

Kurvformen för en böjd linjal – analytiska, numeriska och experimentella studier, samt visualisering

Anders Johansson

1 Introduktion

Det finns många olika kurvformer i naturen. En av dessa är kurvformen för ett rep eller en kedja som är fastsatt i sina båda ändar och hänger fritt endast påverkad av jordens dragningskraft p.g.a. kedjans egen massa. Denna kurvform benämns "Katenaria" eller "Kedjelinjen" och kan beskrivas av en cosinus hyperbolicus-funktion, se t. ex. Pehrson [1].

En annan kurvform är den som bildas då en linjal trycks ihop från ändarna. Om krafterna som trycker ihop linjalen är tillräckligt små, händer ingenting. Om däremot kraften ökar över ett visst värde (den s.k. knäcklasten), så kan linjalen plötsligt böjas och sedan ger en liten ökning av kraften en stor ökning av utböjningen. Denna typ av stabilitetsproblem kallas knäckning inom hållfasthetsläran. Se t. ex. Dahlberg [2] för en introduktion till hållfasthetslära. I denna artikel studeras fysiken/matematiken bakom fenomenet genom att använda den exakta differentialekvationen och en approximativ metod tillsammans med experimentella undersökningar. Några förslag på hur stoffet kan användas i undervisningen på grundskolan och i gymnasiet redovisas.

Elastica är ett latinskt uttryck som kan översättas med "tunn strimma av elastiskt material". Det matematiska problemet att beskriva kurvformen för en böjd elastica (t. ex. en linjal eller tumstock) löstes av Euler 1744. 1859 upptäckte Kirchoff att samma differentialekvation kan användas för att beskriva rörelsen för en matematisk pendel. En historisk översikt av elastica, dess lösning och tillämpningar ges av Levien [3].

Ett problem som ibland uppstår för snickare är att tumstocken böjer sig. Ett resultat av undersökningen beskriven i denna artikel är att tumstockens mittpunktsutböjning kan beräknas med ett enkelt analytiskt uttryck, om det är känt hur mycket den trycks ihop (axiella förskjutningen).

För att visualisera böjda linjalers kurvformer, har en enkel programvara utvecklats, vilken t. ex. kan användas i undervisning. Den numeriska implementeringen har gjorts i programvaran VPython som körs direkt i en webbläsare och nås på länken: <https://www.glowscript.org>. Programvaran är enkel att använda för nybörjare, men har också en viss potential för mer avancerade beräkningar. Flera grundläggande matematiska verktyg finns inbyggda,

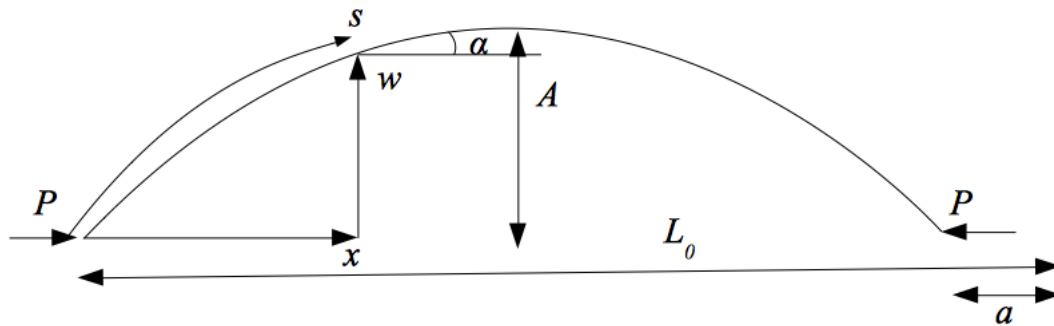
t. ex. fördefinierade funktioner i det använda programspråket Python. VPython används i fysikundervisningen på en del kurser på bl. a. Göteborgs universitet.

Detta är en nedkortad och omarbetad version av artikeln ”The curve shape of a bent ruler – analytical, numerical and experimental studies” tidigare publicerad i tidskriften ”Physics Education”, se referens [4].

2 Analytiska och numeriska studier

2.1 Presentation av den exakta differentialekvationen

I detta avsnitt presenteras den exakta differentialekvationen kortfattat. För en mer detaljerad härledning, se referens [4].



Figur 1: Figur som visar en böjd linjal.

Figur 1 visar en linjal som böjs p.g.a. de axiella krafterna P i varje ände. Avståndskordinaten längs linjalen betecknas s , laterala förskjutningen (utböjningen) betecknas $w(s)$, horisontella avståndet $x(s)$, vinkeln $\alpha(s)$, axiella förskjutningen a , mittpunktens utböjning A och längden L_0 .

Differentialekvationen som beskriver kurvformen för en böjd linjal ges av:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \frac{P}{EI} \sin(\alpha) = 0 \quad (1)$$

EI är böjstyvheten som fås som produkten av elasticitetsmodulen E (materialkonstant) och yttröghetsmomentet I (som beror av geometrin för linjalens tvärsnitt).

Denna differentialekvation kan inte lösas analytiskt på ett enkelt sätt, varför en numerisk lösning görs. När ekvationen lösts och $\alpha(s)$ har bestämts, kan $x(s)$ och $w(s)$ bestämmas

genom att använda sambanden:

$$w(s) = \int_0^s \sin(\alpha(s')) ds' \quad (2)$$

$$x(s) = \int_0^s \cos(\alpha(s')) ds' \quad (3)$$

Dessa båda samband har erhållits genom att studera Figur 1 och inse att $\frac{dw}{ds} = \sin(\alpha)$, $\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha)$ och sedan integrera m.a.p. s .

De båda integralerna (2) och (3) beräknas sedan numeriskt för att erhålla funktionen $w(x)$. För detaljer kring en numerisk lösning av den exakta differentialekvationen, se referens [4].

2.2 Härledning av en lösning tillämpbar för små vinklar

Ekvation (1) kan för små vinklar skrivas om så att det är möjligt att ta fram en analytisk lösning. Genom att studera Figur 1 kan inses att:

$$\frac{dw}{dx} = \tan(\alpha) \approx \alpha \quad (4)$$

$$\frac{dw}{ds} = \sin(\alpha) \approx \alpha \quad (5)$$

där $\tan(\alpha) \approx \alpha$ och $\sin(\alpha) \approx \alpha$ kan motiveras med att vinklarna är små. Genom att sätta in (5) i (1), erhålls:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \frac{P}{EI}\alpha = 0 \quad (6)$$

Används nu ekvation (4), ekvation (5) och derivering m. a. p. x fås:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (7)$$

Detta är 4:e ordningens differentialekvation för en axiellt belastad balk. Denna differentialekvation används inom hållfasthetsläran för att t. ex. dimensionera pelare mot knäckningsbrott.

Ekvationen har den allmänna lösningen:

$$w(x) = A \sin(nx) + B \cos(nx) + Cx + D \quad (8)$$

där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

I vårt fall, så är det fyra randvillkor: $w(0) = w(L_0 - a) = \frac{d^2w}{dx^2}(0) = \frac{d^2w}{dx^2}(L_0 - a) = 0$.

L_0 är linjalens längd och a är den (kända) axiella förskjutningen. Det första randvillkoren indikerar att utböjningen är noll i elasticans (linjalens) ändar och de andra randvillkoren att det inte är några böjmoment applicerade i ändarna (vilket i hållfasthetslära benämns fritt upplagd balk).

Efter lite analytiska beräkningar erhålls följande ekvation:

$$A \sin(n(L_0 - a)) = 0 \quad (9)$$

vilken har den icke-triviala lösningen:

$$n = \frac{m\pi}{L_0 - a} \quad (10)$$

Om $m = 1$ fås följande lösning:

$$w(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L_0 - a}\right) \quad (11)$$

För stabilitetsproblem i hållfasthetslära, försummas ofta den axiella förskjutningen, vilket leder till randvillkoren: $w(0) = w(L_0) = \frac{d^2w}{dx^2}(0) = \frac{d^2w}{dx^2}(L_0) = 0$, utböjningen $w(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L_0}\right)$ och den kritiska lasten $P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{L_0^2}$. Detta benämns ofta Euler:s andra knäckningsfall för en fritt upplagd balk. För krafter $P < P_{kr}$, uppstår ingen utböjning för linjalen som förblir rak.

2.3 Härledning av ett enkelt approximativt uttryck för A

En ekvation för att bestämma linjalens mittutböjning A fås genom att använda antagandet att längden L_0 på linjalen är konstant. Längden på linjalen kan bestämmas med det allmänna uttrycket för en kurvas längd:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \quad (12)$$

Kombineras nu ekvation (11) och ekvation (12) erhålls följande ekvation för att bestämma A , då L_0 och a är kända:

$$f(A) = \int_0^{L_0-a} \sqrt{1 + A^2 \left(\frac{\pi}{L_0-a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L_0-a} \right)} dx - L_0 = 0 \quad (13)$$

För att få ett enklare uttryck att lösa, används Maclaurinutveckling av integranden:

$$\sqrt{1 + \xi^2} \approx 1 + \frac{\xi^2}{2} + \dots \quad (14)$$

vilket ger:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0-a} \sqrt{1 + A^2 \left(\frac{\pi}{L_0-a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L_0-a} \right)} dx &\approx \\ \int_0^{L_0-a} \left(1 + \frac{1}{2} A^2 \left(\frac{\pi}{L_0-a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L_0-a} \right) \right) dx & \end{aligned}$$

Efter viss förenkling erhålls följande uttryck:

$$L_0 - a + \frac{1}{2} \frac{A^2 \pi^2}{(L_0 - a)^2} \int_0^{L_0-a} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L_0 - a} \right) dx \quad (15)$$

För att lösa integralen, används sedan det trigonometriska sambandet:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (16)$$

Detta ger slutligen:

$$\int_0^{L_0-a} \sqrt{1 + A^2 \left(\frac{\pi}{L_0-a} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L_0-a} \right)} dx \approx L_0 - a + \frac{1}{4} \frac{A^2 \pi^2}{L_0 - a} \quad (17)$$

Ekvation (13) kan då skrivas om som:

$$L_0 - a + \frac{1}{4} \frac{A^2 \pi^2}{L_0 - a} - L_0 = 0 \quad (18)$$

vilket ger:

$$A_{Analytisk} = \frac{2}{\pi} \sqrt{L_0 a - a^2} \quad (19)$$

där den negativa roten förkastas eftersom A är ett avstånd. För små värden på a , gäller att $a^2 \ll L_0 a$ och uttrycket kan förenklas till:

$$A_{Analytisk} = \frac{2}{\pi} \sqrt{L_0 a} \quad (20)$$

Kombineras ekvationerna (11) och (20) så fås följande approximativa uttryck tillämbart för små axiella förskjutningar:

$$w_{Analytisk}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{L_0 a} \sin\left(\frac{\pi x}{L_0 - a}\right) \quad (21)$$

2.4 Sammanfattning

Sammanfattningsvis kan kurvformen för en böjd linjal utsatt för axiell belastning erhållas på ett par olika sätt:

- Funktionen $\alpha(s)$ erhålls genom en numerisk lösning av den exakta differentialekvationen, $\frac{d^2 \alpha}{ds^2} + \frac{P}{EI} \sin(\alpha) = 0$. Kurvformen $w_{Numerisk}(x)$ bestäms sedan genom numerisk beräkning av integralerna $w_{Numerisk}(s) = \int_0^s \sin(\alpha(s')) ds'$ och $x(s) = \int_0^s \cos(\alpha(s')) ds'$
- Ett approximativt analytiskt uttryck tillämbart för små axiella förskjutningar ges av: $w_{Analytisk}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{L_0 a} \sin\left(\frac{\pi x}{L_0 - a}\right)$.

3 Experimentella studier

Två experimentella undersökningar genomfördes för att jämföra teoretiska studier med experimentella data.

3.1 Mittpunktens utböjning för tumstock av trä

För att experimentellt undersöka inverkan av tumstockens ena ändpunkts axiella förskjutning på mittpunktens utböjning, gjordes några mätningar med en två meter lång tumstock. Mätarrangemanget illustreras i Figur 2. Olika värden valdes för den vänstra ändens axiella förskjutning och mittpunktens utböjning mättes. Det noterades och kompenseras för att mittpunkten förflyttades åt höger under försöket när högre värden för den vänstra ändens axiella förskjutning valdes. För att undvika inverkan av gravitation, böjdes linjalen horisontellt längs golvet.



Figur 2: Experiment för att studera inverkan av vänstra ändens förskjutning på mittpunktsutböjningen för en tumstock.

3.2 Kurvform för plastlinjal

Ett annat experiment, som är enkelt att genomföra för elever i en klass, utfördes. En 30 cm plastlinjal böjdes t. ex. mellan en vägg och en stabil och hållfast hög av böcker på ett A4-papper med 5 mm rutor, se Figur 3. Kurvformen för den böjda linjalen ritades sedan upp på pappret och mätpunkter lästes av som koordinater (x, y) på den uppritade kurvan, där ett koordinatsystem med origo i linjalens vänstra ändpunkt definierades. Värden för linjalens ursprungslängd L_0 och den axiella förskjutningen a mättes också.



Figur 3: Experiment för att studera kurvformen för en plastlinjal. Linjalen böjs mellan en vägg och en hög med stabila och hållfasta böcker.

4 Visualisering av resultatet i VPython

Ett par verktyg för att visualisera en böjd tumstock resp. en böjd linjal utvecklades i VPython. Tanken med dessa verktyg är att demonstrera vilka möjligheter som ges inom ramen för VPython. Elever ska även själva enkelt kunna jämföra och verifiera experimentella resultat med simuleringar och få en bra introduktion till användning av numeriska hjälpmedel. Källkoden är tillgänglig, vilket möjliggör för programmeringsintresserade elever att själva modifiera enligt egna önskemål, t. ex. att ändra linjalens längd. Det bör dock poängteras att endast de förenklade analytiska uttrycken, ekvation (20) och ekvation (21) har implementerats, varför endast visualiseringen gäller för små axiella förskjutningar.

5 Resultat och diskussion

I detta avsnitt presenteras några numeriska och experimentella resultat grafiskt.

Figur 4 till Figur 8 visar beräknade resultat för den ihoptryckta tumstocken för axiella förskjutningar mellan 6.6 cm och 221 cm. Från figurerna ses att den analytiska lösningen fungerar bra för små axiella förskjutningar, emedan mittpunktens utböjning överskattas för stora axiella förskjutningar. Den sinusformade lösningen fungerar inte alls för fallet där den axiella förskjutningen är större än tumstockens initiella längd och elastican slår knut på sig själv, se Figur 8.

Mittpunktsutböjningen (A) som funktion av ändpunktens axiella förskjutning (a) presenteras i Figur 9 och Figur 10. I Figur 9 är en jämförelse med mätdata inkluderad, men i Figur 10 presenteras endast beräknade resultat. Av Figur 9 framgår att det är en god överensstämmelse mellan mätdata och beräknade värden för små axiella förskjutningar.

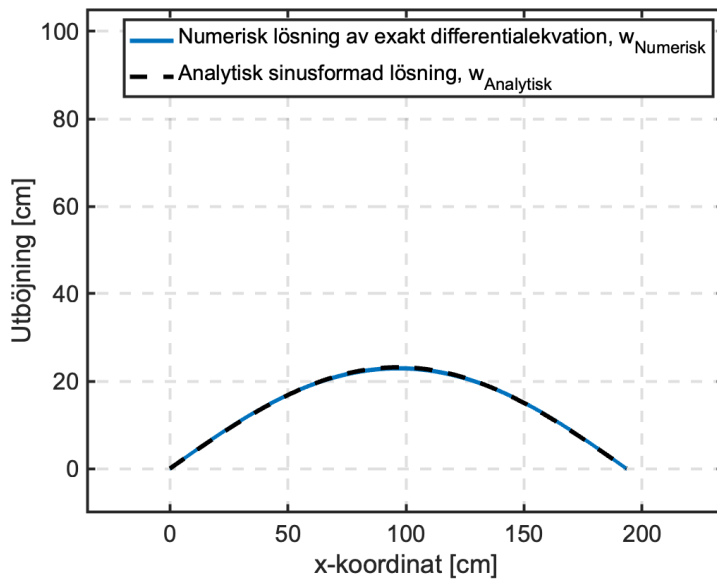
En kurvanpassning med hjälp av minstakvadratmetoden till en funktion av typen $A(a) = Ca^D$ gav värdena $C = 0.85\text{m}^{0.5}$ och $D = 0.48$ för mätdata presenterade i Figur 9. Detta kan jämföras med ekvation (20), vilken för $L_0 = 2$ m kan skrivas $A_{Analytisk} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}a^{0.5} \approx 0.90a^{0.5}$, när SI-enheter används.

Figur 11 visar en jämförelse mellan experimentella data för den böjda plastlinjalen och den approximativa analytiska lösningen $w_{Analytisk}(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{L_0a}\sin\left(\frac{\pi x}{L_0-a}\right)$. En god överensstämmelse visas för de uppmätta mätvärdena $L_0 = 313$ mm och $a = 19$ mm. En kurvanpassning med minstakvadratmetoden till en funktion av typen $w(x) = C_1 \sin(C_2x)$ gav värdena $C_1 = 0.052$ m och $C_2 = 10.72$ radianer/m vilket motsvarar $L_{0Exp} = 314$ mm och $a_{Exp} = 21$ mm.

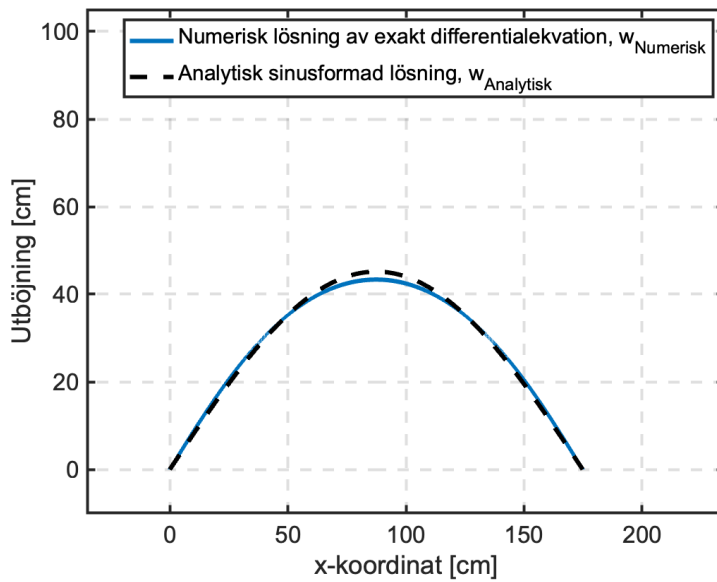
I Figur 12 och Figur 13 visas bilder på ett utvecklat VPython-program för att visualisera en böjd tumstock. Figur 14 visar ett liknande program för att visualisera en böjd linjal. Simuleringarna kan nås på:

Tumstock: https://www.glowscript.org/#/user/Anders_Johansson/folder/LinjalensMatematik/program/TumStock

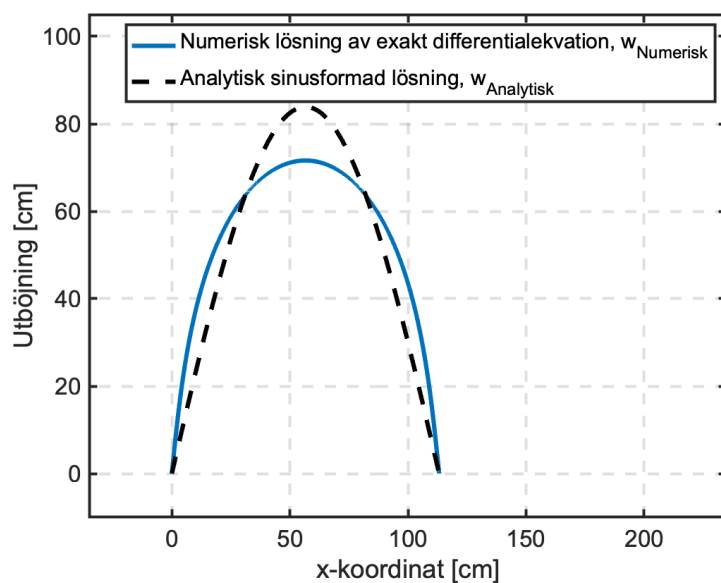
Plastlinjal: https://www.glowscript.org/#/user/Anders_Johansson/folder/LinjalensMatematik/program/PlastLinjal



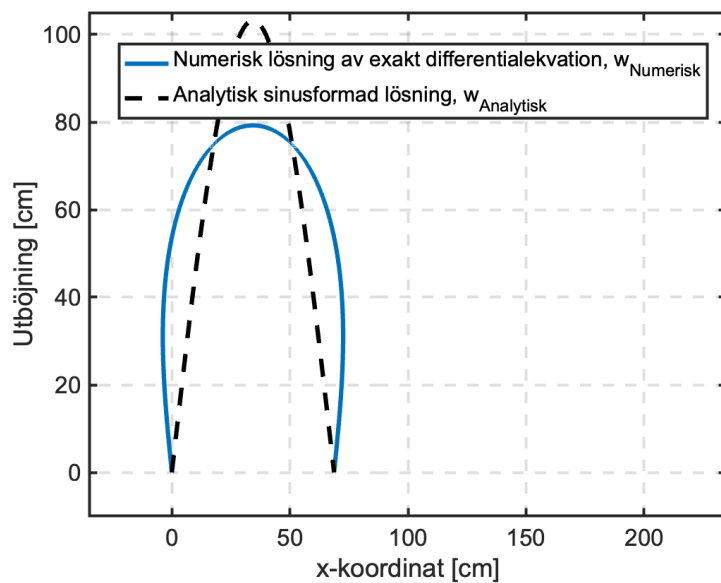
Figur 4: Ihoptryckt trätumstock med en axiell förskjutning 6.6 cm.



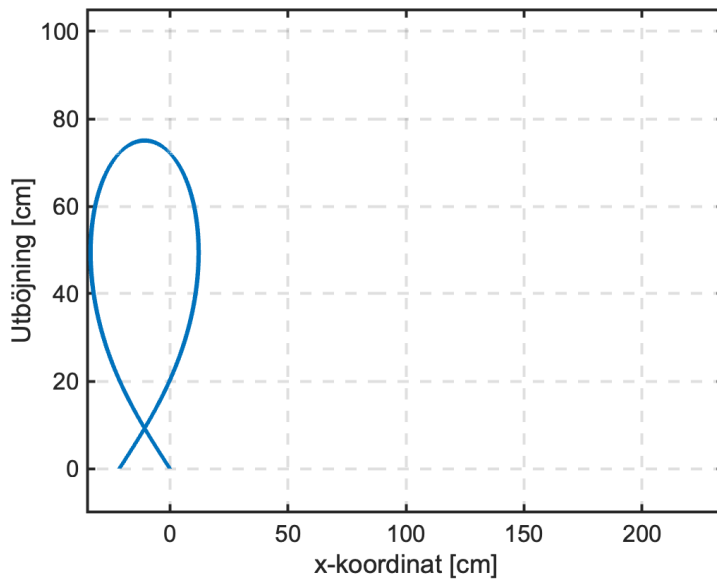
Figur 5: Ihoptryckt trätumstock med en axiell förskjutning 25 cm.



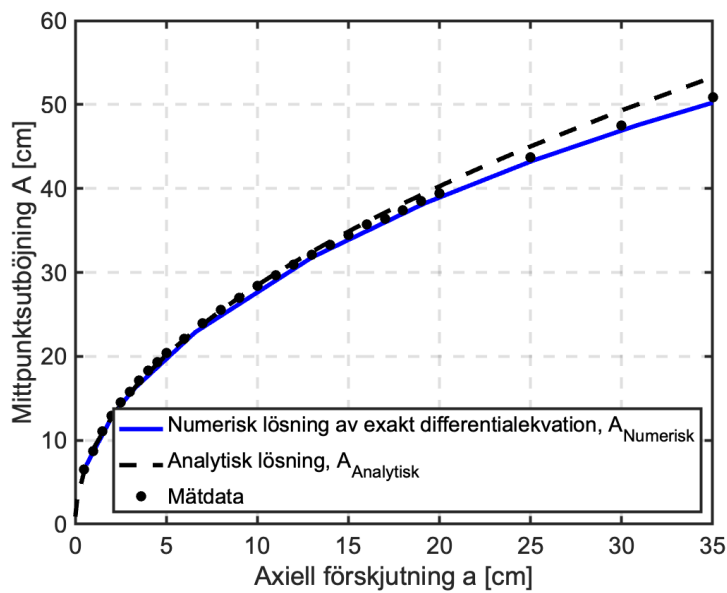
Figur 6: Ihoptryckt trätumstock med en axiell förskjutning 87 cm.



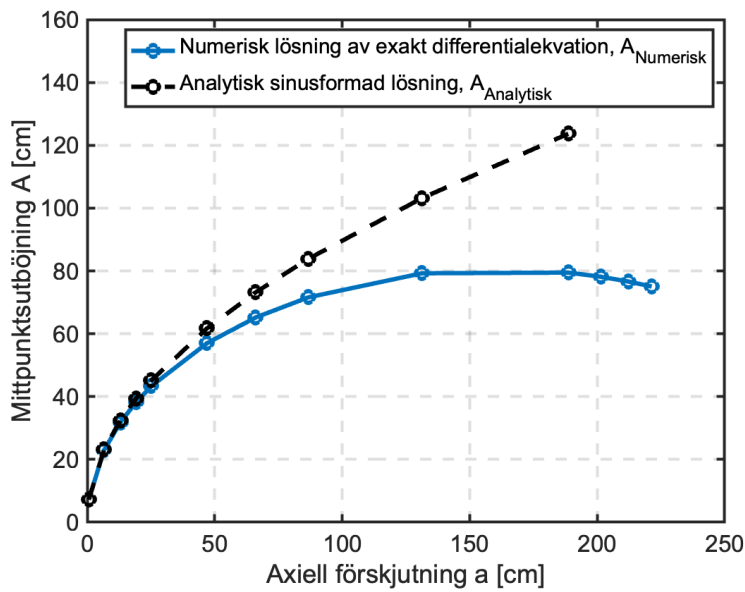
Figur 7: Ihoptryckt trätumstock med en axiell förskjutning 131 cm.



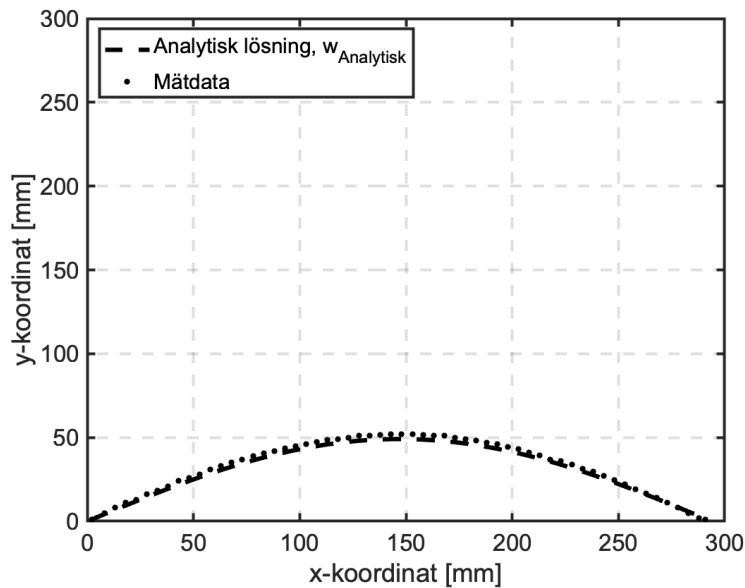
Figur 8: Ihoptryckt trätumstock med en axiell förskjutning 221 cm. Endast numerisk lösning av den exakta differentialekvationen, $w_{Numerisk}$ visas.



Figur 9: Mittpunktens utböjning (A) som funktion av axiell förskjutning (a) för små axiella förskjutningar för trätumstock. Jämförelse mot mätdata.



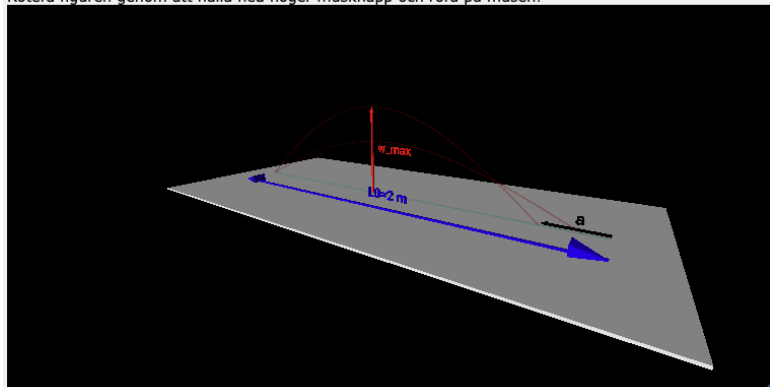
Figur 10: Mittpunktens utböjning (A) som funktion av axiell förskjutning (a) för stora axiella förskjutningar för trätumstock.



Figur 11: Ihoptryckt plastlinjal vid en axiell förskjutning 19 mm. Jämförelse mellan analytisk lösning $w_{\text{Analytisk}}$ och mätdata.

Approximativ kurvform för en böjd tumstock

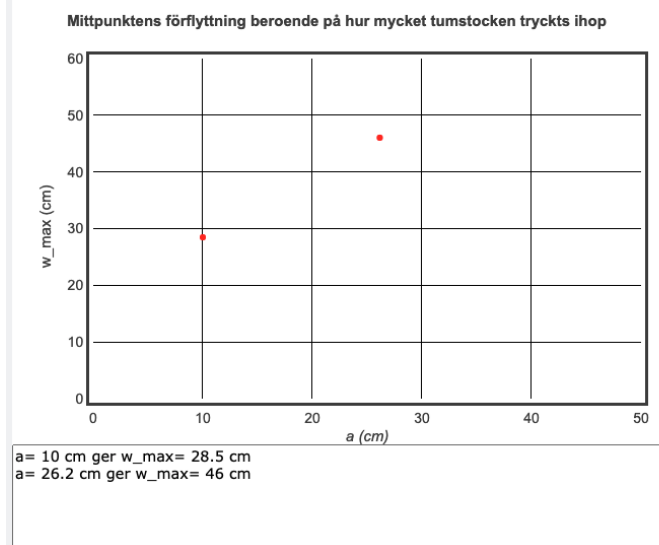
Rotera figuren genom att hålla ned höger musknapp och röra på musen!



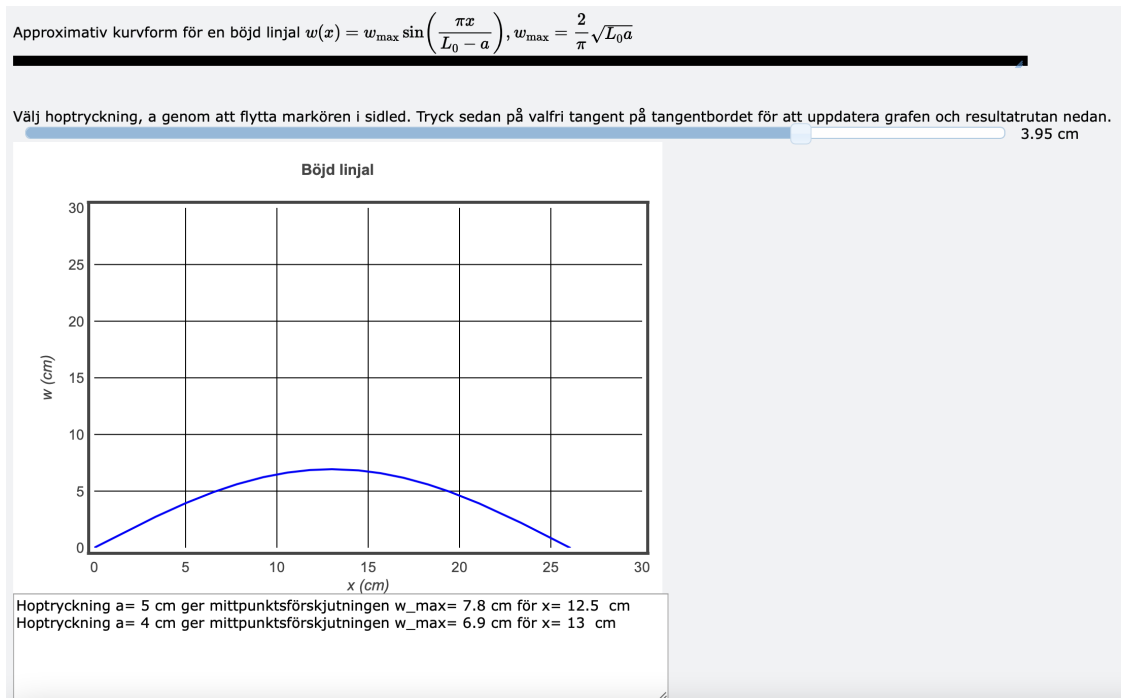
Välj hoptryckning genom att flytta markören i sidled. Tryck sedan på valfri tangent på tangentbordet för att uppdatera grafen och resultatrutan nedan. 26.15 cm

Figur 12: VPython-simulering av böjd tumstock. Önskad axiell förskjutning kan ställas in med hjälp av glidaren.

Välj hoptryckning genom att flytta markören i sidled. Tryck sedan på valfri tangent på tangentbordet för att uppdatera grafen och resultatrutan nedan. 26.15 cm



Figur 13: VPython-simulering av böjd tumstock. Önskad axiell förskjutning kan ställas in med hjälp av glidaren.



Figur 14: VPython-simulering av böjd plastlinjal. Önskad axiell förskjutning kan ställas in med hjälp av glidaren.

6 Slutsatser

Den exakta differentialekvationen för en böjd linjal redovisades och löstes numeriskt. Även en approximativ analytisk sinusformad kurvform togs fram baserad på en 4:e ordningens approximativ differentialekvation tillämpbar för små vinklar. En ekvation för att bestämma linjalens mittpunktsutböjning härleddes baserat på antagandet att längden på linjalen är konstant. Ekvationen löstes approximativt algebraiskt och ett enkelt analytiskt uttryck togs fram.

Ett experimentellt försök gjordes med en två meter lång tumstock. Mittpunktens utböjning mättes för flera värden på den axiella förskjutningen. God överensstämmelse mellan mätdata och beräknade värden erhöles för små axiella förskjutningar.

Även ett annat experiment lämpligt för att genomföras av elever i en klass presenterades. I experimentet böjdes en 30 cm plastlinjal. En god överensstämmelse mellan mätdata och det förenklade analytiska uttrycket erhöles för en axiell förskjutning av 19 mm.

För elever i grundskolan och på gymnasiet kan en del av den presenterade matematiken vara något svår att förstå, varför istället de experimentella undersökningarna, kanske i kombination med de utvecklade visualiseringsverktygen i VPython, rekommenderas. Eleverna kan utföra mätserier och t. ex. lägga in dessa i ett kalkylblad. Om några data saknas, kan räta linjens funktion ($y = kx + m$) användas för linjär interpolation mellan kända mätpunkter. Sedan kan kurvanpassning med minstakvadratmetoden genomföras. Ett annat alternativ skulle kunna vara att använda uttrycket $A_{Analytisk} = \frac{2}{\pi}\sqrt{L_0a}$ eller $w_{Analytisk}(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{L_0a} \sin\left(\frac{\pi x}{L_0-a}\right)$.

Den analytiska härledningen av uttrycket $A_{Analytisk} = \frac{2}{\pi}\sqrt{L_0a}$ skulle kunna användas inom ramen för t. ex. matematik specialisering, kanske i kombination med en experimentell undersökning. Sålunda kan problemen och metoderna presenterade i denna artikel vara användbara inom undervisning på olika nivåer.

Det förenklade analytiska uttrycket $A_{Analytisk} = \frac{2}{\pi}\sqrt{L_0a}$ kan användas som en tumregel för snickare som upplever problem med böjda tumstockar.

Den enkla programvara som utvecklats i VPython för att visualisera böjda linjalers kurvformer kan användas i undervisning eller som en illustration av den ovan nämnda enkla tumregeln. VPython kan nås på länken: <https://www.glowscript.org> och är enkel att använda för nybörjare, men har också en viss potential för mer avancerade beräkningar.

Sammanfattningsvis, så är problemet med att finna kurvformen för en böjd linjal ett exempel på ett fascinerande, vid första anblicken enkelt problem, vilket dock kräver ganska avancerade analytiska och numeriska metoder för att lösas med god noggrannhet. Å andra sidan kan ett enkelt uttryck tas fram genom t. ex. mätningar och minstakvadratkurvanpassning. Genom att lösa problemet fås även en del insikter i stabilitetsproblem och knäckning, där en axiell last över en viss kritisk nivå (knäcklast) krävs för att få

linjalen att böja sig, men en liten ökning av den axiella kraften över detta kritiska värde, ger en stor ökning av utböjningen.

7 Tack

Denna artikel är till stor del baserad på en artikel ursprungligen publicerad på engelska i tidskriften *Physics Education* (The curve shape of a bent ruler - analytical, numerical and experimental studies, *Phys. Ed.* 54 (3) 2019), © IOP Publishing Ltd. Adapted with permission. All rights reserved. This adaptation has not been verified by IOP Publishing.

Förutom de personer som omnämns i den ursprungliga engelska artikeln, önskar författaren även rikta ett tack till Ann-Marie Pendrill (Professor Emerita vid Göteborgs universitet och Lunds universitet) för inspiration och uppmuntran till att skriva denna svenska version av artikeln. Bertil Nilsson (Universitetslektor i tillämpad matematik, Högskolan i Halmstad) tackas för matematisk och fysikalisk granskning. Några tacksamhetstankar riktas även till Carlo Ruberto (Universitetslektor i fysik, Göteborgs universitet) för en bra introduktion till VPython inom ramen för kursen ”Fortbildning inom programmering för fysiklärare A, LFY081”, VT2020.

Referenser

- [1] I. Pehrson. Katenaria – kedjelinjen. *Nämnamnaren*, 4, 2014.
- [2] T. Dahlberg. *Teknisk hållfasthetslära*. Studentlitteratur, Lund, Sweden, second edition, 2001.
- [3] R. Levien. The elastica: a mathematical history. Internal Report Technical Report No. UCB/EECS-2008-103, Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, Berkeley, California, 2008.
- [4] A. Johansson. The curve shape of a bent ruler – analytical, numerical and experimental studies. *Physics Education*, 54(3), 2019.