

# Chanser i sport och Pascals summatriangel

Med lite matematik går det att förstå och kontrollera hur vettiga olika spel på sportresultat är. Det visar sig att i flera sporter gömmer sig en heltalstriangel som är nära besläktad med Pascals triangel. Här handlar det inte om tennis men vi har ändå en fortsättning på *En tennispågående* i Nämnaren 2019:4.

**E**lever i både grundskolan och gymnasiet kan undersöka chanser för vinst i olika sporter. I det exempel som ges i denna artikel uppenbarar sig en triangel av heltal där eleverna kan se likheter med Pascals triangel. Men innan vi kommer så långt ska vi först se på hur poängräkning och korandet av vinnare sker på helt olika sätt i olika sporter.

I fotboll, handboll och ishockey vinner det lag som gör flest mål och man spelar en begränsad tid. Ingen vet i förväg hur många mål det blir. I konståkning och simhopp får de tävlande poäng av domare efter utförd tidsbegränsad prestation. I skidåkning, simning, löpning och liknande sporter ska de tävlande fullfölja något på så kort tid som möjligt.

I många andra sporter vinner den som vunnit ett givet antal bollar. När det skett är matchen slut. I dessa sporter finns ingen tidsbegränsning och enskilda bollar kan ta mycket lång tid. Exempel på sådana sporter är bordtennis och squash. Här vinner man ett set när man har 11 poäng. I tennis krävs 4 poäng (15, 30, 40 och en till) för att vinna ett gem. I badminton är det först till 21 bollar som vinner ett set. I dessa fyra racketsporter måste den tävlande vinna ett set med minst två poäng. Vid 11-10 i bordtennis är setet ännu inte slut.

Det måste inte vara bollar som ska vinnas. I snooker, en form av biljard, består en match av att vinna exempelvis 10 bord, eller 'frames' som man säger på engelska. Den som först har vunnit 10 frames är vinnare. Här behöver inte differensen till motståndaren vara minst 2. När det står 9-9 börjar matchens absolut sista frame.

## Att räkna baklänges

För att undersöka chanser för vinst i olika sporter kommer jag att räkna baklänges. Låt oss tänka oss att personerna A och B spelar. Vi tittar på matchen A-B och jag räknar antalet bollar som är kvar till vinst.

Om det står 1-2 så menas med det att A vinner setet om A vinner en boll till, men B behöver vinna 2 bollar. Siffrorna anger hur många bollar man saknar, som man behöver vinna ytterligare. Om det i snooker står 9-9 och man går till 10, så är det 1-1 med denna baklängesnotation. Båda spelarna behöver bara

ett frame till. Med den notationen spelar det ingen roll vilket antal man behöver för att vinna. Inte heller vilken sport det handlar om. Det är också betydligt lättare att räkna.

Låt oss först hålla oss till snookerfallet som är något enklare. Vi använder ett enkelt grundantagande baserat på att A och B är jämna spelare eller lag och att vi inte vet något om psykologi eller speciella förhållanden. Då är det naturligt att anta att vid varje frame är det 50 % chans att A vinner och följaktligen 50 % chans att B vinner det.

Så när det står 1-1 är sannolikheten  $1/2$  att vinna för både A och B. När det står 1-2 är sannolikheten  $3/4$  att A vinner och  $1/4$  att B vinner. En motivering för det är att om A vinner nästa boll så har A vunnit och då är sannolikheten 1 att A vinner. Om A förlorar är det 1-1 och A har 50 % chans till. Vi får då sannolikheten

$$1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,75.$$

Vad vi gjorde här är en allmän princip. När det står  $m-n$ , exempelvis 5-3, är de två följande möjligheterna  $(m-1)-n$  och  $m-(n-1)$ , exempelvis 4-3 och 5-2. Inget annat kan hända. Båda har sannolikhet 0,5. Vi kan beräkna sannolikheten  $p(m, n)$  att A vinner när det står  $m-n$  från dessa båda fall:

$$p(m, n) = p(m-1, n) \cdot 0,5 + p(m, n-1) \cdot 0,5.$$

Detta samband

$$p(m, n) = (p(m-1, n) + p(m, n-1)) / 2$$

är väldigt likt Pascals triangel, där man ju ska addera de två talen ovanför.

### *Pascals triangel*

Pascals triangel kan man få genom att starta med en serie med bara nollor och en etta, och sedan lägga till summorna i mellanrummen:

0 0 0 0 1 0 0 0 0

ger

0 0 0 0 1 0 0 0 0  
0 0 0 1 1 0 0 0

och i nästa steg

0 0 0 0 1 0 0 0 0  
0 0 0 1 1 0 0 0  
0 0 0 1 2 1 0 0 0

och nästa

```
0 0 0 0 1 0 0 0 0
  0 0 0 1 1 0 0 0
    0 0 1 2 1 0 0 0
      0 0 1 3 3 1 0 0
```

Tar man bort nollorna har vi Pascals berömda triangel, som innehåller alla binomialtal (även lite otympligt kallade "binomialkoefficienter").

### *I vårt fall*

Den enda skillnaden i algoritmen mellan Pascals triangel och vårt fall är att vi ska dela med 2 också för att bilda ett medelvärde. På nästa rad får man alltid ytterligare en faktor 2 i nämnaren.

Men låt oss skippa dessa halvor och fjärdedelar ett tag, vi tar med dem senare. Från  $1/2$ ,  $3/4$  och  $1/4$  som vi har hittills, får vi 1 i toppen och därefter 3 och 1 i nästa rad.

```
  1
 3 1
```

Andra raden i Pascals triangel är 1 1, men i vårt nya fall fick vi 3 1. Så vår tävlingssituation beskrivs inte av Pascals triangel. Ändå är det samma summaregel som gäller: addera de två ovanstående talen. Hur kan det då bli annorlunda? Jo, skillnaden är startvärdena. I vårt fall ska vi faktiskt starta med en serie av många ettor, följt av bara nollor. Det är skillnaden! (Varför vi gör så återkommer jag till.) Inte bara en etta som för Pascals triangel. Låt oss testa det och summera på samma sätt, men starta med 111110000 i stället. Det ger

```
1 1 1 1 1 0 0 0 0
 2 2 2 2 1 0 0 0   (första raden, halvor)
 4 4 4 4 3 1 0 0 0   (andra raden, fjärdedelar)
 8 8 8 7 4 1 0 0   (tredje raden, åttondelar)
```

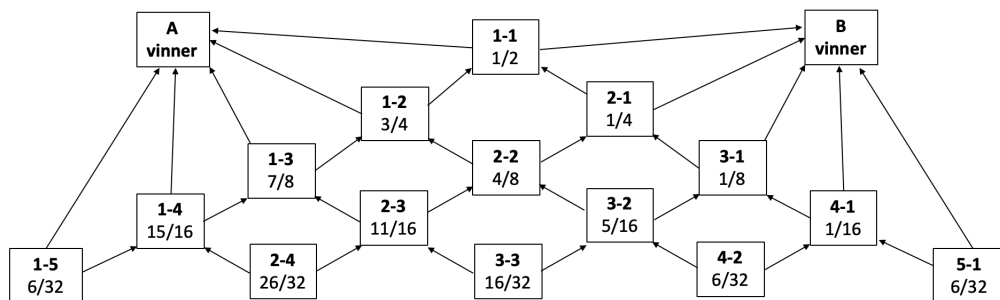
Andra raden är i alla fall rätt med vad vi fått tidigare: 3 och 1. Om detta stämmer får vi från denna tabell att sannolikheterna att A vinner vid 1-3 är  $7/8$ , vid 2-2 är  $4/8$  och 3-1 är  $1/8$ . Här tog jag med halvorna igen, eftersom vi gick över till sannolikheter.

Det är mycket lätt att fortsätta triangeln på Pascals sätt genom att summera de två ovanstående:

```
  1 0
  2 1 0
  4 3 1 0
  8 7 4 1 0
 16 15 11 5 1 0
 32 31 26 16 6 1 0
```

Denna triangel av heltal kallar jag *Pascals summatriangel* därför att den, som vi strax ska se, består av summor från Pascals triangel. Jag tänker mig här konventionen att fortsättningen på en rad till höger respektive till vänster får man genom att kopiera det sista elementet så många gånger som man behöver.

Talen i triangelns vänsterkant anger även nämnaren vi ska dividera med för att få sannolikheterna. Vi kan illustrera situationen med en graf, som anger poängställning och sannolikhet i varje ruta. Pilarna anger till vilka två rutor en boll kan leda till.



Men hur vet vi att allt detta kommer från raden 1 1 1 1 0 0 0 0? Jo, vi kan gå baklänges. Vi räknade ut toppen, som var  $1/2$  och sedan  $3/4$  och  $1/4$  och som gav oss 1 och efter det 3 och 1. Låt oss lägga till nollor till höger och fråga oss vad  $x, y$  och  $z$  nedan bör vara om vi följer samma regel att summera de två talen över.

$$\begin{array}{r} x \ y \ 0 \\ z \ 1 \ 0 \\ 3 \ 1 \ 0 \end{array}$$

Vi får  $y+0=1$  med den vanliga regeln, så  $y=1$ . Vi får också  $z+1=3$ , så  $z=2$ . Härnäst får vi  $x+1=2$ , som ger  $x=1$ . Vi kan fortsätta på detta sätt eftersom sannolikheten att A vinner vid 1-3 är  $7/8$ , vid 1-4 är  $15/16$  och så vidare. Genom att fortsätta så kan man nysta upp raden 1 1 1 1 0 0 0 0 överst.

## Pascals triangel och Pascals summatriangel

Men hur är talen i summatriangeln relaterade till binomialtalen? Det är ett enkelt samband och svaret är att vart och ett av dem är summan av binomialtal. Man kan konstruera denna triangel direkt från Pascals triangel genom att ersätta ett tal på en viss plats med summan av talet och alla andra tal på samma rad till höger om det. Rad tre i Pascals triangel är 1 2 1 och ger vid summering på detta sätt 4 3 1. Rad fyra är 1 3 3 1 och ger 8 7 4 1.

Om vi nu tar med halvor och fjärdedelar också, så ger detta en formel för sannolikheten för A att vinna vid ställningen  $m-n$ :

$$p(m, n) = 2^{1-m-n} \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k}$$

Men hur kan vi bevisa att vi får summor av binomialtal? Det kan göras formellt med induktionsbevis, men jag tänker använda ett mer geometriskt sätt. Ett värde i Pascals triangel talar nämligen om något konkret geometriskt om triangeln. Värdet på en viss plats är faktiskt antalet olika vägar som finns från ettan i toppen av triangeln till den platsen. Det måste vara kortaste väg och handlar om hur många kortaste vägar det finns, räknat i antal steg.

Till varje etta på kanten finns mycket riktigt bara en väg. Till varje värde i en rad intill ettorna, till exempel till en fyra, kan man svänga in till den raden på fyra olika ställen, alltså fyra vägar. Från talet 6 finns det exakt sex olika vägar till topp-ettan som använder ett minimalt antal steg.

### Det generella fallet

Låt oss visa detta generellt. I resonemanget behöver vi att exempelvis  $\binom{2}{3} = 0$ . Nämligen att  $\binom{n}{k} = 0$  om  $k > n$ . Definitionen av binomialtal är på hur många sätt man kan välja en grupp av  $k$  personer om det finns  $n$  personer att välja på, och det finns exakt 0 sätt att välja tre personer ur en grupp av två. Låt ossitera sambandet

$$\binom{n}{k} = 1 \binom{n-1}{k-1} + 1 \binom{n-1}{k}.$$

Här har jag skrivit ut ettorna. Varför? Jo, de anger antalet sätt att gå från  $\binom{n}{k}$  till var och en av de andra. Sätt nu in

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}$$

och

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$

Det ger

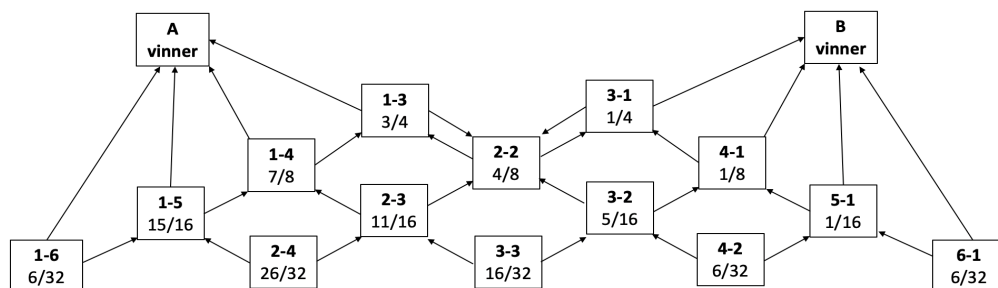
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = 1 \binom{n-2}{k-2} + 2 \binom{n-2}{k-1} + 1 \binom{n-2}{k}.$$

Nu har vi gått två steg uppåt från  $\binom{n}{k}$ , som gav koefficienter 1 2 1. Tvåan i mitten betyder att vi har använt två kopior av talet  $\binom{n-2}{k-1}$  för att beräkna  $\binom{n}{k}$ . Det betyder också att det finns exakt två sätt att gå från  $\binom{n-2}{k-1}$  till  $\binom{n}{k}$ . Vid nästa steg blir koefficienterna 1 3 3 1, svarande mot antal vägar till de fyra platserna.

Så koefficienterna som uppträder till binomialtalen är också binomialtal. De noterar även antalet vägar. När man till slut hamnar på första raden är alla koefficienter som bekant noll, utom en enda. Den enda är ett, och har faktor  $\binom{n}{k}$ . Detta kan tolkas som att topp-ettan bidrar  $\binom{n}{k}$  gånger till värdet som står på denna plats och svarar mot varje möjlig väg man kan gå dit. Men om vi nu har med alla ettor till vänster om topp-ettan också, får vi med även de binomialtalen i summan. Klart!

## Racketsporter

Om man som i racketsporterna kräver en skillnad på minst två för att vinna försvinner rutan 1-1. Dessutom blir 2-1 till 3-1 och 1-2 blir till 1-3. Det beror på att om en spelare vid 2-2 vinner en boll så kommer motståndaren samtidigt en boll längre från att vinna. Från 2-2 blir det 1-3 eller 3-1, inte 1-2 eller 2-1.



På samma sätt: från 2-3 blir det antingen 1-4 (inte 1-3) eller 2-2. Man kan i figuren räkna antalet rutor från 1-4 till "B vinner" genom att följa pilarna och det är mycket riktigt fyra steg. Detta ger samma triangel som tidigare, men poängställningarna som svarar mot värdena på triangelns kanter är inte samma som i det förra fallet.

## Matematiken, verkligheten och eleverna

Det är naturligtvis intressant att jämföra dessa sannolikheter med data från olika sporter och det kan vara en intressant uppgift för sportintresserade elever i grundskolans senare del eller på gymnasiet. Att förklara systematiska avvikelser kan säga en del om sporten. Både sådana som är allmänna för en sport och vissa spelares speciella avvikelser. Och det är förstås möjligt att genomföra samma analys med en annan vinstsannolikhet för spelare A mot B än 50 %.

Jag har tyvärr inga referenser för "Pascals summatriangel" och har inte hittat denna triangel i någon publikation. Men en fantastisk bok om diskret matematik, med ett långt kapitel om enbart binomialtal, är *Concrete mathematics* av Knuth, Patashnik och Graham. Där beräknas många olika summor av binomialtal till explicita formler. Författarna noterar dock att för en delsumma, som den som den som dök upp i denna artikel, finns ingen explicit formel.

### LITTERATUR

- Knuth, D., Patashnik, O. & Graham, R. (1994). *Concrete mathematics: A foundation for computer science*. Addison-Wesley.
- Lennerstad, H. (2019). *En tennissäta*. Nämnaren 2019:4.