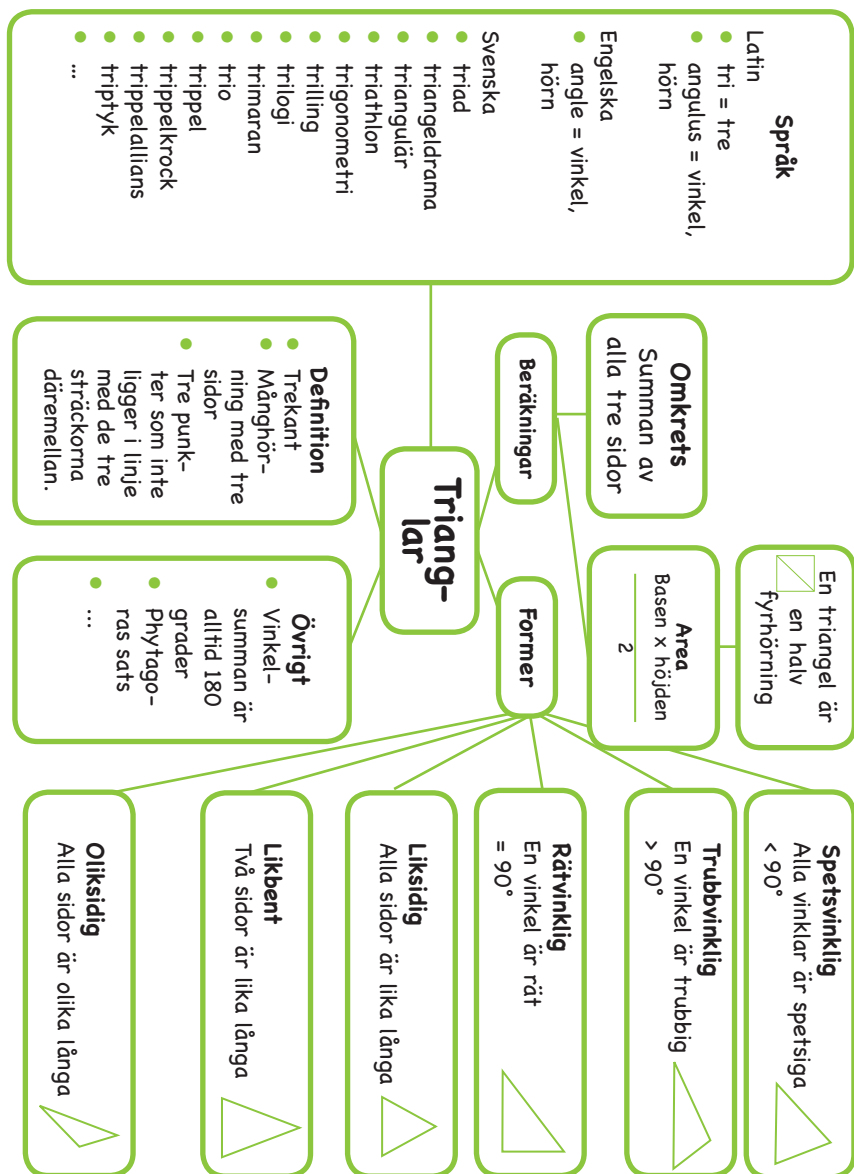
Vi ger ett exempel från matematikverkstaden. Klassen arbetar med trianglar och målet *för den första lektionen* är att eleverna ska upptäcka att de kan delas in i grupper: rätvinkliga, spetsvinkliga, trubbvinkliga, liksidiga, likbenta och oliksidiga.



Det laborativa materialet består av styva plastremсор i varierande längder. På varje remsa finns utstansade hål, så att de kan sättas ihop med påsnitar och bilda olika former. Eleverna arbetar tillsammans och uppmanas att bygga så många trianglar med skilda utseenden som de kan komma på.

När idéerna ebbat ut får de i uppgift att sortera trianglarna i grupper utifrån form. Några elever undrar om trianglar med samma form men olika storlek kan tillhöra samma grupp. Läraren fångar upp frågan och för en diskussion med eleverna. De kommer fram till att det

kallas att trianglarna är likformiga och att det går bra att placera dem i samma grupp. Eleverna redovisar vilka grupper de funnit, vad som utmärker dem och vad som skiljer dem åt. I vissa fall vet någon elev vad den formella benämningen för triangelnars form är, i övriga fall kompletterar läraren med korrekt terminologi. Kommande lektioner tar upp triangelns omkrets, area, vinkelsumma etc och i slutskedet gör en gemensam mindmap, som skulle kunna se ut som i exemplet:





Eleverna har under lärarens ledning enats om vad som utmärker en triangel och beskrivit det under rubriken *definition*. Undersökningarna som gjordes av trianglars olika *former* har redovisats. De har noterat hur *beräkningar* av omkrets och area kan göras. Med ordlistans hjälp har ord som börjar på tri- samlats och listats under rubriken *språk*. Mindmappen har utformats gemensamt, men var och en gör sin egen. Under *övrigt* har eleverna kompletterat med fakta eller kommentarer som känts intressanta för dem personligen.

Sammanfattningen ger läraren möjlighet att få en bild av klassens förståelse, reda ut eventuella missförstånd och fördjupa diskussionen så att elevernas kunskande vidgas.

## Anslagstavla



Anslagstavla på Kungsholmens skola 6–9.

I matematikverkstaden kan en stor anslagstavla skapa nyfikenhet och förväntningar hos eleverna. Vad kommer de att möta på matematiklektioner framöver? Anslagstavlan kan delas upp i form av en matris. På ena ledden markeras årskurs och på den andra matematikinnehåll. Valda elevdokumentationer sätts upp på lämpligt ställe. Nu kan också yngre elever se vad elever gör i högre årskurser.

## Dokumentation i form av utvärderingar

Eleven behöver utvärdera sitt kunskande för att få möjlighet att ta ett personligt ansvar för sina studier. Undervisningen måste ge eleverna strategier för att hjälpa dem att reflektera över det egna kunskandet så att det blir synligt för dem själva, men också för läraren och för föräldrarna. Två exempel:

- *Inledande meningar*
- *Stjärnmatte och utvärdering*

## *Inledande meningar*

Laborativt arbete kan utvärderas utifrån olika aspekter. Det kan vara elevernas kunnande i matematik, hur verksamheten fungerar praktiskt och socialt eller de attityder som kommer till uttryck. När det laborativa arbetet är genomfört reflekterar eleverna skriftligt utifrån *en* av nedanstående inledande meningar.

### *Om kunskap*

- Jag har lärt mig ...
- Det här vet jag om ...
- Jag är mest stolt över att ha förstått ...
- Det som gjorde att jag lärde mig var ...
- Jag kan visa vad jag lärt mig på flera sätt.  
Här är några exempel ...
- Jag kan visa att jag uppnått målet för ... genom att ...
- För att genomföra aktiviteten behöver man först förstå ...
- Om jag började med arbetet nu skulle jag istället ...  
Orsaken till det är att ...
- Om jag skulle ge några goda råd till andra så skulle jag föreslå att ...  
Anledningen till det är ...
- Övningen skulle kunna förbättras genom att ...

### *Om verksamheten*

- Goda råd till mig själv inför nästa verkstadsbesök är att ...  
Nästa vecka ska jag utvärdera hur det gick.
- Mina tankar om arbetet i matematikverkstaden:  
Detta fungerar bra ...  
Detta fungerar mindre bra ...  
Mina förslag till förbättringar är ...

### Om attityder

- Jag tyckte den här aktiviteten var ... därför att jag förstod / förstod inte varför ...
- Idag tycker jag att arbetet i matematikverkstaden fungerade ... Det berodde på att ...

Ska eleverna kunna gå på djupet i sitt resonemang bör de inte få flera punkter att utvärdera vid ett och samma tillfälle. Risken finns då att deras reflektioner blir ytliga och mer eller mindre oövertänkta, vilket inte gynnar den efterföljande diskussionen. Formuleringen av den inledande meningen behöver nog övervägas, så att den leder till det engagemang och den reflektion som eftersträvas. Elever tycker ofta att det ger en god hjälp när inledningen redan är färdigformulerad, men de ska också själva skriva den så att dokumentet blir komplett och inte ett papper med en text där den första delen saknas. I de här exemplen ligger fokus på eleven och elevens lärande vid arbete med laborativa aktiviteter – inte enbart på om de tycker att det är lätt, svårt, tråkigt, kul etc. De daterade dokumenten kan efter diskussionerna sparas på ett för klassen lämpligt sätt. Det krävs inskolningstid för att eleverna ska få en chans att utveckla det reflekterande skrivandet. Nivån på innehållet höjs märkbart vid ett kontinuerligt och strukturerat arbete.

## Stjärnmatte och utvärdering

Stjärnmatte – elevdokumentation Namn:

|                                                        |                                                        |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Vi tycker att den här aktiviteten var lätt, därför att | Vi tycker att den här aktiviteten var svår, därför att |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|

Välj den ruta med text som ni tycker passar bäst till den aktivitet ni gjort. Det finns mer att välja bland på andra sidan. Skriv först i aktivitetens namn och fortsätt sedan den påbörjade texten.

|                                                      |           |
|------------------------------------------------------|-----------|
| Vi tycker att den här aktiviteten var ... därför att | Vi undrar |
|------------------------------------------------------|-----------|

Stjärnmatte, som beskrivits tidigare, kan användas som en introduktion till att skriva meningsfulla utvärderingar. Läraren gör ett lämpligt urval av de frågor som presenterades på förra sidan och skriver dem som inledning på ett dubbelsidigt A4-ark, vilket delas så att antalet rutor anpassas till antalet stationer.

När eleverna är klara med en aktivitet skriver de en kort utvärdering. Först ska gruppen tillsammans välja vilken inledande mening som de tycker passar på just den stationen. Sedan kan de tillsammans i gruppen diskutera och hjälpas åt att formulera fortsättningen innan var och en skriver sin egen utvärdering. Speciellt när eleverna inte är så

vana vid att dokumentera sitt laborativa arbete skriftligt, kan det kännas bra att det "bara" är en ruta att skriva i, inte ett stort tomt pappersark.

Skriftliga utvärderingar behöver följas upp, så att eleverna får återkoppling på sina texter. I gemensamma uppföljningar blir eleverna medvetna om sina klasskamraters reflektioner och märker att deras dokumentation tas på allvar. Några exempel:

- Eleverna läser upp vad de skrivit. Om de vid genomgången blir påmind om något värdefullt, kompletterar de sina texter.
- Eleverna skriver först på egen hand. Därefter arbetar de i par och läser högt för varandra vad de skrivit. Eventuellt gör de tilllägg i sina texter. Redovisning i helgrupp.
- En av inledningarna väljs ut, tex "För att genomföra aktiviteten behöver man först förstå ...". Eleverna skriver först själva sina förslag. Därefter samlas de i grupper och sammanställer sina svar. Någon i varje grupp antecknar på något sätt så att hela klassen kan läsa alla grupperns svar. En gemensam diskussion förs utifrån gruppernas anteckningar. Läraren stödjer, kommenterar och ifrågasätter.
- Alla grupper får olika inledningar. Grupperna redovisar sina texter för hela klassen.
- Läraren väljer ut en viss punkt och sammanställer delar av texterna anonymt för eleverna. Texten finns till stöd för diskussion kring det fortsatta arbetet i matematikverkstaden.

Återkopplingen kan också ske enbart mellan lärare och den enskilde eleven. Texten lämnas då till läraren som ger respons. För att uppmuntra eleverna i deras skrivande bör läraren ge personliga kommentarer. Om detta inte ska bli övermäktigt för läraren kan en viss aspekt väljas ut vid varje tillfälle och läraren kan formulera sig på liknande sätt till flera elever. Elever som lämnar kortfattade och ytliga texter kan få följdfrågor för att förtydliga och utveckla innehållet. Frågorna besvaras vid nästa utvärderingstillfälle och erfarenhet visar att kvaliteten på texterna höjs betydligt efter hand. Läraren får också ett gyllene tillfälle att ge extra utmaningar.

## I praktiken

I en traditionell och läroboksbunden undervisning skriver eleverna det mesta direkt i läroboken under de första skolåren och övergår sedan till att göra anteckningar och beräkningar i ett separat räknehäfte eller kollegieblock. Det börjar se lite annorlunda ut idag i och med att allt fler elever har sin egen dator med på lektionerna. Men hur än eleverna arbetar medför matematikverkstadens arbetssätt att de kommer att hantera instruktioner och arbetsgångar, prick- och triangelpapper, egna faktablad, teckningar, diagram, uppklistrade lösningar, webbsidor, länkar, material från tidningar och reklam, dokumentation, utvärderingar och mycket annat. För att hålla ordning behöver eleven troligen både en fysisk mapp och en mapp i sin dator.

Ett beprövat sätt att samla och ordna elevernas papper är följande: Varje elev har en enkel namnmärkt plastmapp som hela tiden får vara kvar i verkstaden. I mappen samlas dokument, märkta med datum. Eleverna sammanställer egna böcker fördelade på områden som taluppfattning, geometri, algebra, statistik och sannolikhet. Var och en gör sin egen personligt designade bokframsida med titel, färglagd informativ bild samt namn. Om klassbeteckning utelämnas kan boken användas under flera år. Framsidan lamineras och förbereds för spiralbindning. När det blir fullt i mappen, eller då ett område avslutas, sätts alla papper in i den egna boken. Sker spiralbindningen med framsidan nedåt går det att allt eftersom fylla på med nya sidor. De flesta spiralbindningssystem gör det möjligt att byta ut spiralerna mot tjockare när boken växer i omfång.

Om eleverna har arbetat med aktiviteter som beskrivits på ett laminerat ark i en låda bör dessa underlag dupliceras. Det ser märkligt ut i boken om det bara finns lösningar och svar utan att uppgiften presenteras. A4-sidor kan förminskas till en fjärdedel och dessa små aktivitetsunderlag klistras in på rätt ställe.

Är undervisningen i första hand datorbaserad kan exempelvis en powerpointpresentation ersätta den egentillverkade boken.



Äldre grundskoleelever har fällt följande kommentarer kring detta sätt att samla sina papper:

- Kul att göra något i matten som man kan ta hem.
- Det här ska jag spara till gymnasiet.
- Nu finns det ju anledning att skriva snyggt och prydligt. Det fanns det inte när jag bara använde kollegieblock som hamnade i pappersinsamlingen då det var fullskrivet.

Finns utrymme i verkstaden kan böckerna gärna hängas upp eftersom de är intressanta att bläddra i och dessutom dekorativa.

## Formativ och summativ bedömning

I det förra avsnittet, *Dokumentation i form av utvärderingar*, är det eleverna som själva utvärderar sitt laborativa arbete utifrån olika aspekter. Det laborativa arbetet kan också bedömas av läraren utifrån både ett formativt och ett summativt syfte. I Lgr 11 sker bedömningen utifrån kunskapskraven som utgår från i hur hög grad de olika förmågorna kommer till uttryck. Några exempel på kunskapskrav i Lgr 11:

- Eleven kan beskriva begreppens egenskaper med hjälp av symboler och konkret material eller bilder. (Kunskapskrav för godtagbara kunskaper i slutet av årskurs 3.)
- Eleven kan även beskriva olika begrepp med hjälp av matematiska uttrycksformer på ett väl fungerande sätt. I beskrivningarna kan eleven växla mellan olika uttrycksformer samt föra välutvecklade resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra. (Kunskapskrav för betyget A i slutet av årskurs 6.)
- Eleven kan även beskriva olika begrepp med hjälp av matematiska uttrycksformer på ett väl fungerande sätt. I beskrivningarna kan eleven växla mellan olika uttrycksformer samt föra välutvecklade resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra. (Kunskapskrav för betyget A i slutet av årskurs 9.)

Laborativt material kan ses som en av flera uttrycksformer, vilket gör att ett laborativt arbetssätt kan ge ytterligare stöd för allsidig bedömning av elevers kunskande. Naturligtvis måste krav ställas på progression, så att eleverna med stigande ålder använder mer precisa och väl-

utvecklade matematiska uttrycksformer och anpassar dem till syfte och sammanhang i allt högre omfattning.

## Formativ bedömning

Elevernas arbete och dokumentation kan ligga till grund för bedömning i ett formativt syfte, vilket beskrivs på följande vis i *Bedömning av kunskap – för lärande och undervisning i matematik*: Bedömning i formativ mening innebär bedömning för lärande. Det är en utgångspunkt för utveckling och fördjupning av såväl lärande som undervisning. Tonvikten ligger på tre nyckelprocesser: att identifiera var eleven är i sitt lärande, vad eleven ska nå och vad som behövs för att komma dit. I dessa processer ingår att tydliggöra syftet med undervisning och lärande, att göra bedömningskriterier förståeliga för eleven, att eleven får visa sitt kunnande på olika sätt samt att ge återkoppling som leder elevens lärande framåt.

### Fyra bedömningsdiskurser

Lisa Björklund Boistrup har i sin doktorsavhandling analyserat kommunikationen mellan lärare och elev när det gäller bedömning i matematik.

Hon undersökte bland annat vilken matematik som var i fokus för bedömningen. Var det själva görandet, tex hur många uppgifter som eleven hunnit räkna i boken, eller var det vilken förståelse eleverna hade utvecklat om olika matematiska begrepp och processer? Hon studerade också vilken sorts återkoppling som ägde rum. Var det tex återkoppling från elev till lärare eller var det tvärtom och på vilka sätt uttrycktes återkopplingen?

Björklund Boistrup fann fyra olika sätt hur lärare hanterar bedömning i matematikklassrum:

- gör det fort och gör det rätt
- vad som helst duger
- öppenhet med matematik
- resonemang tar tid.

Hennes beskrivning av de fyra kategorierna kan fungera som redskap för att utveckla bedömningspraktiken i matematikklassrum och kan användas som underlag vid diskussioner om den egna skolans matematikundervisning.

- Artikeln *Bedömning för engagemang och lärande* i NämnarenTEMA Matematik ett grundämne.
- Avhandlingen *Assessment discourses in mathematics classrooms: A multi-modal social semiotic study*. Nedladdningsbar från [su.diva-portal.org](http://su.diva-portal.org).

## Summativ bedömning

Flera av de exempel som ges i detta kapitel skulle också kunna bilda underlag för bedömning i ett summativt syfte. Denna form avser att ge en sammanfattande bild av vilket kunnande en elev har vid ett visst tillfälle, ofta i slutet av ett arbetsområde eller termin, och resulterar i ett omdöme eller ett betyg. Till skillnad från den förra formen ses bedömning i summativ mening som bedömning *av* lärande. Nationella prov är framtagna för att läraren ska göra en summativ bedömning av elevers kunnande, men proven kan naturligtvis också användas i ett formativt syfte.

## Att veta vad som bedöms

I forskningsartikeln *Hur blir man bäst eller sämst i klassen?* tar Eva Jablonka upp att framgång i matematik inte behöver spegla en "naturlig fallenhet" för ämnet. Elevers framgång kan snarare vara baserad på deras skicklighet att tolka kriterier för vilket kunnande som efterfrågas av läraren och vilka attityder, beteenden och värderingar som är fördelaktiga. Lärarna i forskningsstudien var otydliga med att markera vad som är viktigt för eleven att klara för olika betygsnivåer.

Det betyder att om alla elever ska få samma chans att lyckas, och inte enbart de som är duktiga på att avläsa lärarens koder, måste läraren uppmärksamma eleverna på vad som kommer att bedömas. Om elevernas texter ska bedömas utifrån vilka kunskaper eleverna har om vissa matematiska begrepp och hur dessa används, är det naturligtvis viktigt att alla elever också tänker på att uttrycka sig med hjälp av matematiskt språkbruk i så stor utsträckning som de över huvud taget kan.

---

Eleverna måste ges möjlighet att lära, att visa vad de kan och veta vad de ska visa att de kan.

---



## Till sist ...

Vår erfarenhet från omfattande kontakter med engagerade lärare är att det stora intresset för att arbeta laborativt i matematikundervisningen fortsätter att öka. Idag när allt större fokus läggs på kollegial samverkan ger det möjligheter att diskutera och hjälpas åt att göra det laborativa arbetssättet till en naturlig del i den ordinarie undervisningen. Vi har också sett att den yttre formen av en matematikverkstad är av mindre betydelse till förmån för det inre laborativa arbetet, vilket är positivt.

I Lgr 11 lyfts ord som begrepp, uttrycksformer och förmågor tydligare än tidigare, men de kanske inte alltid har samma innebörd för alla. Den ökande användningen av digital teknik gör också att det är viktigt att slå vakt om att det fysiska och konkreta arbetet med material inte sätts helt på undantag utan att de två formerna kompletterar och stöttar varandra. Syftet med alla olika inslag i matematikundervisningen är självklart att eleverna ska få ett breddat och fördjupat matematikkunnande.

Vi hoppas att det i skrivande stund precis påbörjade Matematiklyftet ger kompetensutveckling både för stunden och att det blir en naturlig del av skolans verksamhet även efter att den statliga insatsen är avslutad. Organisationer runt den kollegiala samverkan bör kunna ge lärarna egen tid att prova material och aktiviteter tillsammans med eleverna. Som vi redan påtalat finns det stöd i forskning för att fortsätta utveckla ett laborativt arbetssätt. Det skulle vara mycket intressant om det genomfördes svensk forskning direkt riktad mot hela den laborativa processen i ett genuint matematikverkstadsarbete.

### *Area med stickor*

Avslutningsvis vill vi återknyta till bokens nya omslagsfoto och en laborativ aktivitet som kan utgöra signum för ett väl genomtänkt laborativt arbetssätt. *Area med stickor* är en intressant och innehållsrik aktivitet vilken engagerar såväl elever i grundskolan och på gymnasiet som vuxna. Aktiviteten lyfter fram det faktum att en given omkrets kan ge ytor med olika areor och den innehåller även en stor portion problemlösning.

*Area med stickor* är också ett bra exempel på en aktivitet där material inledningsvis är nödvändigt för alla, men där ett abstrakt och generellt matematikinnehåll sedan kan utvecklas i olika hög grad beroende på elevernas kunskaper och intresse.

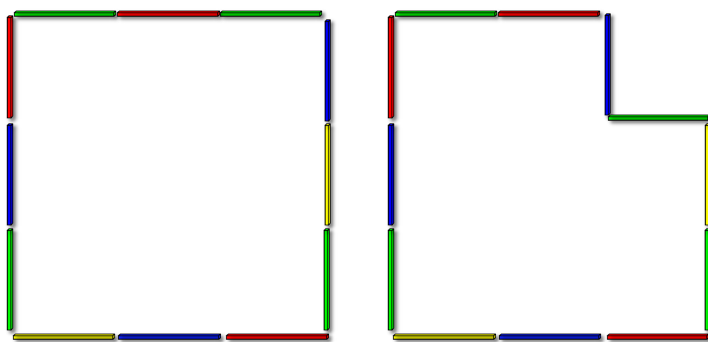
# Area med stickor

## Material

12 stickor, prick- eller rutpapper.

## Månghörningar

Det finns många sätt att lägga månghörningar med 12 stickor så att arean är ett heltal. Här visas två exempel, den första månghörningen har arean 9 ae och den andra arean 8 ae. En areaenhet är här den kvadrat som kan läggas av fyra stickor, dvs sidans längd är en sticka.



## Gör så här

Använd de 12 stickorna till att lägga olika månghörningar med en area på

- 7 areaenheter
- 6 areaenheter
- 5 areaenheter
- 4 areaenheter
- 3 areaenheter.

## Dokumentera

Rita alla lösningar, och även försök till lösningar, på prick- eller rutpapper. Är det till och med möjligt att lägga månghörningar med ännu mindre area?



nämnamn/NCM

[ncm.gu.se/stravorna](http://ncm.gu.se/stravorna)



sidan får kopieras

*Aktiviteten finns i sin helhet på [ncm.gu.se/stravorna](http://ncm.gu.se/stravorna) med såväl läraranvisningar som facit.*

# Referenslitteratur

- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla* (NämnnarenTEMA). NCM, Göteborgs universitet.
- Bergqvist, E. m fl. (2010). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet: grundskolan våren 2009*. NCM, Göteborgs universitet.
- Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment discourses in mathematics classrooms: a multimodal social semiotic study*. Avhandling. Stockholms universitet.
- Bråten, I. (red) (1996). *Vygotskij och pedagogiken*. Lund: Studentlitteratur.
- Clements, D. H. & McMillen, S. (1996). Rethinking concrete manipulatives. *Teaching children mathematics* 2(5), 270–279.
- Comenius, J. A. (1989). *Didactica magna*. Göteborg: Daidalos.
- Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (red) (2000). *Matematik – ett kommunikationsämne* (NämnnarenTEMA). NCM, Göteborgs universitet.
- Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning – med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.
- Hagland, K. (2007). Rita en bild! *Nämnnaren* 2007:3, 27–31.
- Hatch, G. (2004). *What kind of game is algebra?* England: ATM.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.
- Häggström, J. (1996). Förstå algebra. *Nämnnaren* 1996:1, 38–44.
- Häggström, J. m fl. (2012). *Learning study – en guide*. NCM, Göteborgs universitet.
- Jablonka, E. (2011). *Hur blir man bäst eller sämst i klassen?* I Resultatdialog 2011, 63–68. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Johansson B. (1995). *Aurelius räknelära från 1614* (Årsböcker i svensk undervisningshistoria). Uppsala: Föreningen för svensk undervisningshistoria.
- Kilborn, W. (1981). *Vad vet fröken om baskunskaper?* Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1989). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 1. Grundläggande aritmetik*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Avhandling. Göteborgs universitet.
- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.
- Kruse, A. (1910). *Åskådningsmatematik*. Stockholm: Norstedt & Söners förlag.

- Kruse, A. (2010). *Åskådningsmatematik: ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område*. Stockholm: Norstedt.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational studies in mathematics* 12, 235–264. Dordrecht, Holland and Boston, USA: D Reidel Publishing Co.
- Lester, F. (1988). Teaching mathematical problem solving. *Nämnamnaren* 1988:3, 32–43.
- Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. New Jersey: LEA.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok*. NCM, Göteborgs universitet.
- Montessori, M. (1986). *Barndomens gåta*. Stockholm: Bonniers.
- Moyer, P. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational studies in mathematics* 47, 175–197.
- Myndigheten för skolutveckling (2003). *Baskunnande i matematik*. Stockholm: MSU.
- Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik: en studie i påverkansfaktorer i årskurserna 4–7*. Malmö: Institutionen för pedagogik, Lärarhögskolan.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Nationalencyklopedin (1990). Höganäs: Bokförlaget Bra böcker.
- Nationalencyklopedins ordbok. Tillgänglig 20130219 på [www.ne.se](http://www.ne.se)
- Nilsson, G. (2005). *Att äga pi. Praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer* (Göteborg studies in educational sciences 228). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Olsson, I. (2001). Att förebygga matematiksvårigheter. *Spesialpedagogik* 2001:3, 21–26.
- Palm, T. (2002). *The realism of mathematical school tasks: features and consequences*. Avhandling. Umeå: Umeå universitet.
- Pólya, G. (1970). *Problemlösning: en handbok i rationellt tänkande*. Stockholm: Prisma.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.
- Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning: vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.
- Ryve, A. (2006). Vad är kunskap i matematik? *Nämnamnaren* 2006:2, 7–9.
- Skolverket (2013). *PM – Nationella prov i grundskolan våren 2012*. Stockholm: Skolverket. Tillgänglig 20130219 på [www.skolverket.se/publikationer?id=2958](http://www.skolverket.se/publikationer?id=2958)

- Skolverket (2012). *TIMSS 2011: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2011). *Allmänna råd med kommentarer om planering och genomförande av undervisningen*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2011). *Kommentarer till gymnasieskolans ämnesplan i matematik*. Tillgänglig 20130219 på [www.skolverket.se/forskola-och-skola/gymnasieutbildning/amnes-och-laroplaner/mat](http://www.skolverket.se/forskola-och-skola/gymnasieutbildning/amnes-och-laroplaner/mat)
- Skolverket (2011). *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklass och fritidshemmet 2011*. Lgr 11. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2011). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2010). *Läroplan för förskolan Lpfö 98 rev 2010*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2009). *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola? Kunskapsöversikt om betydelsen av olika faktorer: sammanfattande analys*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2004). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003 – Sammanfattande huvudrapport*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2003). *Ämnesprov i svenska och matematik. Skolår 5. Gruppuppgift. Vårterminen 2003 och 2004*. Stockholm: Skolverket.
- SOU 2004:97. *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens* (Matematikdelegationens betänkande). Stockholm: Fritzes.
- Stedøy, I. (2003). *Matematiske Koffert, Ungdomstrinn, Modul 1*. Trondheim: Simplicatus AS.
- Sterner, G. & Lundberg, I. (2002). *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*. NCM, Göteborgs universitet.
- Svenska akademien (2006). *Svenska akademiens ordlista över svenska språket*. Stockholm: Svenska akademien. Tillgänglig 20130219 på [www.svenskaakademien.se/ordlista](http://www.svenskaakademien.se/ordlista)
- Szendrei, J. (1996). *Concrete materials in the classroom. International handbook of mathematics education*. Bishop, A. (red) Kluwer.
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken*. Stockholm: Prisma.
- Thunholm, M. (2004). Meningsfull matematik. *Nämnnaren* 2004:3, 28–31.
- Utbildningsdepartementet (2010). *Förskola i utveckling: bakgrund till ändringar i förskolans läroplan*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Wallström, B. (1992). *Möte med Fröbel*. Lund: Studentlitteratur.
- Wigforss, F. (1952). *Den grundläggande matematikundervisningen*. Stockholm: AB Magnus Bergvalls förlag.