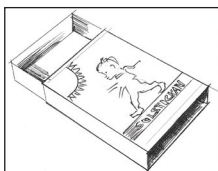


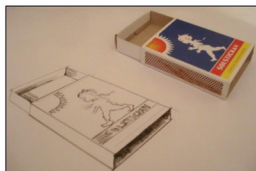
Nedslag i periferin

Inom matematiken, precis som inom många andra kunskapsfält, ryms ett flertal områden och discipliner. Vissa av dessa har större betydelse än andra. På följande sidor kommer vi dock inte att intressera oss för några av de centrala delarna utan istället göra en del nedslag ute i periferin.

Jag tar fram en tändsticksask och ritar av den. Teckningen blir tvådimensionell, trots att den är ritad i perspektiv; se figur 1a. Men placerar jag asken intill teckningen, blir det som jag nu betraktar, på nytt tredimensionellt. Vill jag sen visa detta för exempelvis Nämnarens läsare, måste jag dock ta ett foto av det jag ser. Och då blir ju allt åter igen tvådimensionellt; se figur 1b.



Figur 1a



Figur 1b

Igen tar jag fram asken och placerar den nu intill fotografiet. Som innan blir det så klart tredimensionellt. Men vill jag visa upp det för andra, får jag ta ett nytt foto, och återigen ramlar vi ner i en tvådimensionell värld som i figur 1c. En sista vända ger figur 1d som visar fotot av asken med fotot av asken med fotot av asken med teckningen.



Figur 1c



Figur 1d

Dessa fyra askar kan aldrig mötas, även om de skulle vilja. Men det är inte några murar eller världshav som skiljer dem åt. Det är "dimensionerna". De befinner sig i skilda världar.

Med geometrins hjälp avslöjar vi bildmanipulation

Följande exempel kommer från reklamens värld. Vid ett flertal tillfällen genom åren har jag i tidningsannonser och annat stött på bilder liknande figur 2.

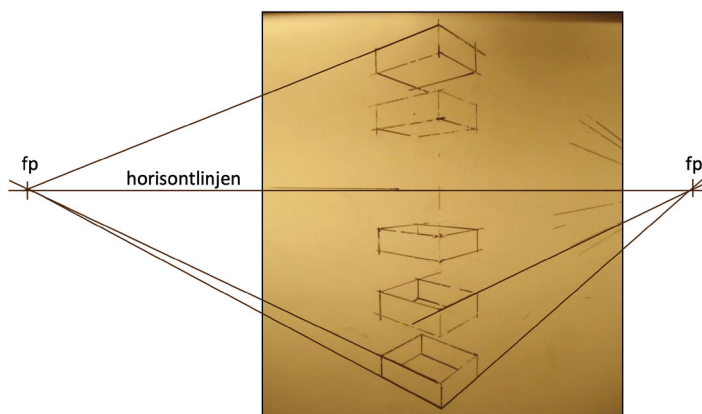


Figur 2

Vid en närmare geometrisk betraktelse framgår det emellertid att detta är en bluff om vi utgår från att arrangemanget av de tre föremålen ska framstå som en gemensam uppställning inför en fotografering. Ingen fotograf i världen kan knäppa en bild som denna. Men innan vi gör en analys av bilden, följer här några rader om den bakomliggande teorin.

Den projektiva geometrin

I början av 1600-talet utvecklades den projektiva geometrin av bland annat Désargues. En underavdelning inom denna teori är perspektivläran, där begrepp som horisontlinje och flyktpunkt är centrala. Mer att läsa om detta finns i artikeln *Arkitektur, en utgångspunkt för projicering av rummet ned på planet*. Här ska bara kort nämnas en konsekvens utifrån denna teori: var vi än väljer att ställa oss för att betrakta tillvaron, relateras vår vy alltid till en och endast en horisontlinje och på vilken ett antal flyktpunkter, fp, alltid är belägna. Figur 3 visar den enkla principen. Befinner sig en kropp över den aktuella horisontlinjen, syns den underifrån; är kroppen istället under, syns den ovanifrån.



Figur 3. Några lådor ritade på tavlan i ett klassrum.

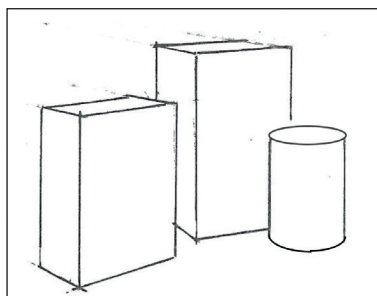
Analys av en bild

I figur 4 framgår att det blåa paketets flyktlinjer strävar uppåt. Paketet befinner sig alltså under horisontlinjen. Därmed blir dess ovansida synlig. Burkens ovansida däremot ser vi inte, trots att burken är lägre än paketet. I denna bild har vi alltså inte *en* utan *två* horisontlinjer. Vi tvingas därför konstatera att vi befinner oss på två olika ställen samtidigt. Detta trotsar inte bara reglerna för hur en illustration ska gestaltas enligt perspektivläran, det trotsar också elementära fysikaliska lagar.

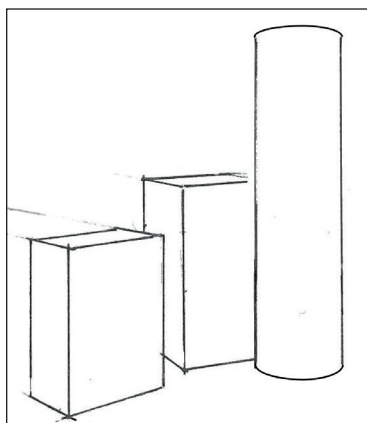


Figur 4

Problemet löses om vi väljer att utgå från *en* av de två horisonterna, exempelvis horisontlinje 1. Därefter behöver vi bara ersätta den uppåtböjda kurvan som beskriver burkens övre kant med en som böjer nedåt; se figur 5a. Skulle vi av någon anledning vilja ha kvar formen på denna kurva, får vi istället flytta på den, och då flytta den dit där den hör hemma, vilket är *ovanför* horisontlinjen. I figur 5 ges därför två alternativa framställningar av detta stilleben, där båda är korrekt återgivna enligt teorin även om uppställningen i figur 5b förmodligen är rätt sällsynt; cylindern skiljer sig en smula från de konservburkar vi är vana att se i våra matbutiker.

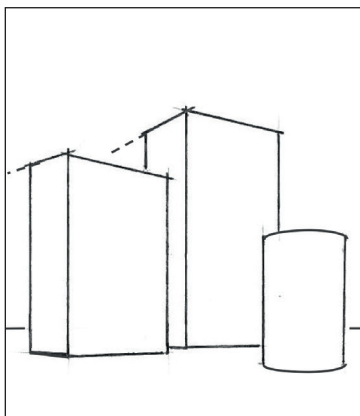


Figur 5a



Figur 5b

Ett tredje alternativ är så klart att istället utgå från cylinderns utkikspunkt, dvs horisontlinje 2, vilket då tvingar fram en ändring av flyktlinjerna för de två kartongerna; se figur 6. En annan synpunkt i sammanhanget får avsluta denna studie: vill man ha en dramatisk snarare än en harmonisk bild, är nog figur 6 med sin låga horisont att föredra.

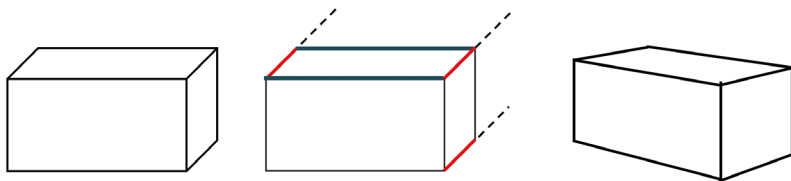


Figur 6

Varför ser det alltid så platt ut?

Varför ser kroppar så platta ut när man ritat dem med Words förvalda ritverktyg och när de sedan dyker upp i våra matematikböcker i form av rätblock, cylindrar och annat? Vid det här laget vet vi svaret.

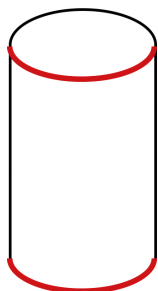
Rätblocket i figur 7a har jag ritat med det schablonverktyg som mitt datorprogram erbjuder. De tre flyktlinjerna, rödmarkerade i figur 7b, är inbördes parallella, precis som de ska vara om kroppen ska få kallas ett rätblock. Ändå ser de ut att gå isär. Och det är just det som är pudelns kärna. Man kan inte överföra egenskaper i det tredimensionella rummet till det tvådimensionella planet rakt av utan att det får konsekvenser. Parallellitet övergår som vi sett, i projektivitet. Dessutom är framsidans alla hörn vinkelräta. Men de gånger man ser de fyra hörnen räta på framsidan av exempelvis en kub, kan man omöjligt se någonting av de övriga sidorna. Att saker ser mindre ut ju längre bort de befinner sig vet vi om inte förr, så nu. Ändå är de två mörka linjerna i figur 7b lika långa. Figur 7c visar ett alternativ.



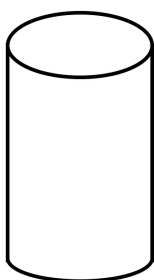
Figur 7a, b, c. Ett rätblock med schablonverktyg (a och b) och i perspektiv (c).

Kurvor utgör inget undantag

Resonemanget ovan med de raka linjerna gäller även för kurvor. Datorns förvalda cylinder, se figur 8a, har samma krökningsradie upptill som nertill; här rödmarkerade. Men då den nedre kurvan befinner sig längre bort från horisontlinjen ska den enligt teorin ha en kraftigare böj än den övre. Ända ser man inte sällan korrigeringsförsök där man planar ut den nedre ellipsen när det är precis tvärtom man ska göra.



Figur 8a. Words originalcylinder – en schablon.



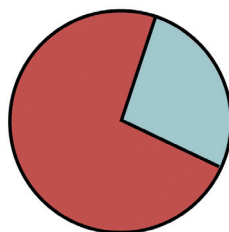
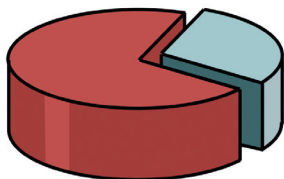
Figur 8b. Tillplattad nedre del. Burken står inte stadigare för det.



Figur 8c. Korrekt avbildning enligt den projektiva geometrin.

Två dimensioner duger gott

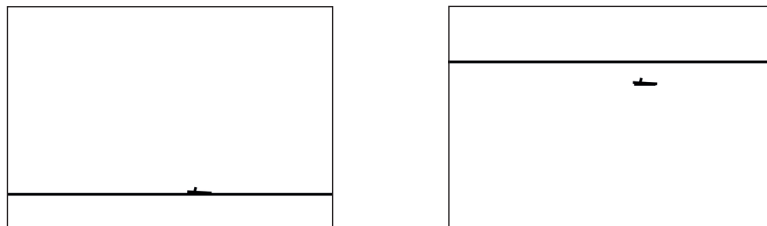
Det är inget som säger att figurerna i våra matematikböcker alltid måste framställas tredimensionellt. Bara för att verktygen finns där i datorn, måste man inte använda dem. Så varför krångla till det med en bild som figur 9a, som gör en avläsning onödigt svår. Tyvärr är det denna typ av cirkeldiagram som dominerar numera, i dagstidningar och nyhetssändningar, men märkligt nog inte heller sällan i våra matematikböcker. Fördelningen av andelarna avläser eleven enklare från en figur i två dimensioner, se figur 9b. Dessutom förskjuts proportionerna mellan fälten i det tredimensionella fallet, så rent sakligt stämmer figuren inte heller.



Figur 9a, b. Cirkeldiagram i tre dimensioner (a) och i två dimensioner (b).

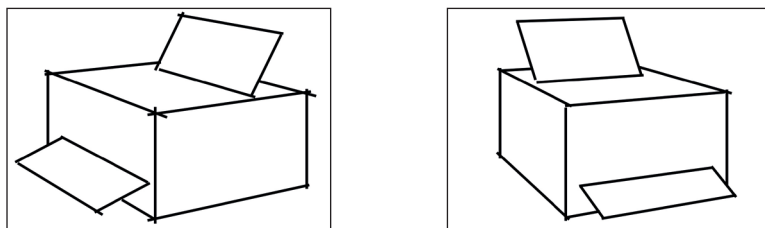
Linjen i vårt liv

Om man inte funderat så mycket på detta med den ständigt närvarande horisontlinjen, kan den intresserade, utan omsvep och med öppna ögon iakttä att denna linje följer med så fort vi reser oss, om så bara en millimeter, och detta i en rörelse lika följsam som allt annat som är kontinuerligt. Figur 10 visar två ögonblicksbilder av en sådan vertikal rörelse.



Figur 10 a, b. Utsikt stående på en strand (a). Samma utsikt uppifrån ett berg (b).

Figur 11 visar skeendet för en horisontell rörelse. Den så kallade flyktpunkten börjar även den att röra på sig så fort vi påbörjar en förflyttning, ständigt bunden till horisontlinjen förvisso, men precis lika följsam.



Figur 11 a, b.

Min skrivare sedd från höger (a) ... och då jag nu rört mig en meter åt vänster (b).

Girard Désargues, 1591–1661, fransk matematiker. Désargues är känd för satsen som bär hans namn och betraktas som en av upphovsmännen till den projektiva geometrin.

LITTERATUR

Berglund, L. (2004). *Arkitektur, en utgångspunkt för projicering av rummet ned på planet*. Nämnaren 2004:3.