Thomas Lingefjärd & Güner Ahmet

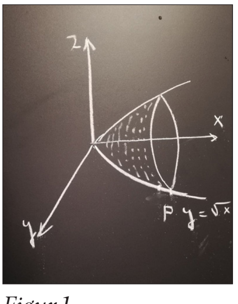
Att undervisa om rotationsvolymer förr och nu

Geogebra är ett dynamiskt och interaktivt program som kan användas för att visualisera matematiken på ett helt annat sätt än de statiska handritade graferna som författarna minns från sin egen skoltid. Här förklarar de ingående hur rotationsvolymer skapas i programmet.

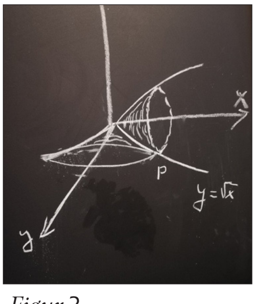
Vi som har författat denna text gick själva i gymnasiet för många år sedan och vi tror att det finns några skillnader mellan oss, som elever då, och dagens elever. Vi upplever att dagens elever är sämre på detaljkunskaper som multiplikationstabellen och olika måttsystem, medan de antagligen är bättre på exempelvis förståelse av samhället och kritiskt tänkande.

Kanske är dagens läromedel bättre än vad de var förr då de var fyllda av uppgifter utan exempel och förklaringar. Det förefaller som om läromedlen idag delvis har tagit över lärarrollen och är uppbyggda som material för självstudier med bra och utförliga exempel. Men det är vår erfarenhet att elever inte läser dessa exempel eller studerar självstudiematerial på internet, så på lektionerna går lärare runt och förklarar bokens exempel och ger individuell hjälp.

En genomgång av lärare i gymnasiet, när vi var elever, skedde oftast på en svart eller mörkgrön tavla som vi elever skrev av. En lektion om volymen av rotationskroppar var ofta relaterad till en skiss på tavlan. Det kunde kanske se ut som i figur 1 och figur 2.



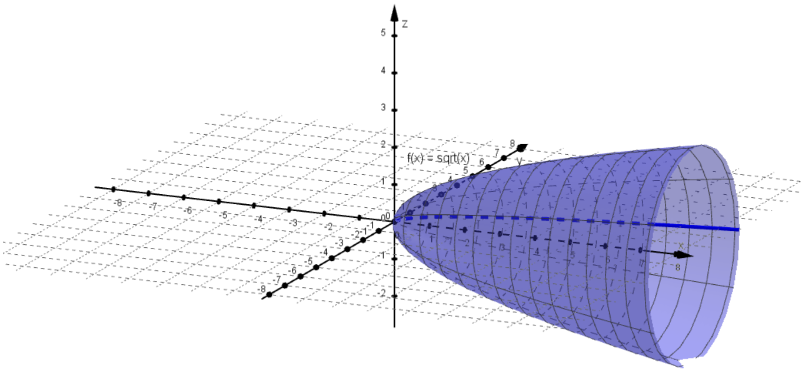
Figur 1



Figur 2

En av oss fick lära sig att koordinataxlarna, då de ritades på papper, skulle ritas svarta, funktionskurvan som skulle rotera skulle vara blå och andra eventuella kurvor eller begränsningsytor skulle ritas röda. För honom blev det intressant att försöka rita så bra figurer som möjligt. I en modern matematikundervisning hade vi troligtvis skapat rotationskroppar samt beräknat volym av dessa kroppar med hjälp av Geogebra som i figur 3. Så bra blev nog aldrig de egenhändigt ritade figurerna.

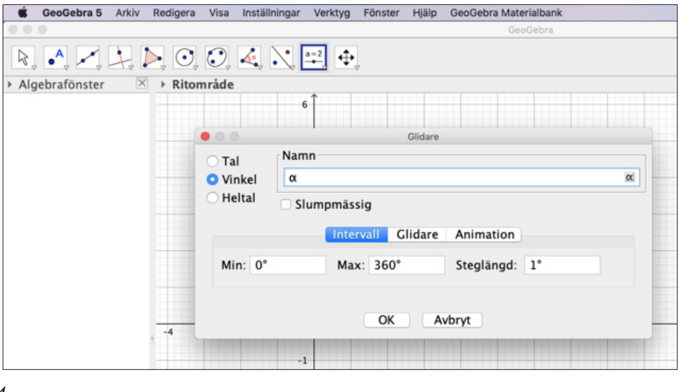
Flera svenska läroböcker för Matematik 4 beskriver rotationskroppar, trots att detta inte är ett centralt innehåll i kursen, och vi vet att rotation och rotationsvolymer är en viktig del inom matematikämnet för gymnasiet. Elever som läser på industriprogrammet bekantar sig med rotation när de svarvar olika figurer genom att rotera en metallbit kring sin egen axel. Om vi till exempel låter en del av funktionskurvan till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ rotera kring x-axeln, så bildas det ett objekt med en rotationsvolym, se figur 3.



Figur 3. Du hittar Geogebrafilen på: www.geogebra.org/m/e3udyzbb

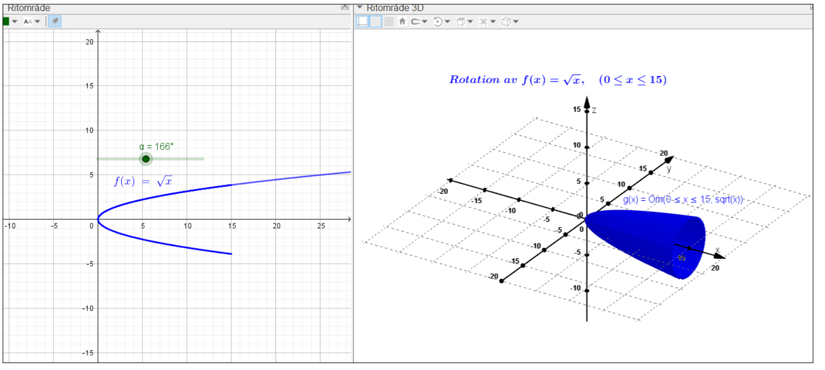
Skapa en rotationskropp

Vi ska nu närmare undersöka rotation av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ kring x-axeln. Vi väljer punkten $A = (15, f(15))$ och begränsar funktionen för $0 \le x \le 15$. I Geogebra gör vi det på följande sätt: Vi skriver i inmatningsfältet **Om** $(\mathbf{0 \le x \le 15, f})$ och programmet skapar då en annan funktion, $g(x)$. Vi skapar även en glidare för vinkel, se figur 4.



Figur 4

Vi använder kommandot **Rotera(<Objekt>,<Vinkel>,<Rotationsaxel>)**. I inmatningsfältet skriver vi **Rotera(*g*, α, *x*Axeln)** och väljer *Animering på* *vinkeln* α. Då skapar Geogebra en parametrisk kurva g_1. Nästa steg är att dubbelklicka på g_1 i algebrafönstret och välja *Spår på*, se figur 5.

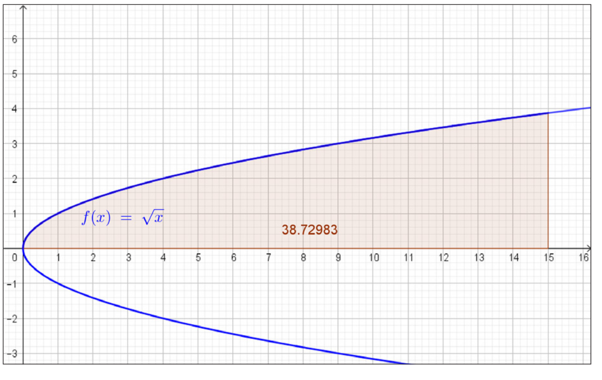


Figur 5. Du hittar Geogebrafilen på: www.geogebra.org/m/cmpzvrfj

Volymen av denna rotationskropp kan beräknas algebraiskt genom användning av formeln för att beräkna volymen av en rotationskropp:

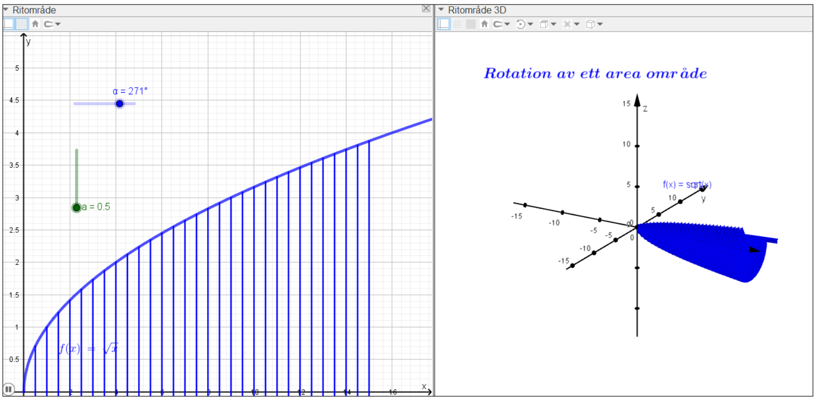
$$V = \pi \int_0^{15} f(x)^2 dx$$

I Geogebra gör vi denna beräkning genom att i inmatningsfältet skriva **V = π Integral(*f*², 0, 15)** och då får vi värdet V = 353.73 i algebrafönstret. Vi får även arean under $f(x) = \sqrt{x}$ markerad för $0 \le x \le 15$ genom att i inmatningsfältet skriva **Area = Integral(*f*, 0, 15)**, se figur 6.



Figur 6

Nu vill vi låta Geogebra rotera denna area kring x-axeln. Vi öppnar ett nytt fönster, skapar funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, en glidare för vinkel α och en glidare a för tal med minsta värde 0 och maximumvärde 15 med steg 0.1. Vi markerar arean under $f(x) = \sqrt{x}$ med en serie av sträckor genom att i inmatningsfältet skriva **Talföljd(Sträcka((*c*, 0, 0), (*c*, *f*(c)cos(α), *f*(c)sin(α))), *c*, 0, 15, *a*)**. Då skapar programmet en $Lista_1$ med sträckor och markerar ovannämnda area med en serie av sträckor, se figur 7.



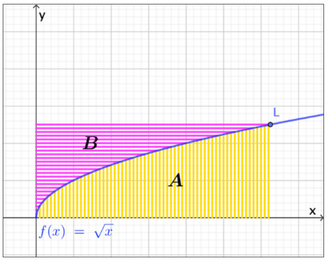
Figur 7. Du hittar Geogebrafilen på: https://www.geogebra.org/m/ngbsjgaa

Nu kan vi rotera detta område runt x-axeln. Det gör vi genom att i inmatningsfältet skriva **Rotera(Lista$_1$, α, *x*Axeln)**. Med kommandot *Yta*, skapar vi en rotationskropp som vi önskar att vi hade kunnat skapa när vi själva gick i gymnasiet. Vi skriver: **Yta(*c*, *f*(*c*)cos(β), *f*(*c*)sin(β), *c*, 0, 15, β, 0°, α)** och då levererar Geogebra en snygg rotationskropp som den till höger i figur 7.

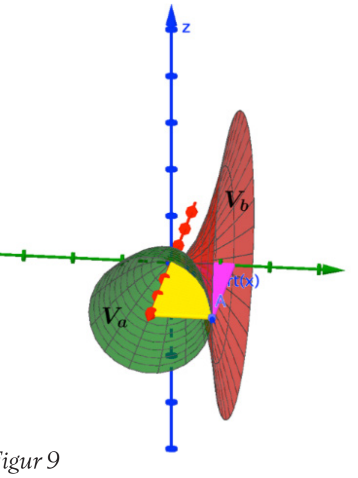
En utmaning

En punkt L ligger på kurvan $y = \sqrt{x}$ enligt figur 8 nedan. Då området A roterar kring x-axeln bildas rotationskroppen V_a. Då området B roterar kring y-axeln bildas rotationskroppen V_b.

Beräkna koordinaterna för punkten L då rotationskropparna V_a och V_b har lika stora volymer, se figur 8 och figur 9.



Figur 8



Figur 9

De länkar som nämns i artikeln finns klickbara på Nämnaren på nätet.