

Lustfyllt lärande med hjälp av elevers uppfattningar och matematiska resonemang

NCM

30 september 2021

Joakim Magnusson



Innehåll under dagen

- Bakgrund och beskrivning av matematikutveckling på nystartad skola
- Om att frigöra tid för fördjupat lärande för elever inom ett innehållsligt område (tex bråk)
- Om att använda elevers olika uppfattningar som utgångspunkt vid planering, genomförande och utvärdering av undervisning
- Exempel på innehållslig progression inom ett område (funktioner) med tydligt formulerade lärandemål som riktmärke

27 års arbete med undervisning och lärande i komprimerad form

- Grundskollärare 4-9, Matte, slöjd, NO (1990 – 1994, 2009) på 5 väldigt olika skolor (Påvelundskolan, Lövgårdesskolan, Öjersjö, Fenestra centrum, Pedagogen, Stadsparksskolan)
- Deltagande lärare i ett forskningsprojekt 2003 Öjersjö i Partille
- Fortsatt systematiskt arbete med undervisningsutveckling – goda resultat
- Forskarskola med inriktning mot Learning study VT2012 – VT2014
- Kursledare ämnesdidaktik med inriktning matematik GU, 2014 – 2019
- Lärare och lektor i Partille kommun

Min roll som lärare och lektor i kommunen

Tudelad tjänst med möjligheter att bli tredelad

- Undervisning i Matematik och NO på högstadieskola (70%)
- Skolutveckling på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet på den egna nystartade skolan och andra skolor i kommunen (30%)
- (Beforska matematikutveckling i kommunen)

Mitt uppdrag i samtliga delar av min tjänst

Att bidra till både innehåll och organisation av ämneskollegial utveckling i syfte att gynna elevernas lärande och måluppfyllelse i primärt matematik.

Undervisningsutveckling - Hur bör vi göra?

Det finns en konsensus om vilka aspekter framgångsrik skolutveckling består av. Vi behöver:

- Ha fokus på ämnesinnehåll och på hur man undervisar det (ämnesdidaktik)
- Observera varandras undervisning, och få möjlighet att diskutera på djupet
- Ta ett helhetsgrepp över det som ska förändras
- Hålla på tillräckligt länge (minst 20 timmar och minst en termin)
- Jobba tillsammans för att utveckla undervisningen
- Ta hjälp av extern expertis
- Utmana varandra i våra föreställningar om undervisning
- Ha stöd från skolledning

(Desimone, 2009: Hattie, 2014, Skolverket, 2012, Timperley, 2007)

Utvärdering matematik efter första året på nya skolan

- **Bristande samverkan mellan lärare** – Lärare har i stor utsträckning fått hantera svårigheter att få elever med sig på egen hand
- **Progression och lärandemål** – inte gemensamt framarbetat och inte tydligt förankrat i lärargruppen. Läromedel styr och olika används
- **Resurs** – stöd till elever och möjlighet till nivågrupperad undervisning har inte varit tillräcklig och bristfälligt organiserad
- **Olika bedömningskulturer**– pga. bristfällig samverkan mellan lärarna så har inte eleverna inte fått en likvärdig bedömning. De har inte arbetat med samma innehåll och har haft olika examinationer
- **Förväntningar på eleverna** - problemet ligger hos eleven inte i undervisningen
- **Olika kunskapssyn i lärargruppen**
 - visa och förklara, följt av görande vs utgå från elevernas uppfattningar i undervisningen
 - först en fungerande grupp (ordning och reda) sedan undervisning
- **Brist på behöriga lärare** –

Ett drygt år senare

- Alla elever i år 7 - 9 i MA/NO har samplanerad undervisning
- Eleverna arbetar under längre perioder med ett innehåll istället för att det delas upp i olika årskurser
- Läromedel är inte det som styr undervisningen
- Till varje undervisningsområde formuleras, utvärderas och revideras lärandemål på en detaljerad nivå
- Undervisningen i matematik har parallellagts för att möjliggöra nivågrupperingar med utgångspunkt i elevernas val
- Eleverna bedöms på ett likvärdigt sätt (gemensamt konstruerade examinationer)
- Lärarna som undervisar har ett planeringstillfälle inbokat per vecka.
- Vid 8-10 tillfällen per termin träffas lärare ämnesvis för att diskutera undervisning och dess koppling till elevernas lärande
- Undervisning analyseras (tex filmade lektioner) och granskas gemensamt
- Skolledningen prioriterar det ämnesdidaktiska arbetet och agerar "bromskloss" för annat som pockar på uppmärksamheten
- Planering. Genomförande och utvärdering av undervisning baseras på teori och elevuppfattningar

Eleverna arbetar under
längre perioder med ett
innehåll istället för att
innehållet delas upp i olika
årskurser

Årskurs 7

Innehåll

1 Tal 6

- 1.1 Vårt talsystem 8
- 1.2 Avrundning 13
- 1.3 Multiplikation och division med 10, 100 och 1 000 19
- 1.4 Enheter och prefix 22
- 1.5 Multiplikation och division med tal mellan 0 och 1 27
- 1.6 Delbarhet 32

Repetera 35

Fokus på förmågorna 38

Sammanfattning 39

2 Geometri 40

- 2.1 Vinklar 42
- 2.2 Trianglar 52
- 2.3 Månghörningar 60
- 2.4 Area och omkrets 68

Repetera 77

Fokus på förmågorna 83

Sammanfattning 85

3 Bråk och procent 88

- 3.1 Vad är bråk? 90
- 3.2 Förkorta och förlänga bråk 96
- 3.3 Addition och subtraktion av bråk 104
- 3.4 Delen av 110
- 3.5 Vad är procent? 116
- 3.6 Räkna med procent 124

Repetera 130

Fokus på förmågorna 134

Sammanfattning 136

4 Statistik 138

- 4.1 Tabeller och diagram 140
- 4.2 Lägesmått 158
- 4.3 Spridningsmått 167

Repetera 176

Fokus på förmågorna 180

Sammanfattning 182

5 Algebra 186

- 5.1 Numeriska uttryck 188
- 5.2 Algebraiska uttryck 195
- 5.3 Ekvationer 204
- 5.4 Problemlösning med ekvationer 209

Repetera 213

Fokus på förmågorna 216

Sammanfattning 217

FACIT 218

Innehåll

1 Tal 6

- 1.1 Primtal 8
- 1.2 Negativa tal 14
- 1.3 Multiplikation och division med negativa tal 20
- 1.4 Potenser 27

Repetera 34

Fokus på förmågorna 36

Sammanfattning 38

2 Mönster och samband 40

- 2.1 Mönster 42
- 2.2 Koordinatsystem 55
- 2.3 Funktioner 64
- 2.4 Formler 79

Repetera 85

Fokus på förmågorna 89

Sammanfattning 90

3 Geometri 92

- 3.1 Cirkeln 94
- 3.2 Areaenheter 105
- 3.3 Skala 111

Repetera 125

Fokus på förmågorna 128

Sammanfattning 130

Årskurs 8

4 Procent 132

- 4.1 Procent och procentenheter 134
- 4.2 Promille och ppm 140
- 4.3 Mer än 100 % 146
- 4.4 Förändringsfaktor 154
- 4.5 Det hela och det ursprungliga 162
- 4.6 Blandade uppgifter 167

Repetera 174

Fokus på förmågorna 177

Sammanfattning 179

5 Algebra 180

- 5.1 Räkneregler och algebraiska uttryck 182
- 5.2 Ekvationer och olikheter 192

Repetera 201

Fokus på förmågorna 203

Sammanfattning 205

6 Problemlösning 206

- 6.1 Problemlösning 208

FACIT 216

REGISTER 238

Årskurs 9

Innehåll

1 Tal 6

- 1.1 Potenser med negativ exponent 8
- 1.2 Grundpotensform och prefix 12
- 1.3 Multiplikation och division med bråk 24
- 1.4 Kvadratrötter 32
- 1.5 Olika typer av tal 38
- 1.6 Talbaser och talsystem 46

Repetera 57

Fokus på förmågorna 60

Sammanfattning 62

2 Geometri 64

- 2.1 Pythagoras sats 66
- 2.2 Volym 73
- 2.3 Mer om volym 82
- 2.4 Begränsningsarea 90
- 2.5 Symmetri 99

Repetera 105

Fokus på förmågorna 107

Sammanfattning 108

3 Algebra 110

- 3.1 Linjära funktioner 112
- 3.2 Ekvationssystem 131
- 3.3 Exponential och potensfunktioner 144
- 3.4 Konjugat- och kvadreringsreglerna 153

Repetera 161

Fokus på förmågorna 164

Sammanfattning 166

4 Sannolikhet 168

- 4.1 Kombinatorik 170
- 4.2 Vad är sannolikhet? 182
- 4.3 Sannolikhet för flera händelser i rad 190

Repetera 204

Fokus på förmågorna 206

Sammanfattning 208

5 Repetition 210

- 5.1 Begrepp 212
- 5.2 Metod 216
- 5.3 Problemlösning 219

FACIT 222

REGISTER 242

År 7 - tal

Område	Innehåll
Bråk	Del, hel andel
Positionssystemet	Andra talsystem
Decimaler (och bråk)	
Procent	Delen, Andelen Helheten, Förändringar
Skala / likformighet / symmetri	Skala i 1D, 2D, 3D

År 8 - verktyg

Område	Innehåll
Geometrisk begrepp och figurer	klippa å klistra Undersöka och mäta inte beräkna omkrets och area
Negativa tal	Förstå och räkna med
Potenser	"vanliga" tal i potensform Tiopotenser Grundpotenser
Algebra	Uttryck Ekvationer
Volym/Area/längd	Dimensionsanalys Uppskatta, mäta, beräkna Konstruera

År 9 - samband**Område****Innehåll****Funktioner**Mönster, algebraiskt,
händelse, grafiskt, formel**Tillämpning**Någonting per någonting
proportion och proportionalitet,
förändringsfaktor och ekvationer**Sannolikhet/ Statistik/ Kombinatorik****Repetition**

Planering, genomförande
och utvärdering av
undervisning baseras på
teori och elevuppfattningar

Variationsteori: om innehållet är i fokus:
fyra bärande frågor att beakta när undervisning planeras

Vad innebär det att förstå detta?	(ämnesteori)
Hur förstår eleverna det idag?	(elevuppfattningar)
Vad behöver de lära sig?	(kritiska aspekter)
Hur kan detta synliggöras i undervisningen?	(variationsmönster)

Efter undervisning

Vilka möjligheter att lära erbjöds eleverna under lektionen?
Vad lärde sig eleverna?

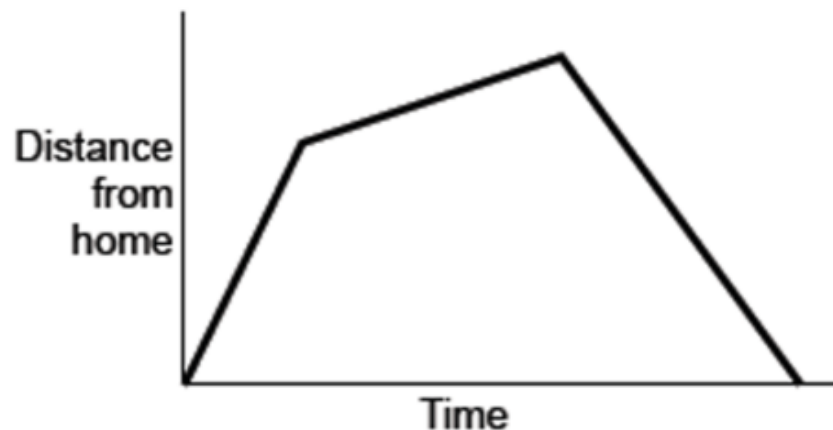
Passa en graf till en historia

Vilka uppfattningar döljer sig bakom följande historier?

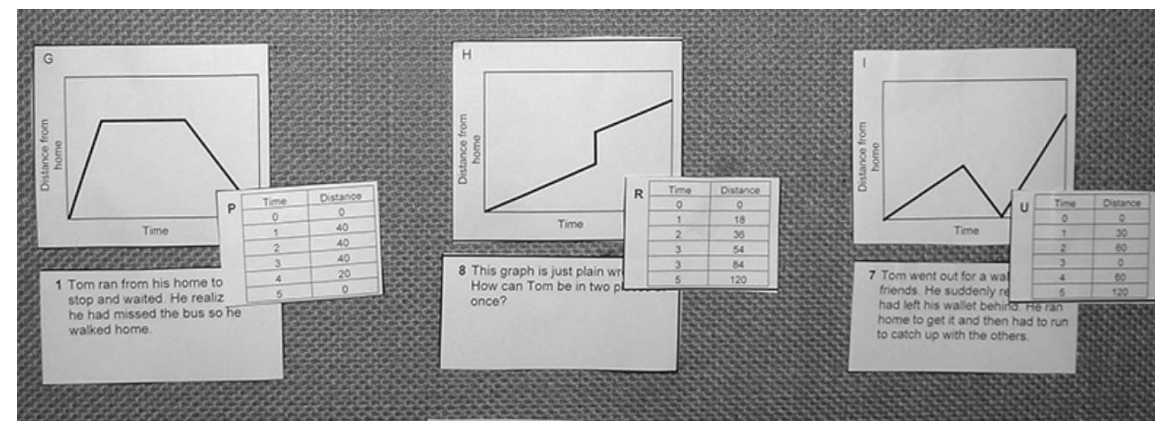
A. Tom gick till parken med sin hund. Han började gå långsamt men ökade sedan sin fart. Vid parken vände Tom tillbaka och gick sakta hem igen.

B. Tom åkte österut från sitt hem med sin cykel uppför en brant backe. Efter ett tag minskade lutningen på backen. Efter backkrönet cyklade han fort ner till andra sidan.

C. Tom stack ut och joggade. Efter ett tag träffade han en kompis och saktade ner sin fart. När han lämnade sin kompis skyndade han sig hem.



Interpreting Distance-Time Graphs



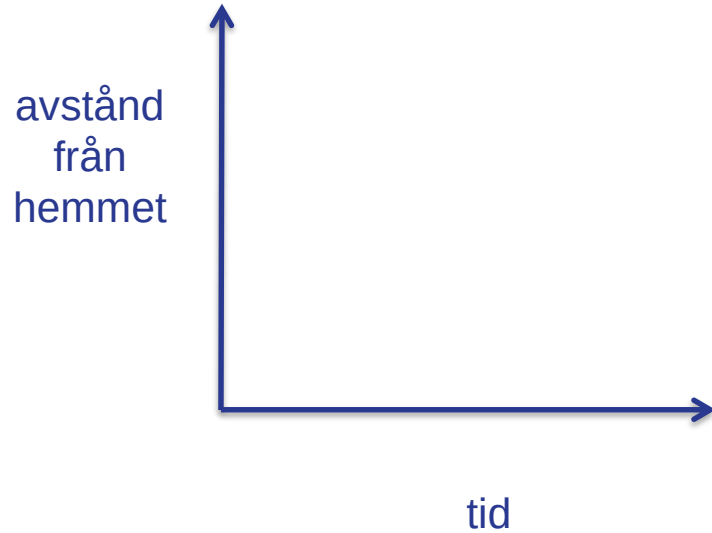
Exempel från årskurs 4 genomförd av studenter vid Göteborgs universitet

Vad innebär det att förstå detta?

(ämnesteor)

Lärandemål – Att kunna tolka sambandet mellan två storheter (tid och avstånd från hemmet) i representationsformen händelse till graf

Förtest år 4: Rita en graf till en berättelse



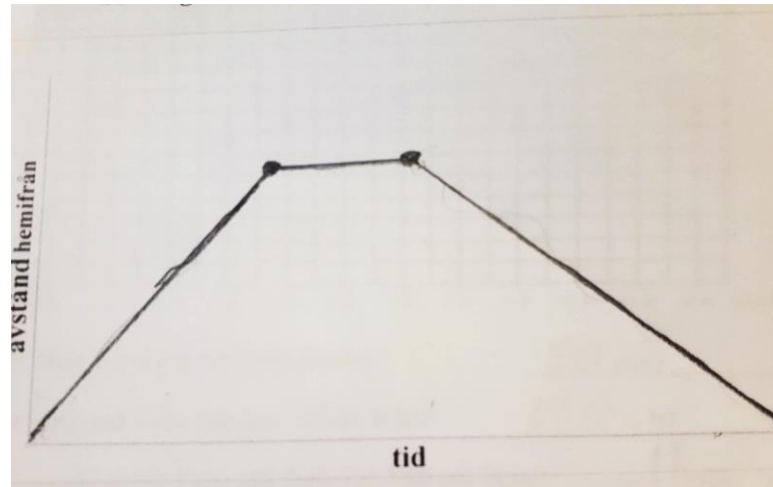
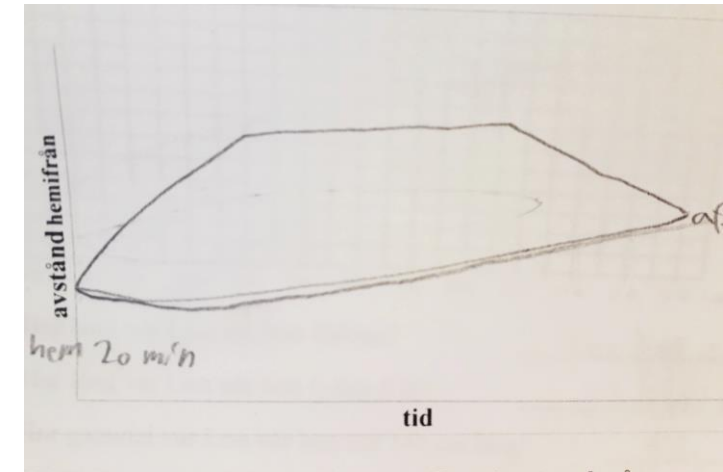
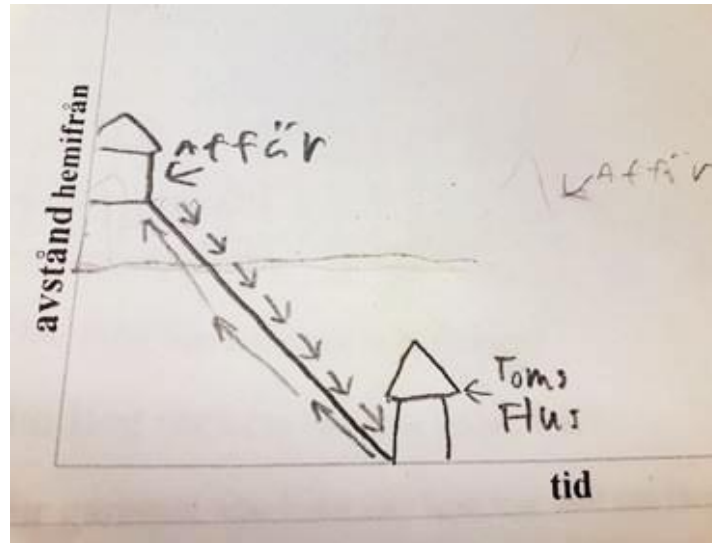
Tom sprang snabbt till affären
I affären köpte han ett tuggummi.
Sedan gick han sakta hem igen

16 av 46 elever ritar en grof motsvarande händelsen

Exempel på elevsvar

Tom sprang snabbt till affären
I affären köpte han ett tuggummi.
Sedan gick han sakta hem igen

Hur förstår eleverna det idag?



- Vad behöver de lära sig?
(kritiska aspekter)
- Hur kan detta synliggöras
i undervisningen? (kontraster)

Vad innebär det att linjen har olika lutning?

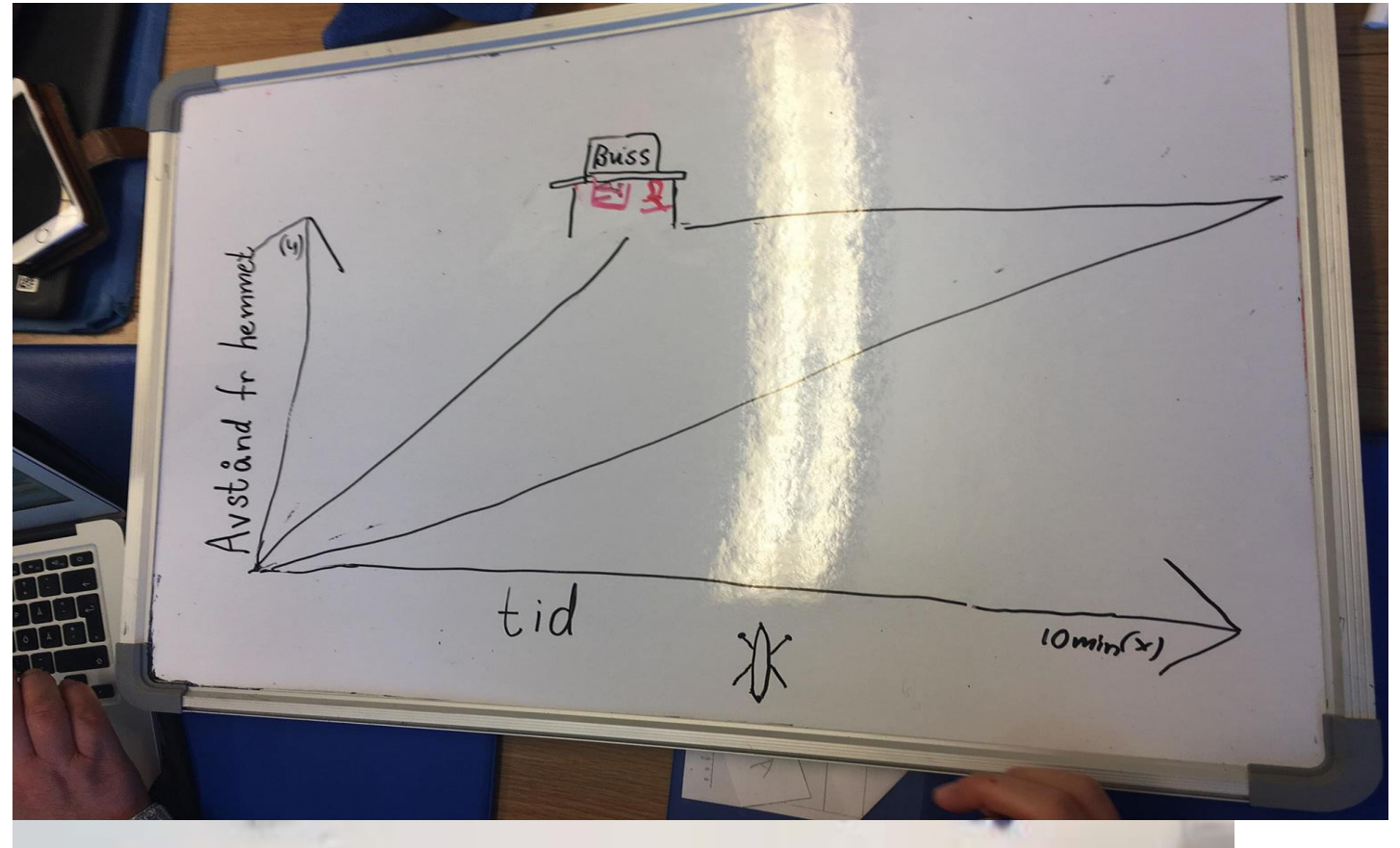
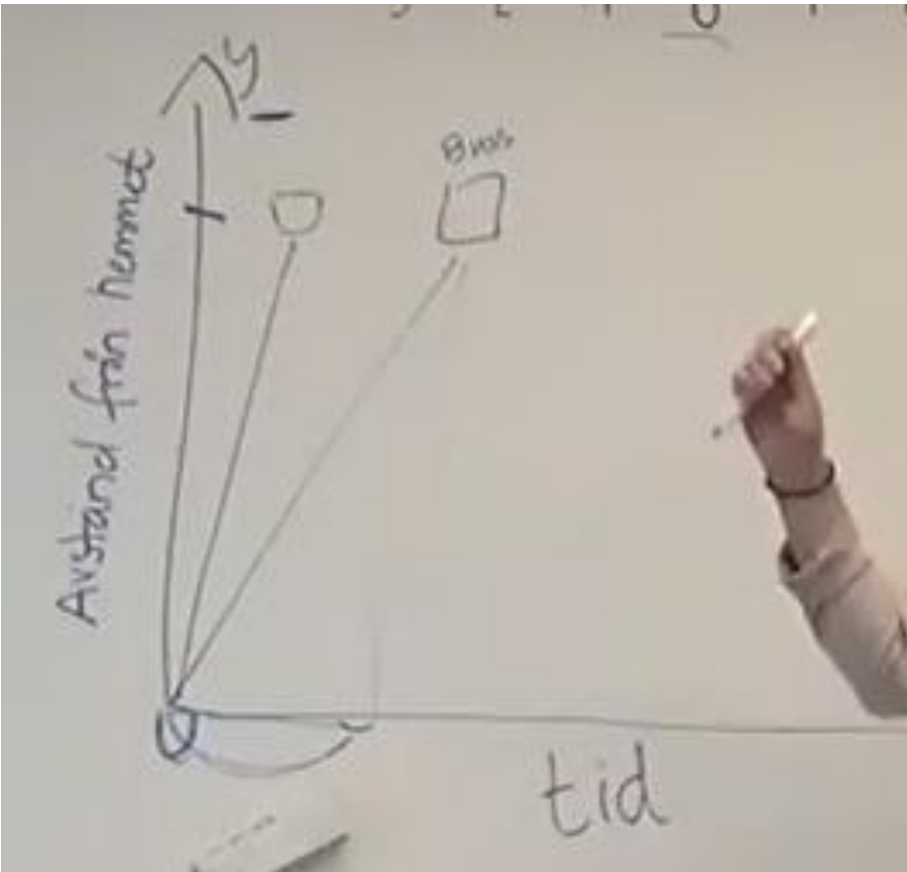
Vad händer med grafen när avståndet är konstant men tiden ändras?

Hur visas det att Tom går hem igen?

Vad behöver de lära sig?

(kritiska aspekter)

Hur kan detta synliggöras i undervisningen? (kontraster)



Till varje undervisningsområde
formuleras, utvärderas och
revideras lärandemål på en
detaljerad nivå

Lärandemål för området funktioner i årskurs 9

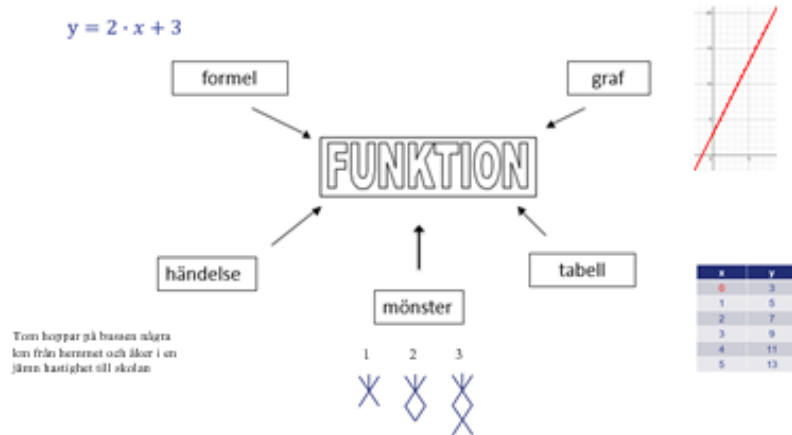
Innehållsliga mål för "The Funky course" (funktioner)

På en grundläggande nivå

Att kunna:

- begrepp som:
koordinat, koordinatsystem, lutning, x-axel, y-axel, skärningspunkt, origo, graf,
- tolka och beskriva en händelse som en graf och tvärtom kunna tolka och beskriva en graf som en händelse med ord
- beskriva sambandet (lutning) mellan två storheter (tex tid och avstånd) utan värden på axlarna (typ Tom) i en graf.
- läsa av och tolka grafer och axlar i ett koordinatsystem (diagram)
- Att med heltal kunna utgå från en representation av räta linjens ekvation ($y = k \cdot x + m$) till att skapa alla andra:

$$y = 2 \cdot x + 3$$

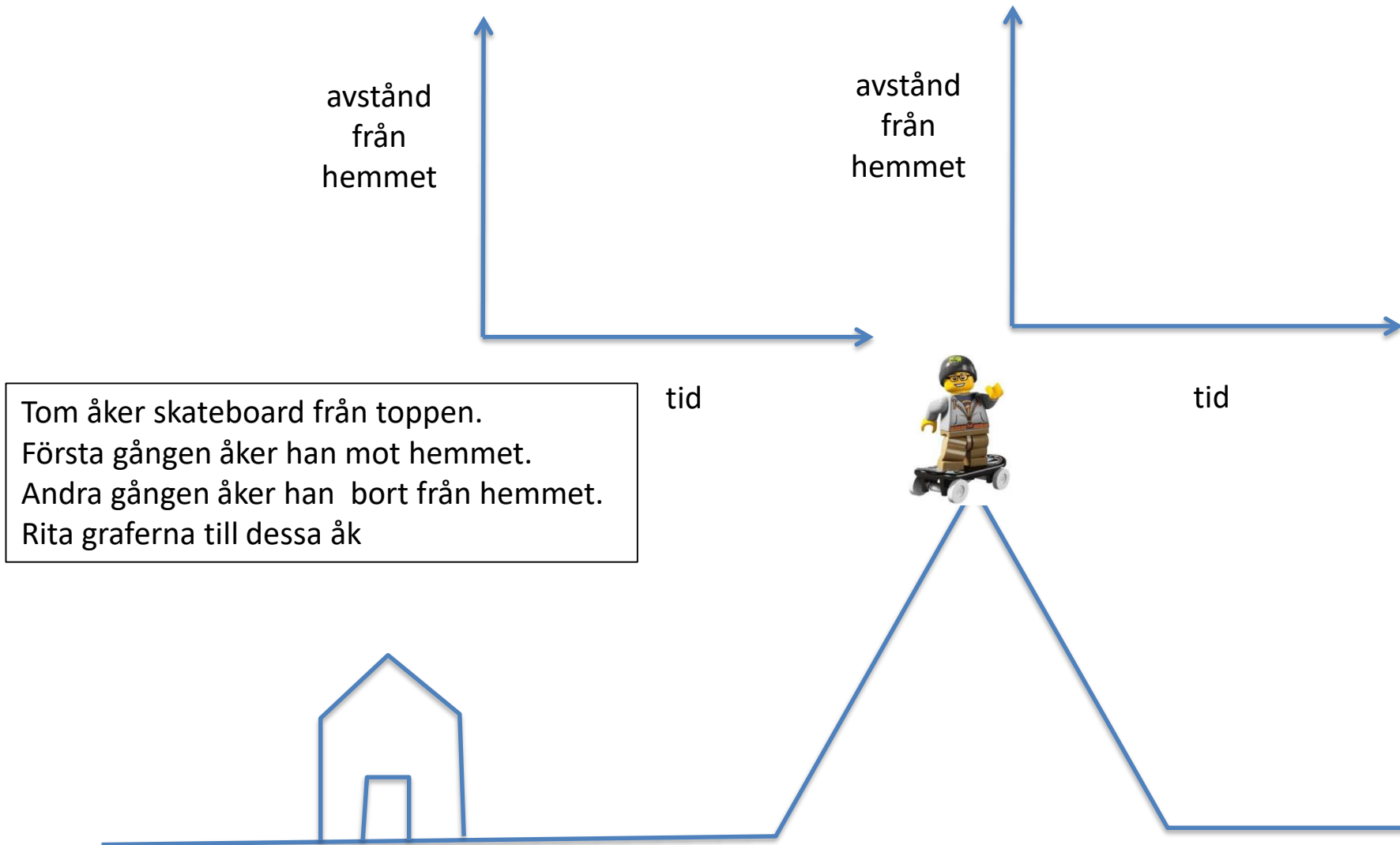


- vad värdena i räta linjens ekvation ($y = k \cdot x + m$) står för i olika representationsformer
- hur axlarnas gradering förändrar grafers utseende men inte funktionen (formeln)

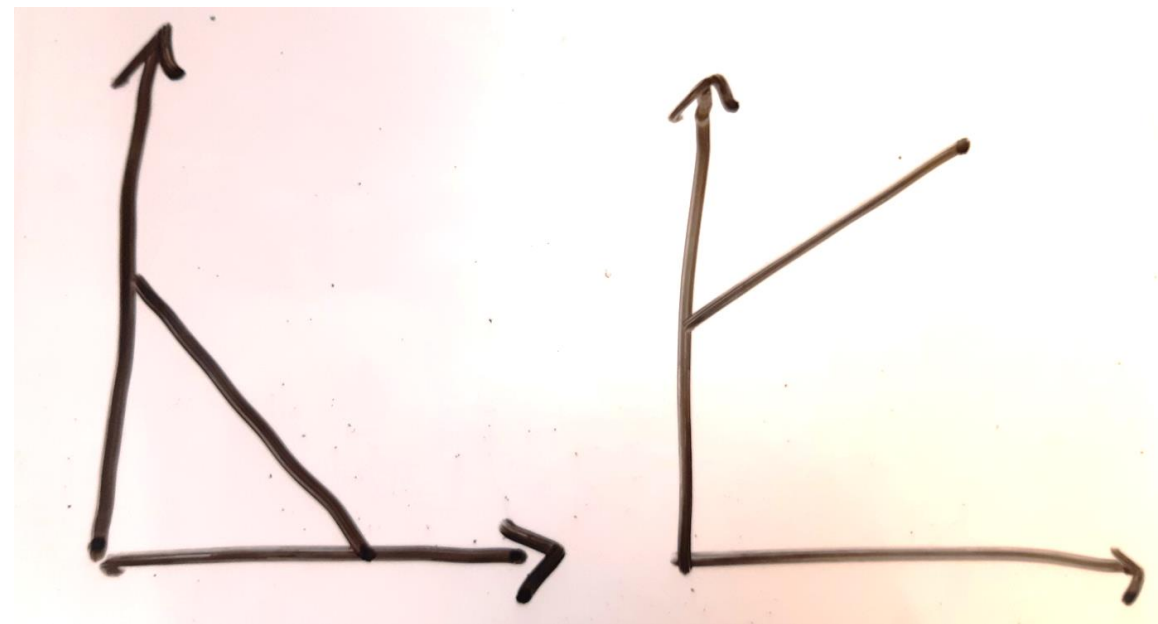
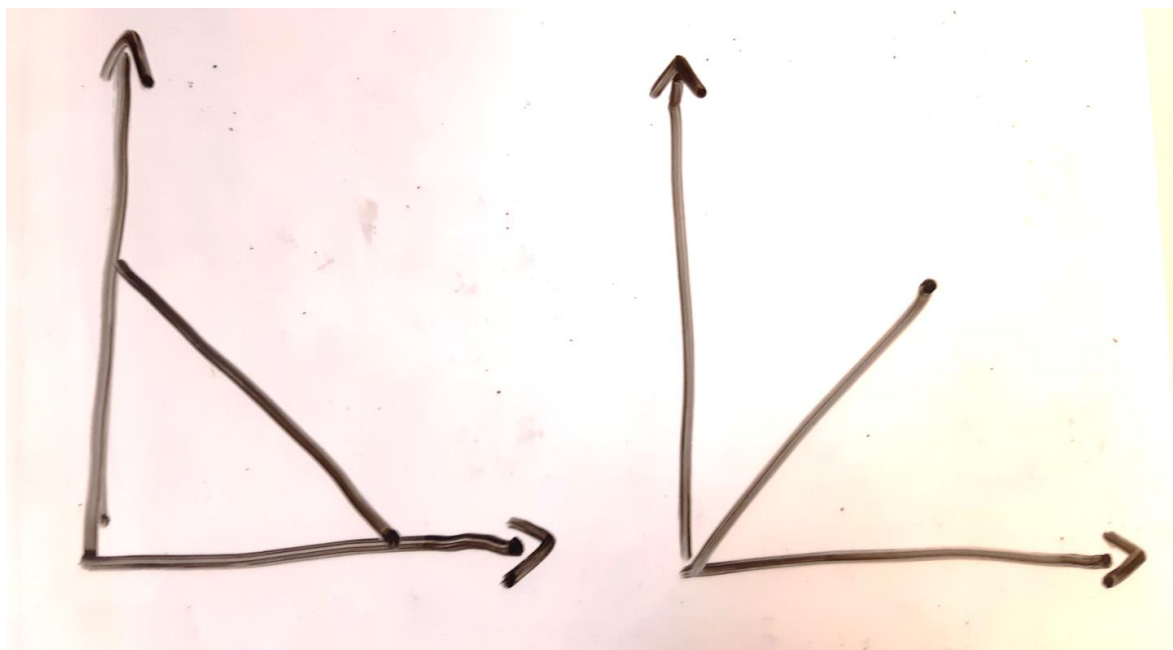
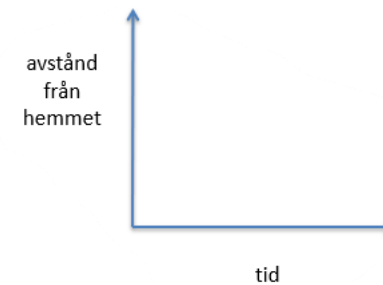
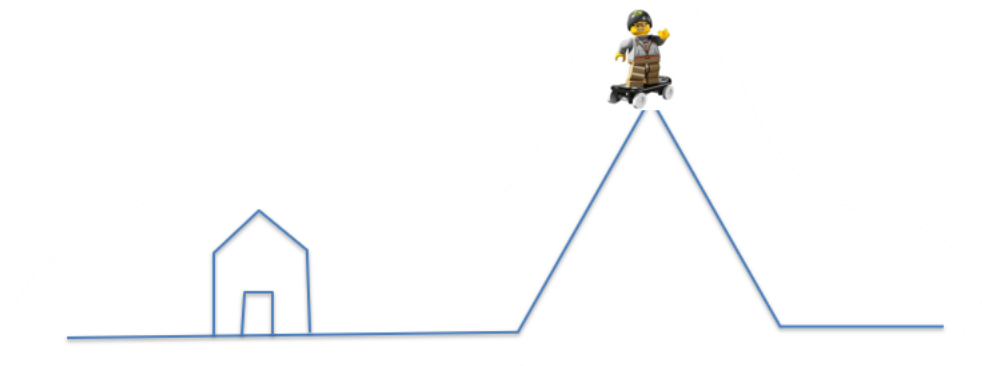
På en fördjupad nivå

- kunna växla mellan representationsformer där $y = k \cdot x + m$ uttrycks med tal i bråk eller decimalform
- förstå vad begreppet proportionalitet innebär och vad som skiljer det från k-värdet i räta linjens ekvation om m-värdet inte är noll
- förstå vad som skiljer konstanter från variabler
- förstå vad som skiljer ett linjärt samband från ett icke linjärt
- med hjälp av formler, ekvationer och grafiska metoder kunna lösa komplexa problem
- se vad som kännetecknar en funktion. Tex varför $x + y = 100$ är en funktion medan $x + x = 100$ inte är det trots att båda är ekvationer

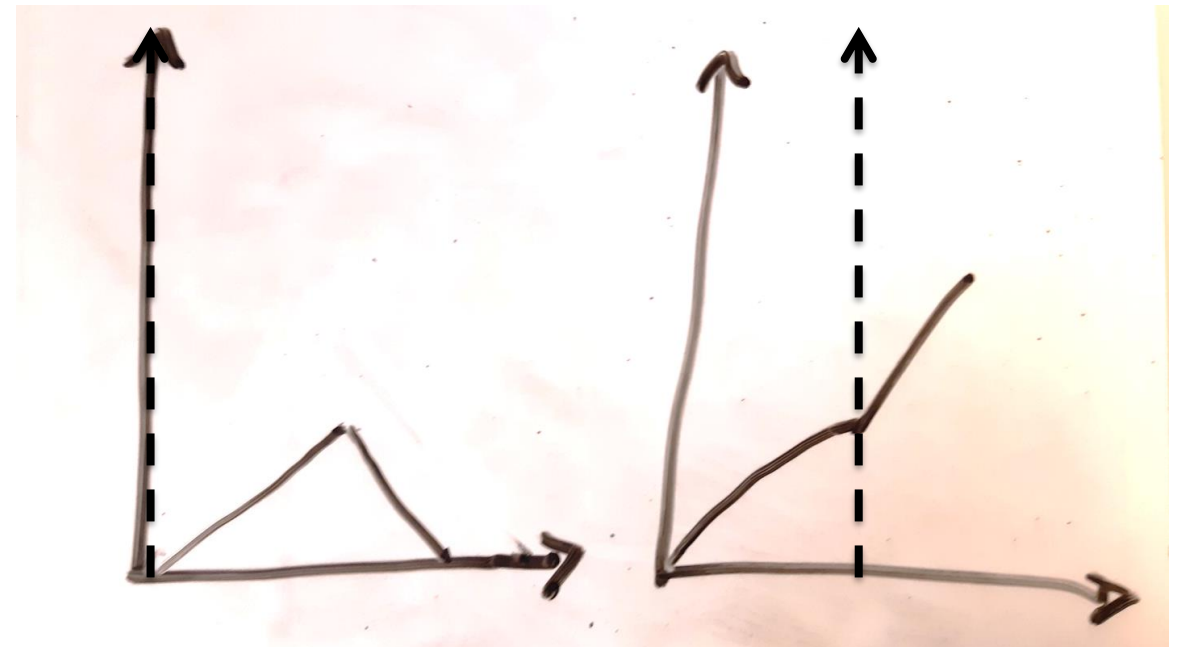
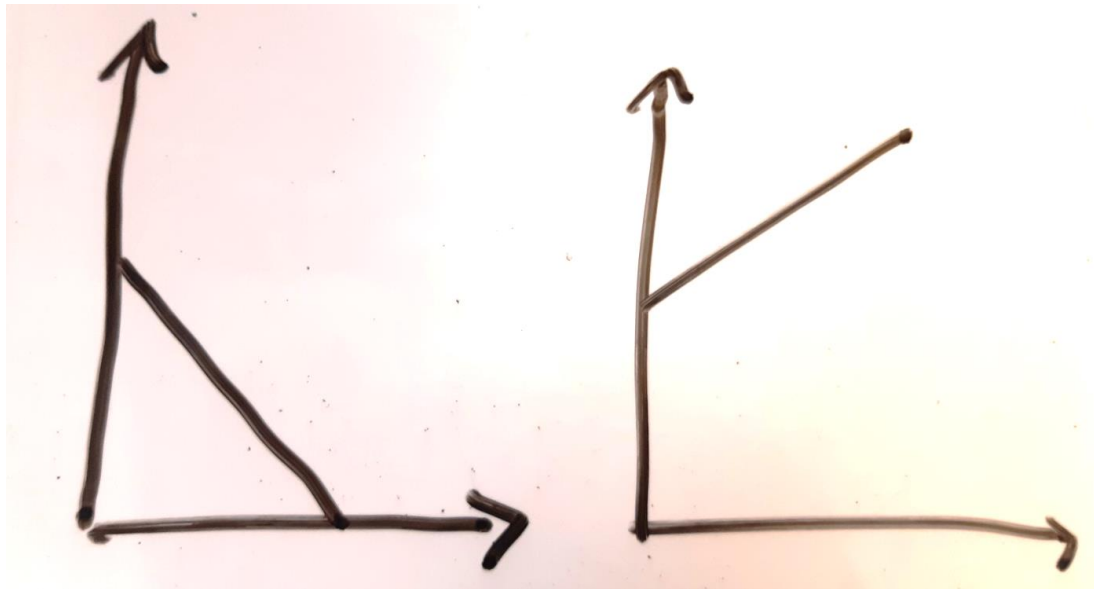
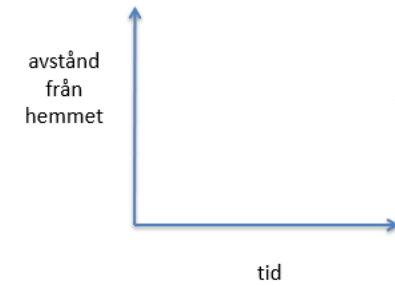
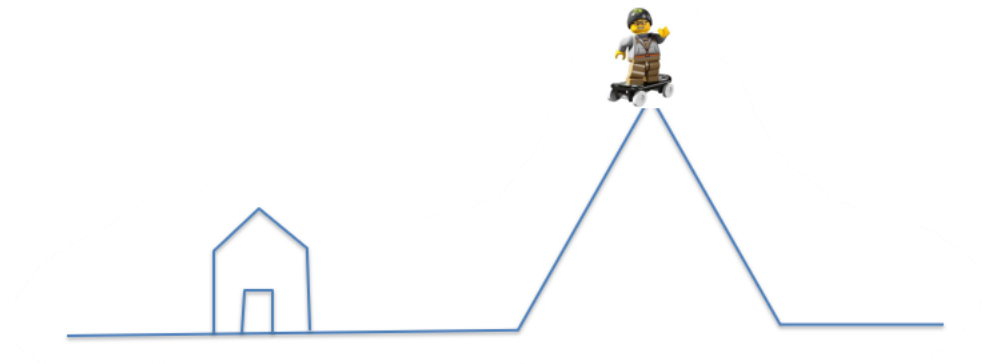
År 9 - Rita grafen till händelsen



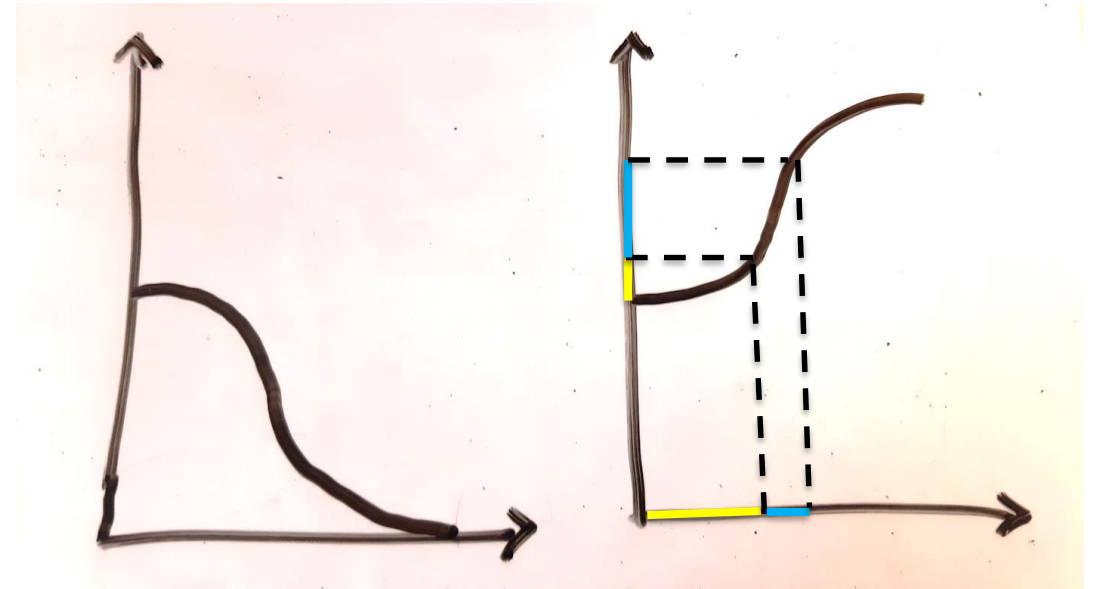
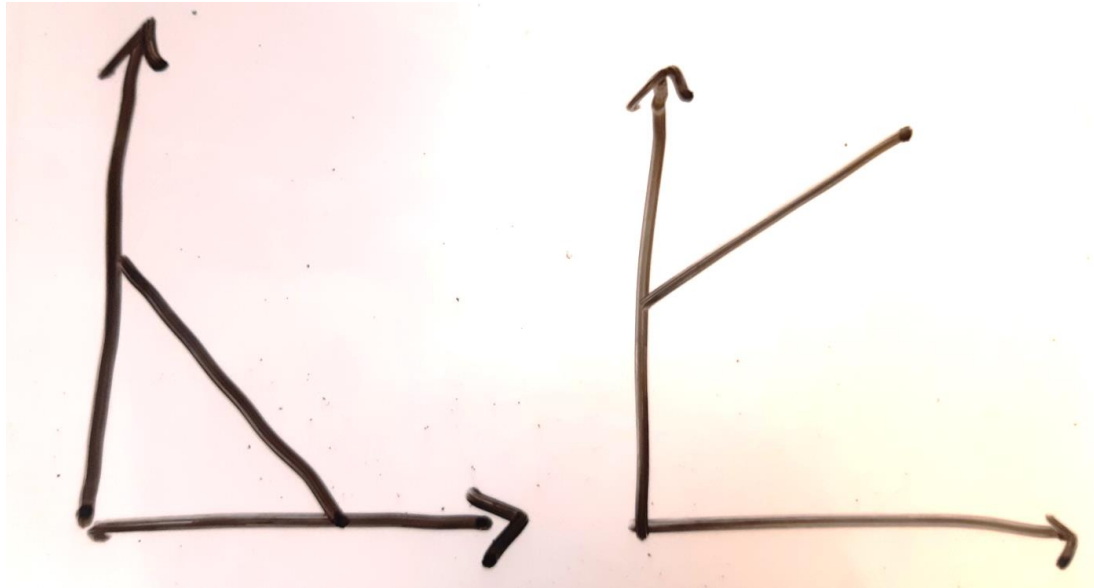
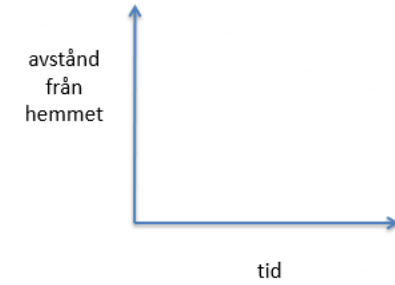
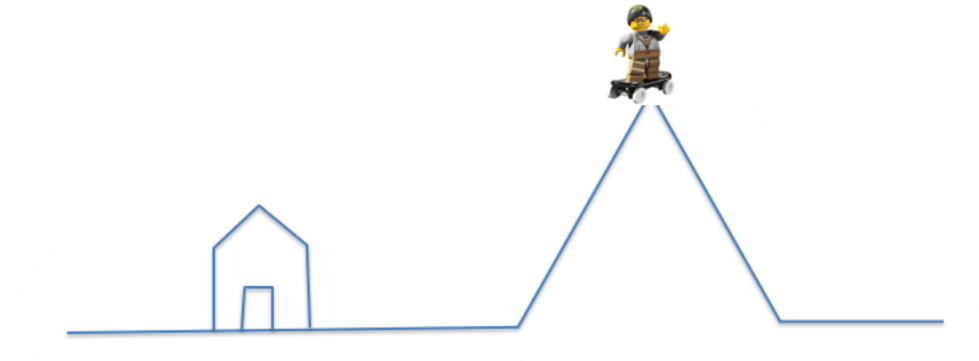
Tom åker skateboard från toppen.
Första gången åker han mot hemmet.
Andra gången åker han bort från hemmet.
Rita graferna till dessa åk



Tom åker skateboard från toppen.
Första gången åker han mot hemmet.
Andra gången åker han bort från hemmet.
Rita graferna till dessa åk



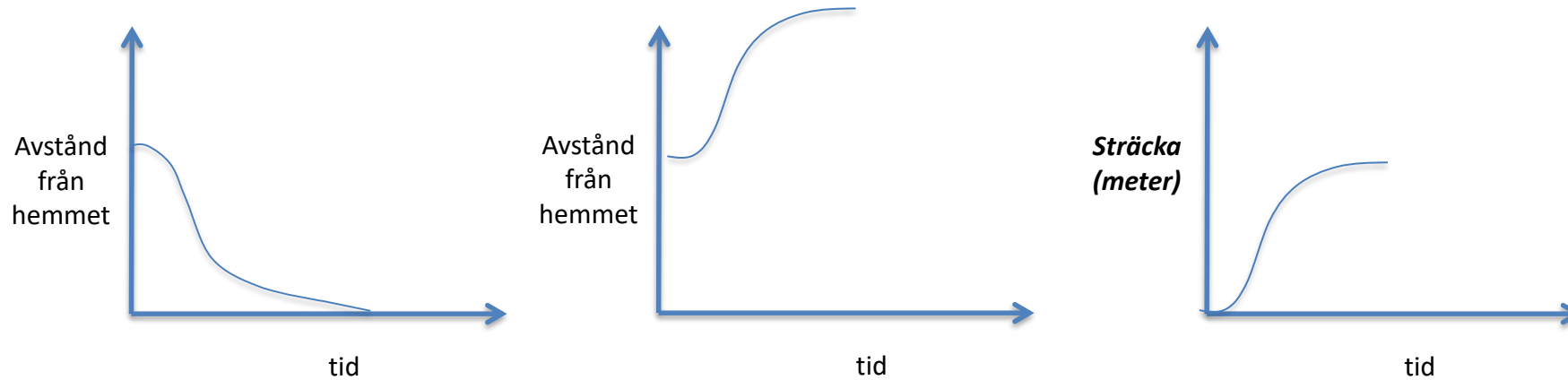
Tom åker skateboard från toppen.
Första gången åker han mot hemmet.
Andra gången åker han bort från hemmet.
Rita graferna till dessa åk



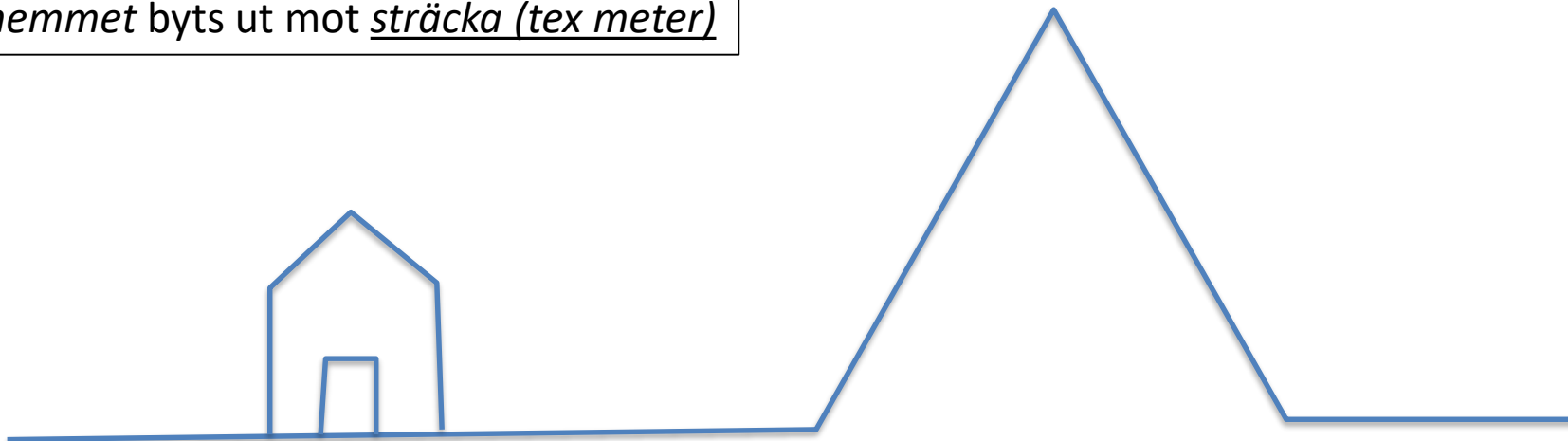
	metod	uppgift
USA	k	v
Japan	v	k

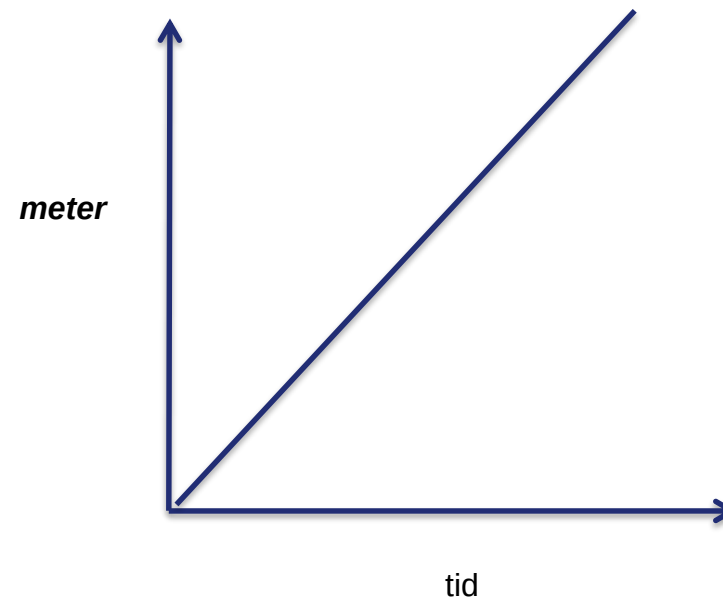
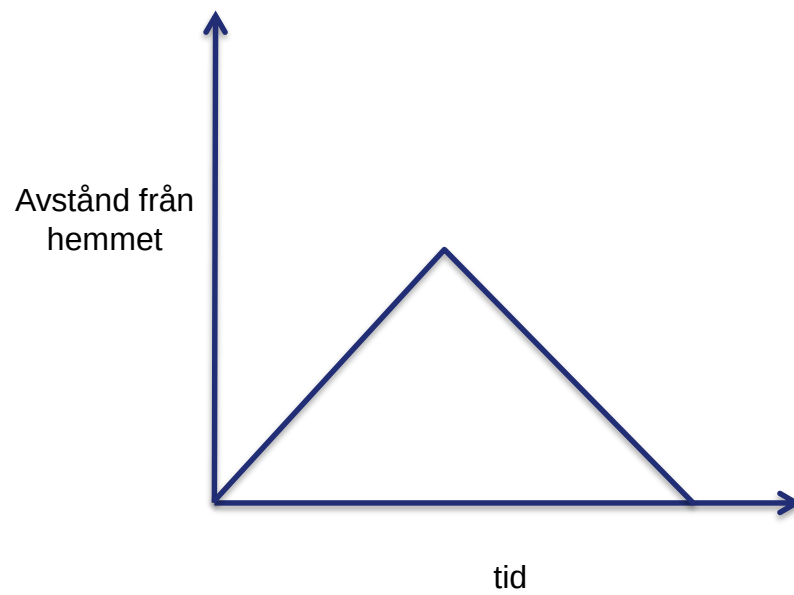
Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.*

Rita grafen till händelsen



Tom åker skateboard från toppen igen!!
Rita båda åken där *avstånd från hemmet* byts ut mot sträcka (tex meter)





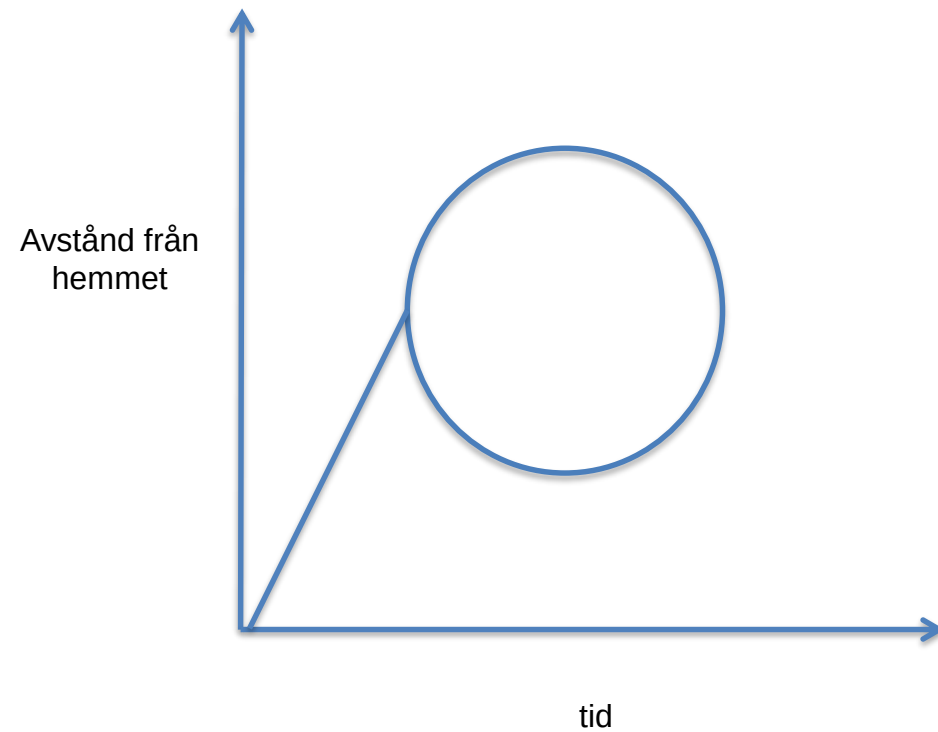
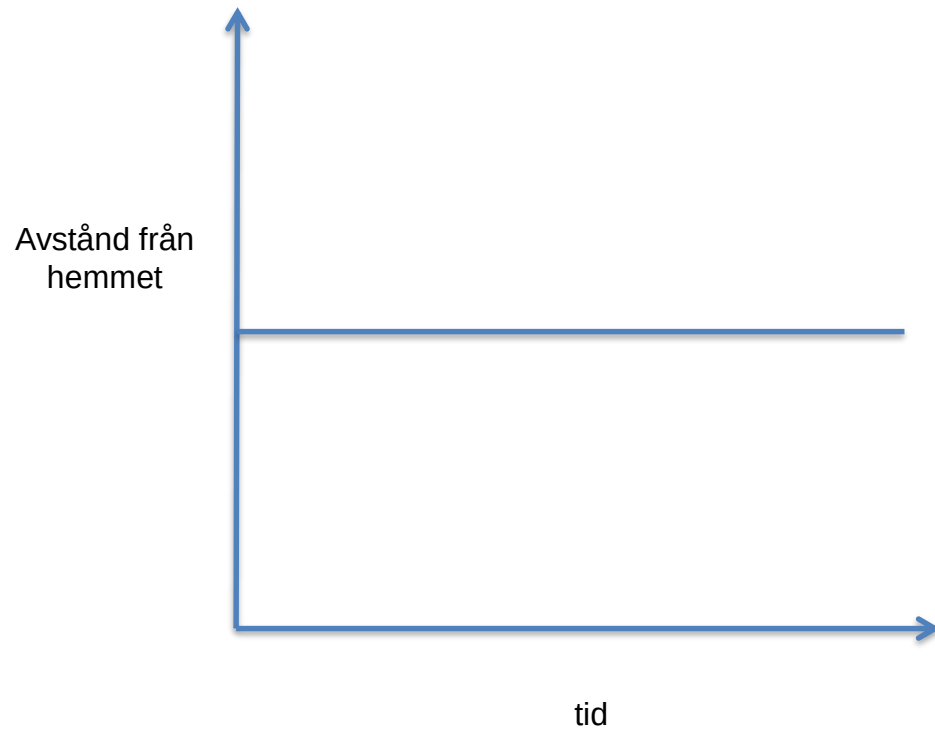
Gick rakt hemifrån i en stadig hastighet, vände om och gick tillbaka hem i samma stadiga hastighet?

Rita grafen till händelsen

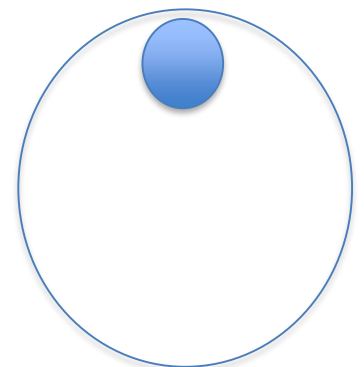
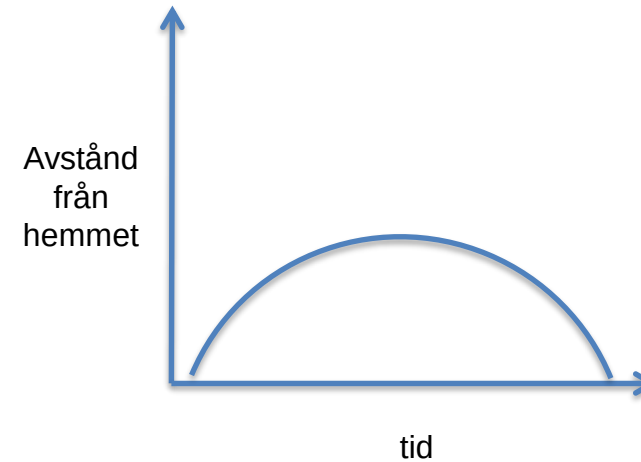
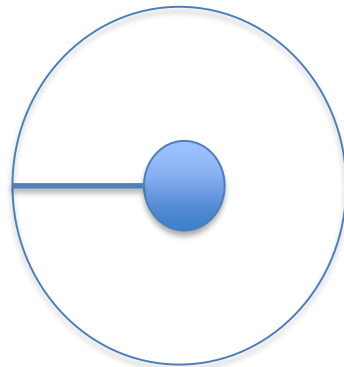
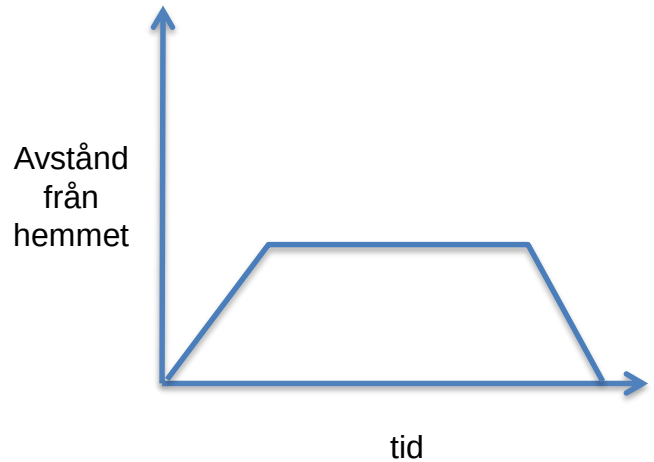
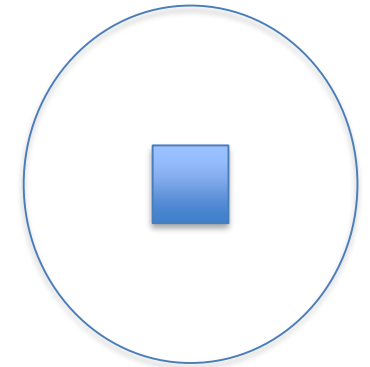
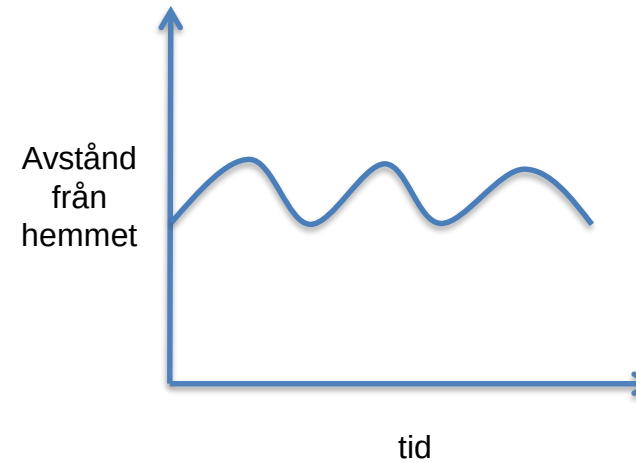
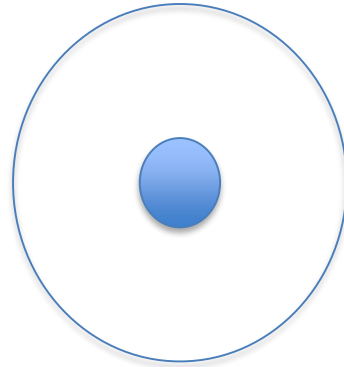
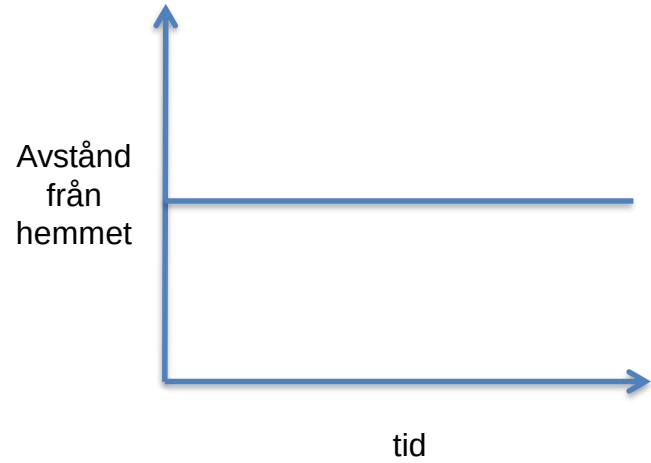
1. Sprang rakt hemifrån, halkade, reste sig och gick till skolan
2. Gick rakt hemifrån i en jämn hastighet upp och nedför en backe

Rita grafen till händelsen

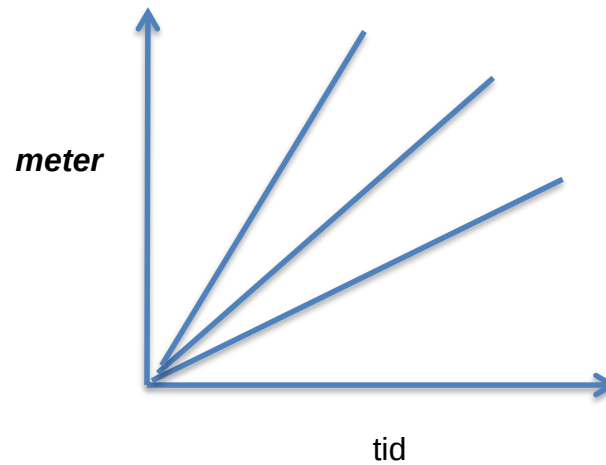
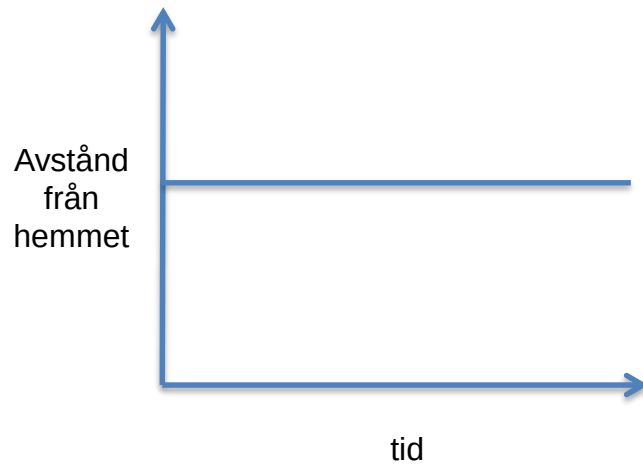
Tom gick i en cirkel runt huset



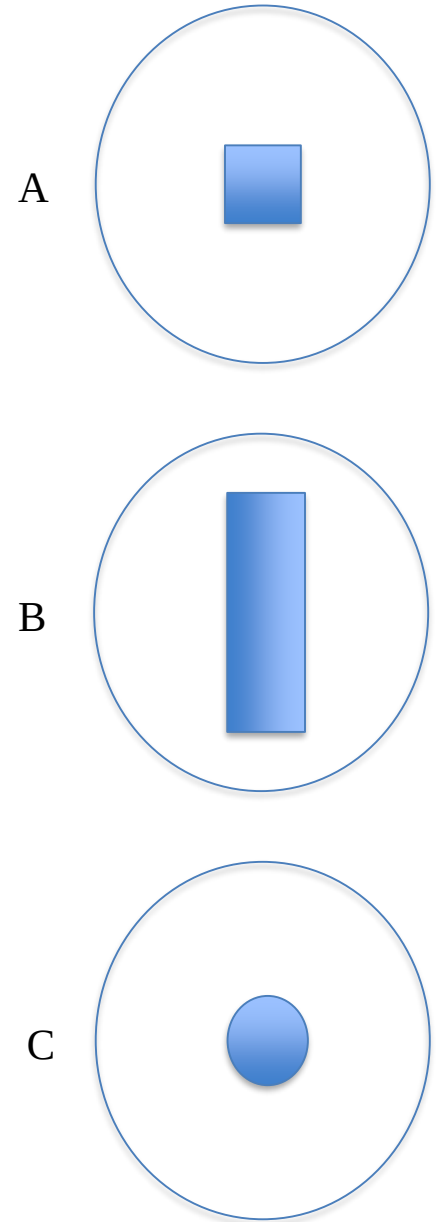
Gick i en cirkel runt huset



Rita grafen till händelsen



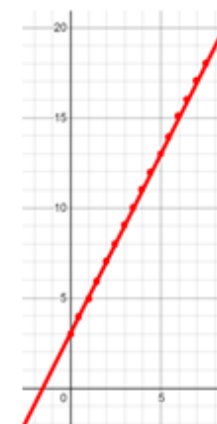
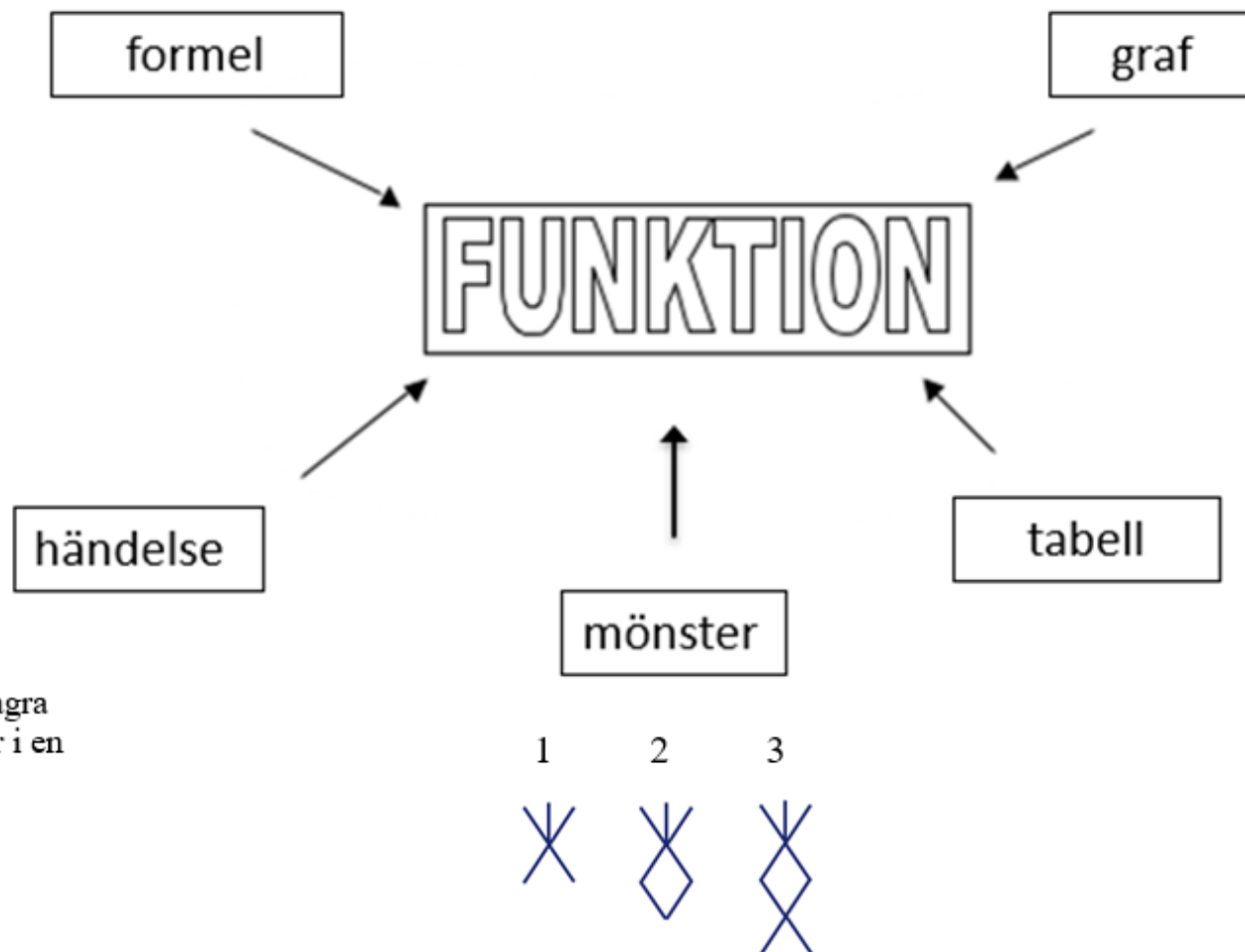
Tom: *går* ett varv i en cirkel runt hus C (i en jämn hastighet)
joggar ett varv i en cirkel runt hus C (i en annan jämn hastighet)
springer ett varv i en cirkel runt hus C (i ytterligare en annan jämn hastighet)



Ett annat lärandemål

- Att med heltal kunna utgå från en representation av räta linjens ekvation ($y = k \cdot x + m$) till att skapa alla andra:

$$y = 2 \cdot x + 3$$

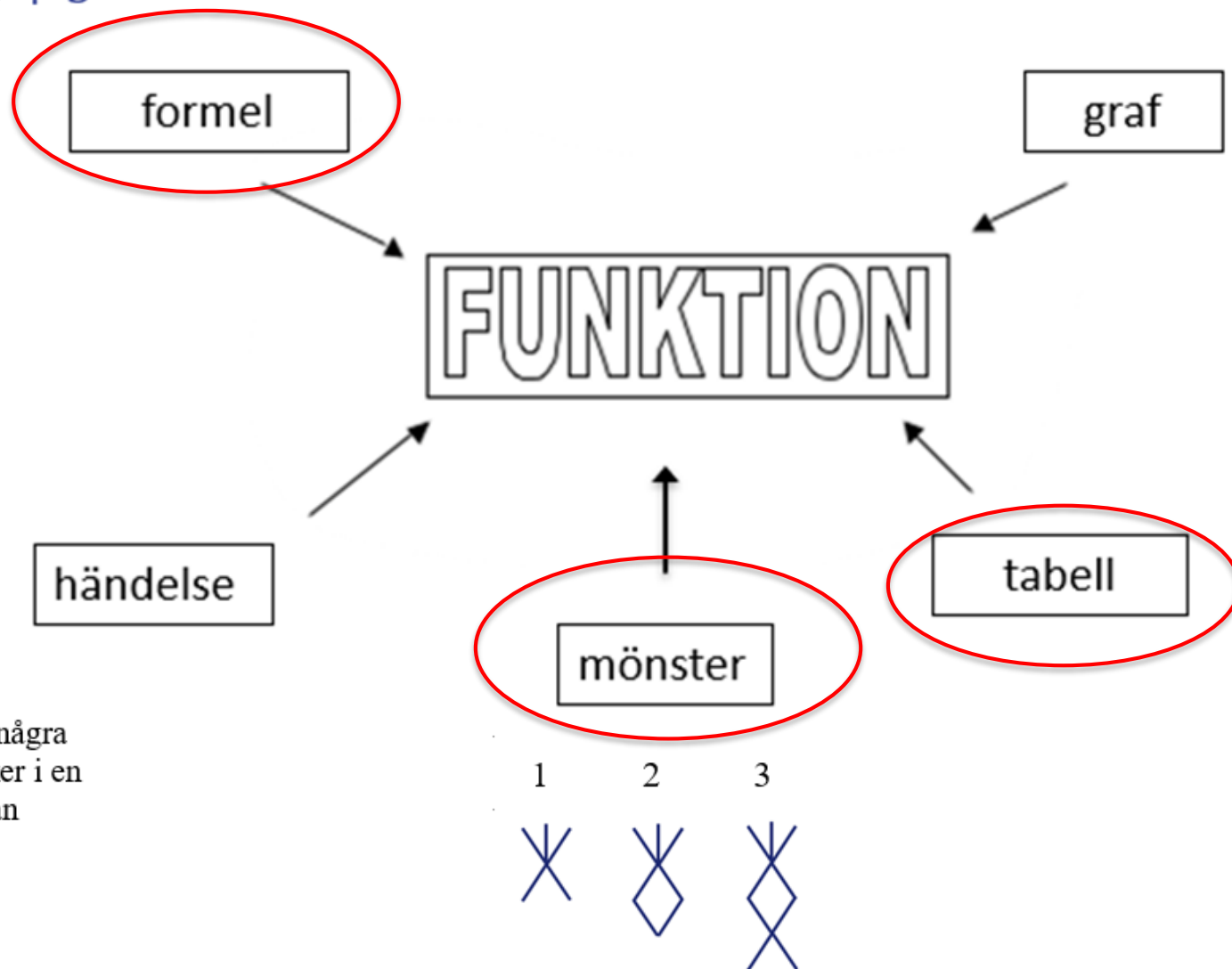


x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Tom hoppar på bussen några km från hemmet och åker i en jämn hastighet till skolan

Funktionens representationsformer

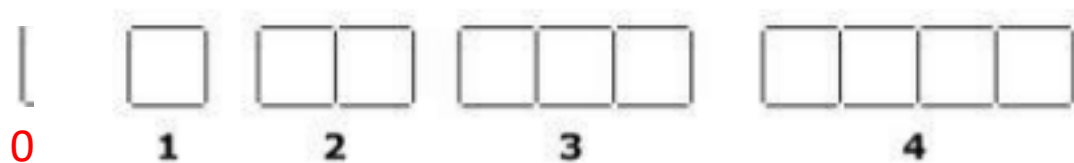
$$y = 2 \cdot x + 3$$



x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Tom hoppar på bussen några km från hemmet och åker i en jämn hastighet till skolan

Två frågor att använda sig av när ett mönster ska uttryckas som en formel



Hur stor är ökningen/minskningen av antal tändstickor mellan varje figur? **+3**

Hur många tändstickor finns det i figur 0? **1**

Formel: $y = 3x + 1$

Figur nummer (x)	Antal stickor (y)
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13

Från mönster till formel

$$\underline{n = 10}$$

• •

$$\underline{n = 20}$$

• •
•

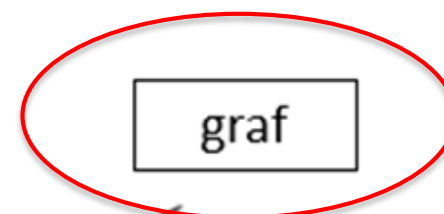
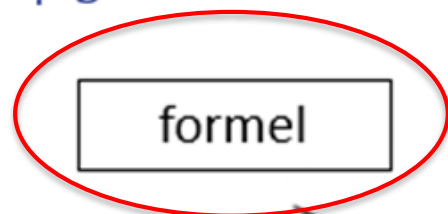
Hur stor är ökningen mellan varje figur?

Hur många prickar finns det i figur 0?

$$y = \frac{1}{10} \cdot x + 1$$

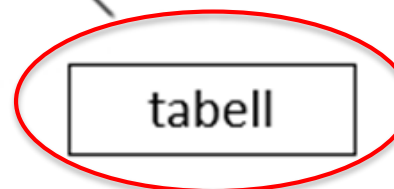
Funktionens representationsformer

$$y = 2 \cdot x + 3$$

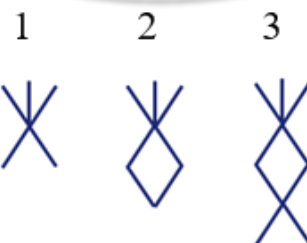
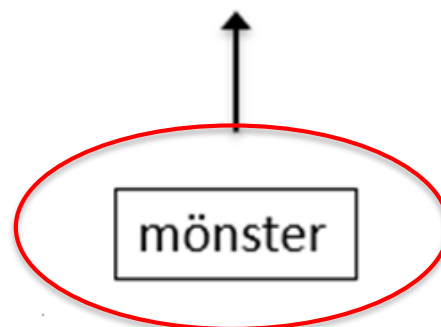


FUNKTION

händelse

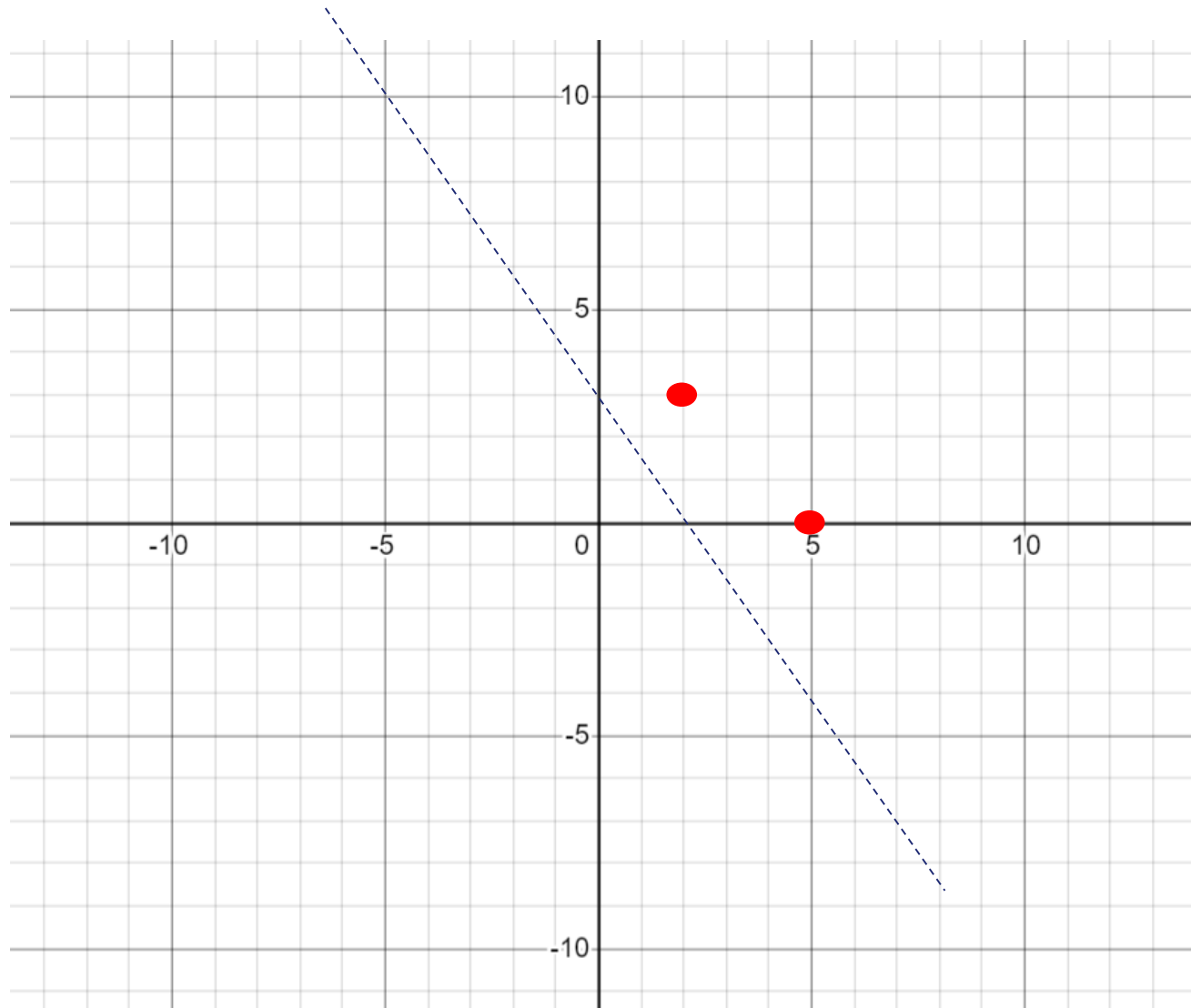


x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

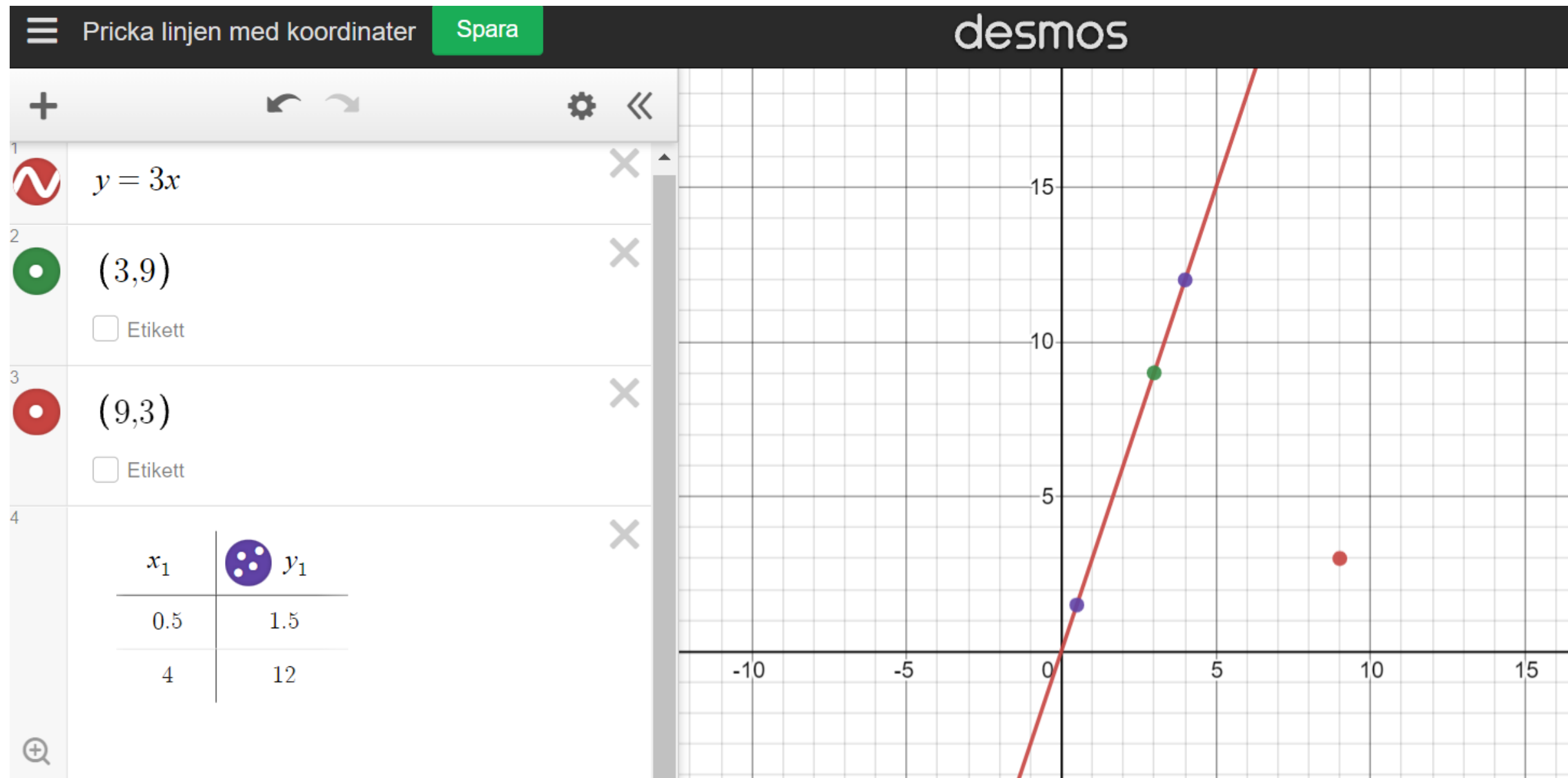


Tom hoppar på bussen några km från hemmet och åker i en jämn hastighet till skolan

Funktionen $y = 2 \cdot x + 3$ går att rita i ett koordinatsystem. Hur ser den ut där?



Pricka proportionella grafer med koordinater



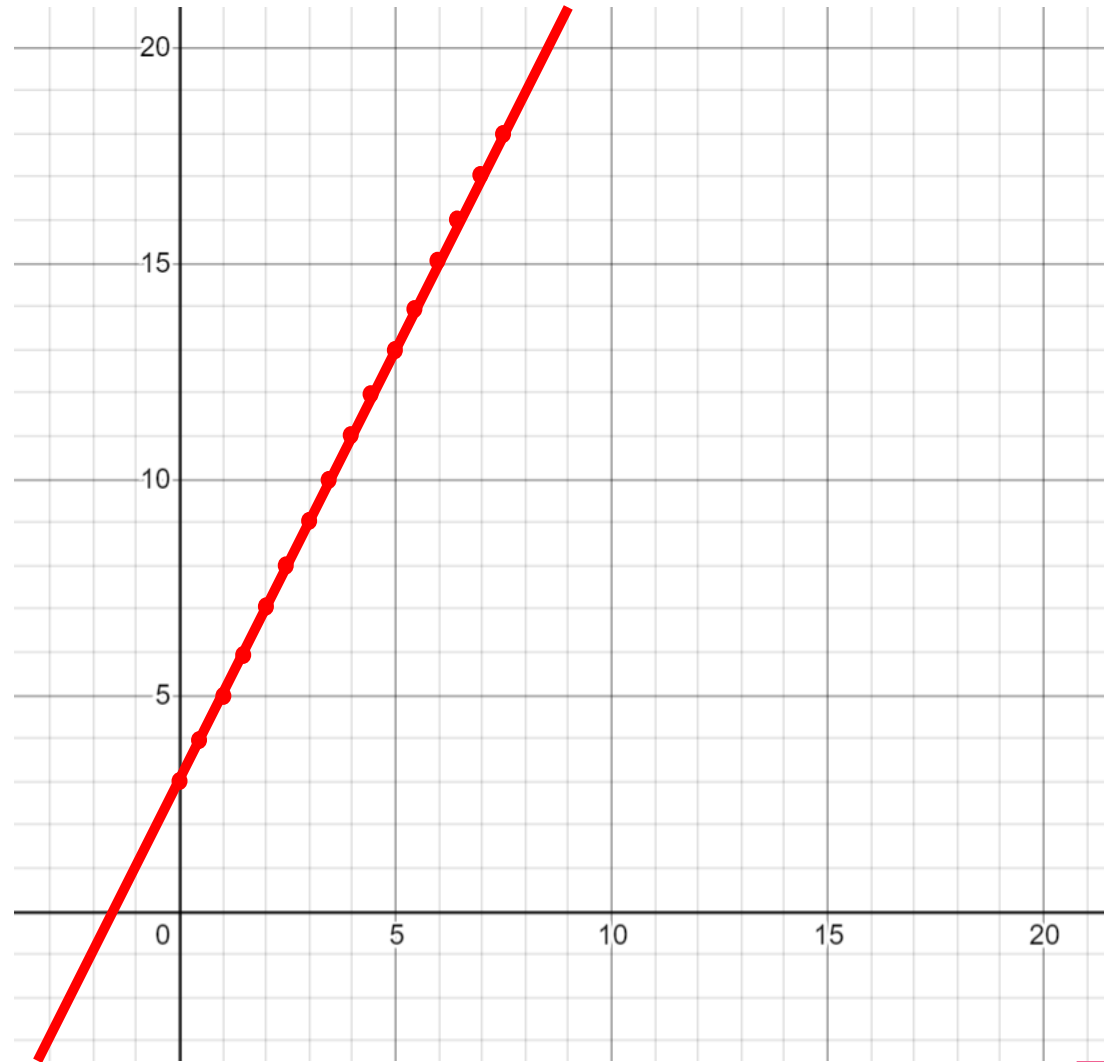
Desmos graph calculator

Gör en tabell till $y = 2 \cdot x + 3$

Var hamnar dessa punkter i kor.sys?

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

x	y
0,5	4
1,5	6
2,5	8
3,5	10
4,5	12
5,5	14



Vad är formeln till mönstret?

1



2

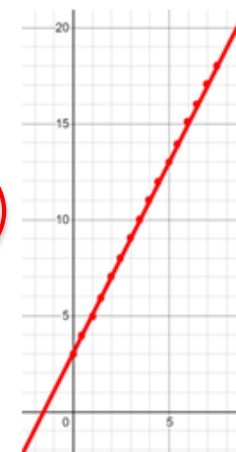
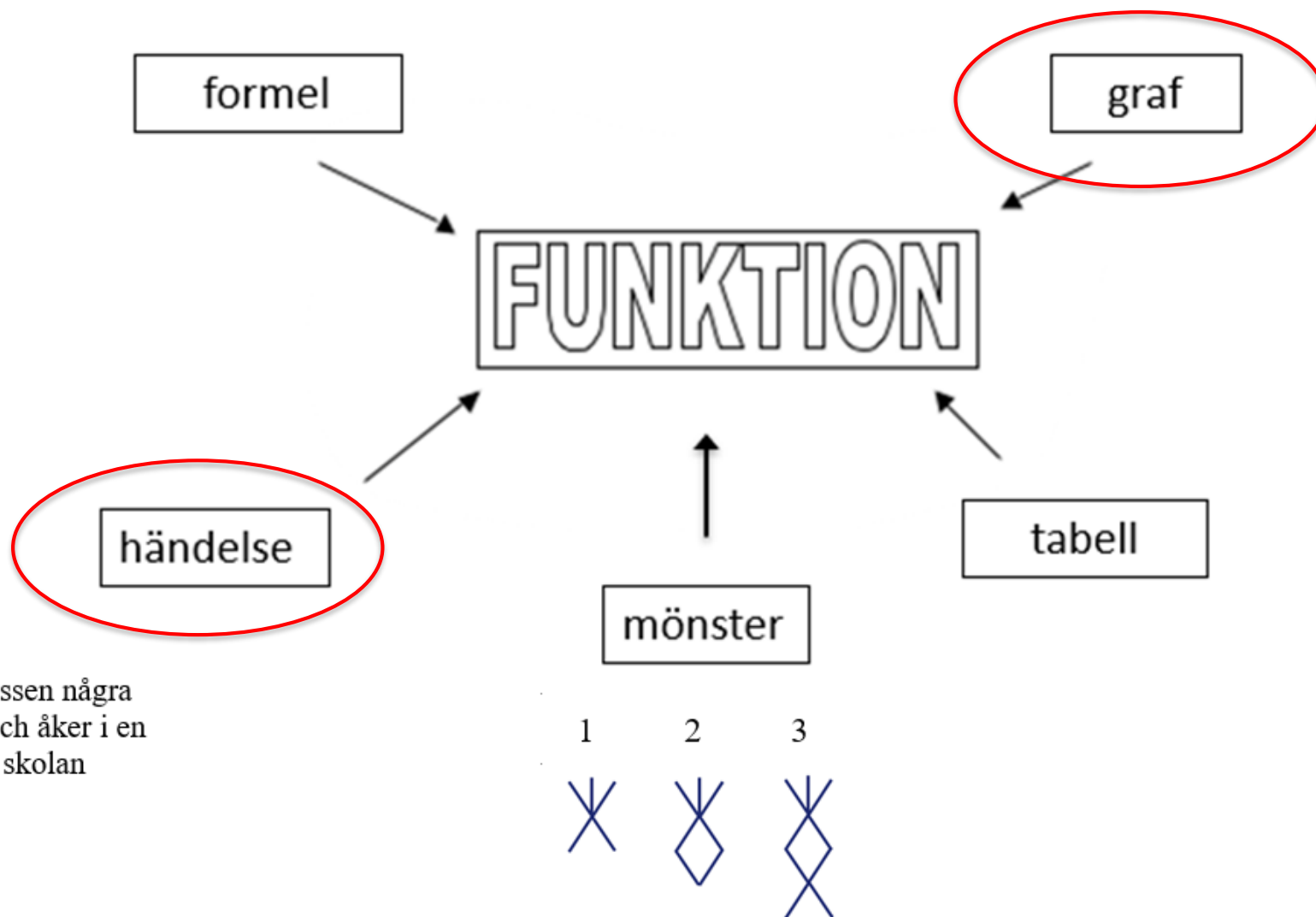


3



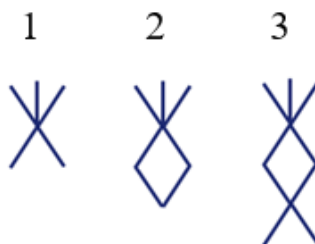
Funktionens representationsformer

$$y = 2 \cdot x + 3$$



x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Tom hoppar på bussen några km från hemmet och åker i en jämn hastighet till skolan



Gruppuppgift från händelse till graf

Uppgift C

Ni ska renovera köket i er lägenhet. Ni ska byta ut den fasta inredningen och ni känner att ni behöver hjälp av hantverkare. Det finns tre olika alternativ och ni ska välja ett av dem. Vilket ska ni välja?

Rita graferna till de olika alternativen. Ett tips kan vara att göra en värdetabell eller att hitta formler.

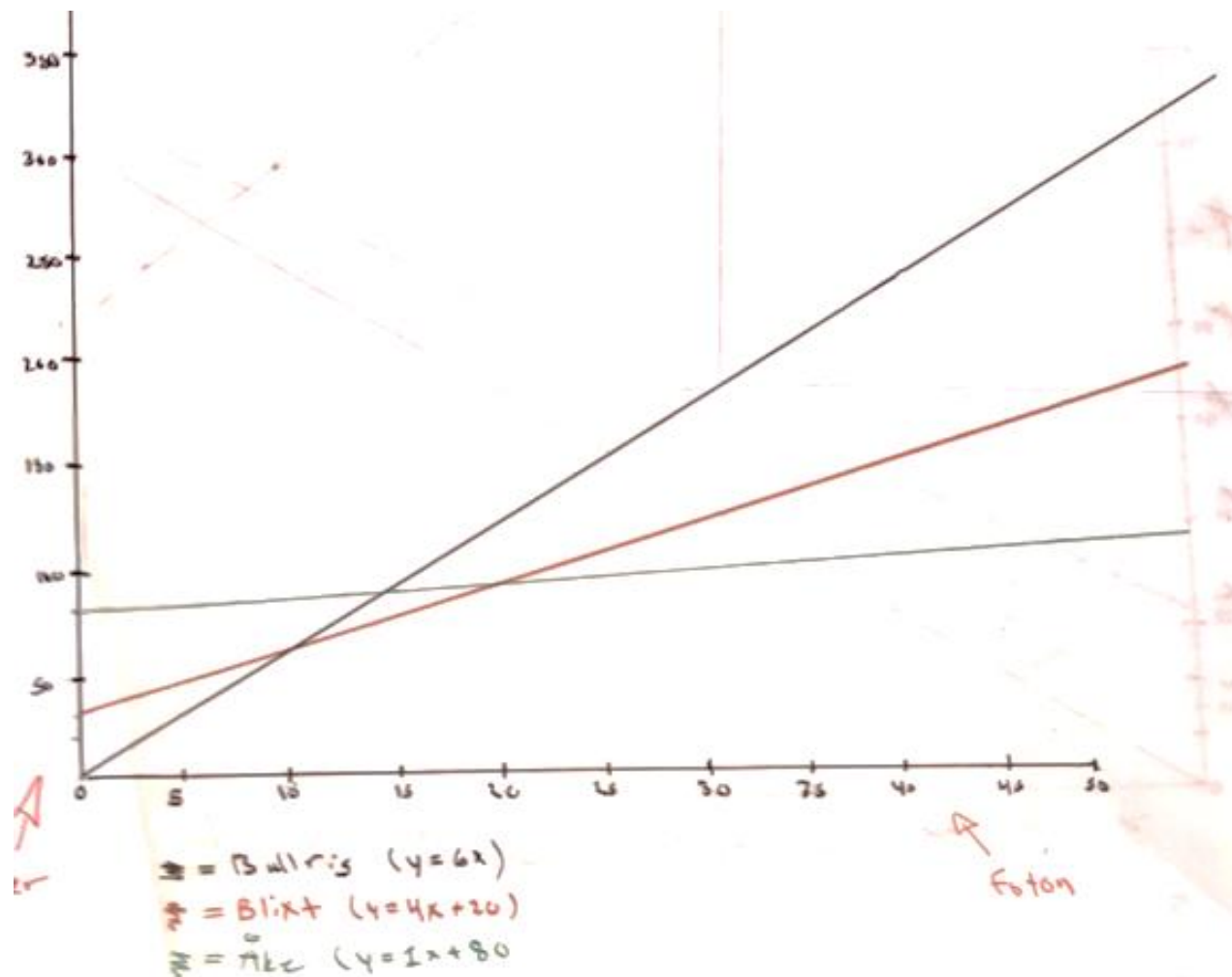
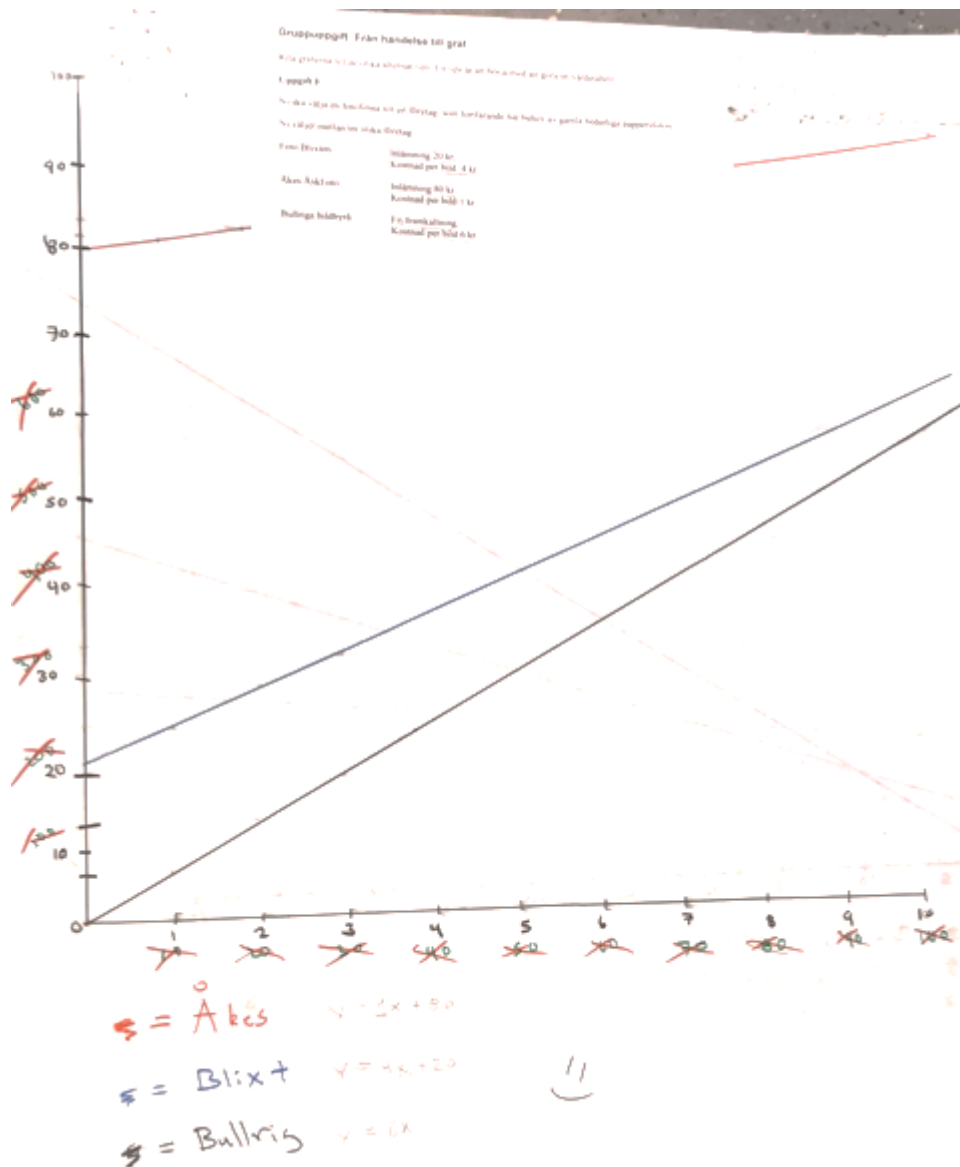
- A Köp köket och installationen till ett fast pris av 50 000 kr.
- B Köp köket för 30 000 kr och köksfirmans hantverkare för 400 kr/timme.
- C Köp köket för 20 000 kr (det fanns billigt på nätet) och hantverkare för 500 kr/timme.

Uppgift A

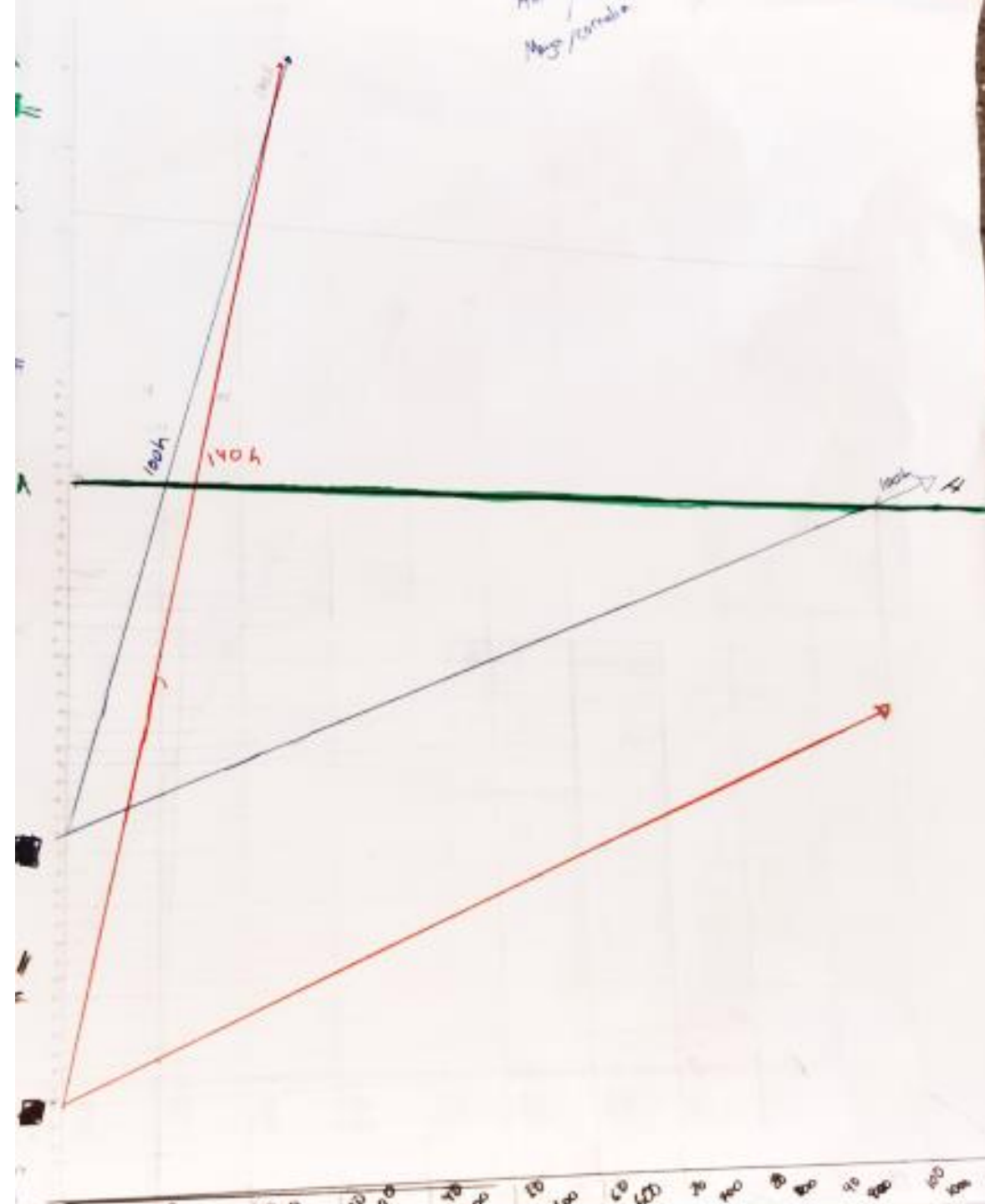
Klara ska välja telefonabonnemang. Hon väljer mellan tre olika abonnemang. Vilket ska hon välja?

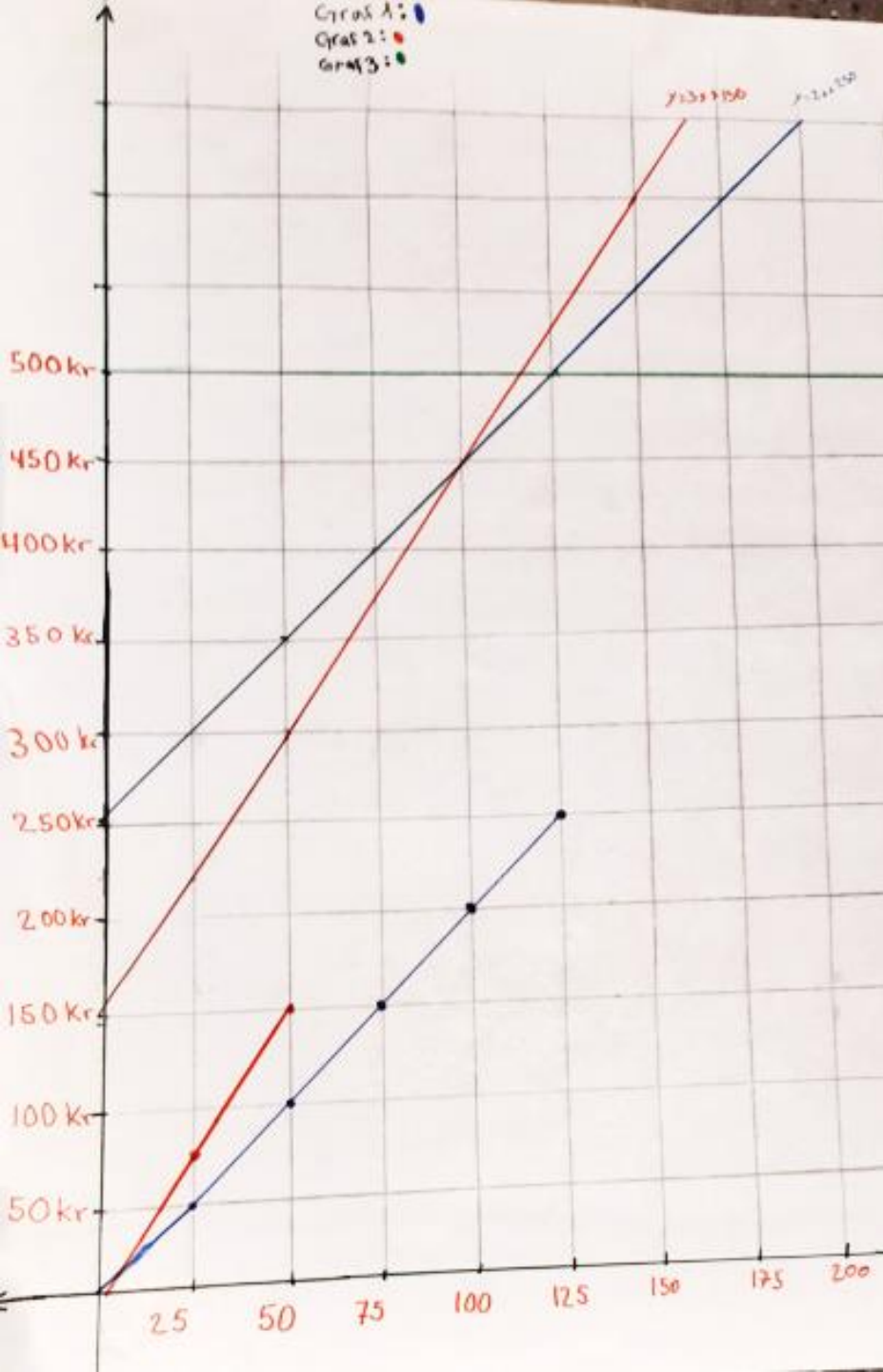
- ☐ Fast månadskostnad 250 kr.
20 kr per Gigabyte.
- ☐ Fast månadskostnad 150 kr.
30 kr per Gigabyte.
- ☐ Fast månadskostnad 500 kr.
Fri surf

Kritisk aspekt – axlarnas gradering



Kritisk aspekt – axlarnas gradering





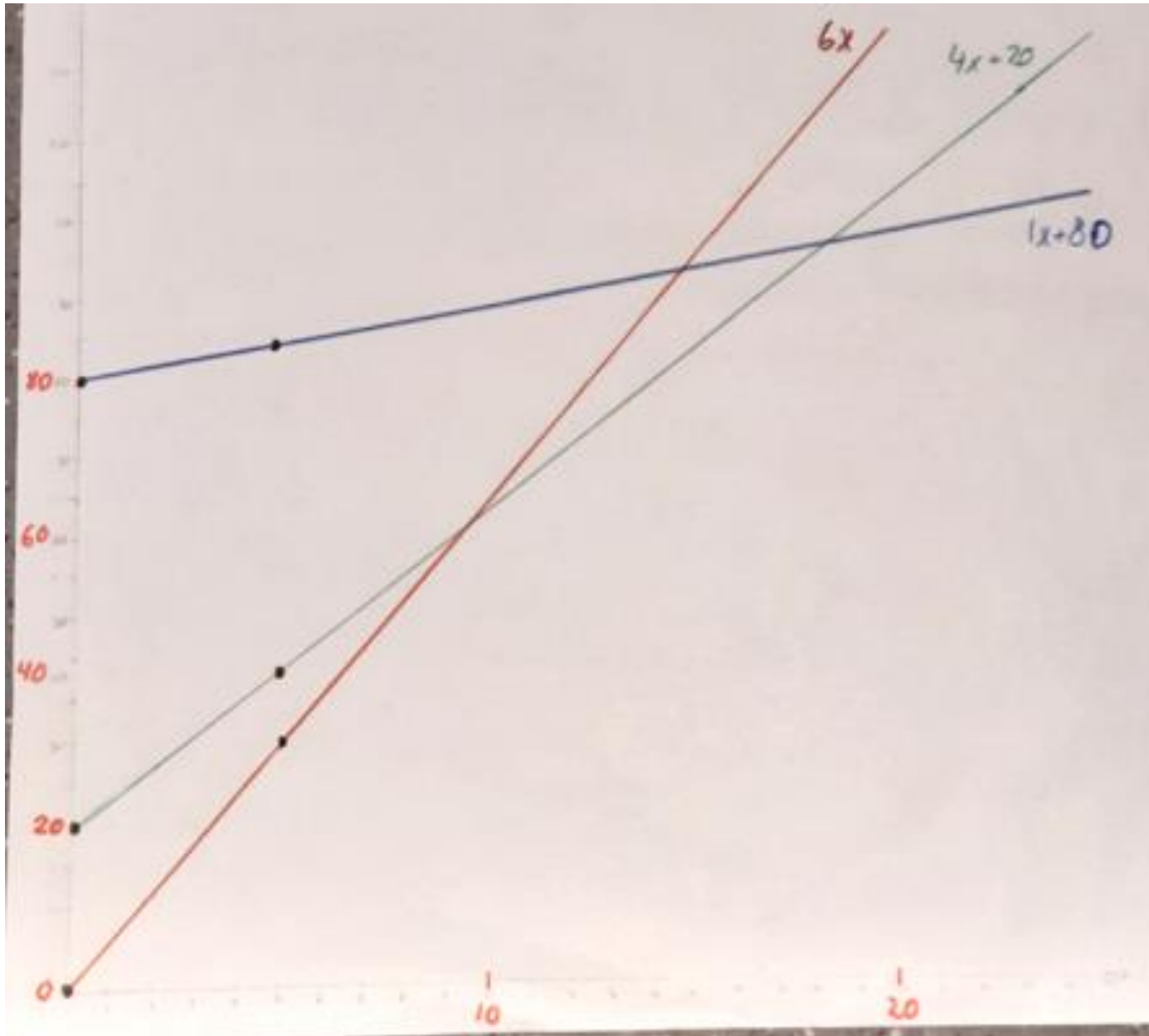
Kritisk aspekt: $(0, m)$ i grafen $y = k \cdot x + m$

Uppgift A

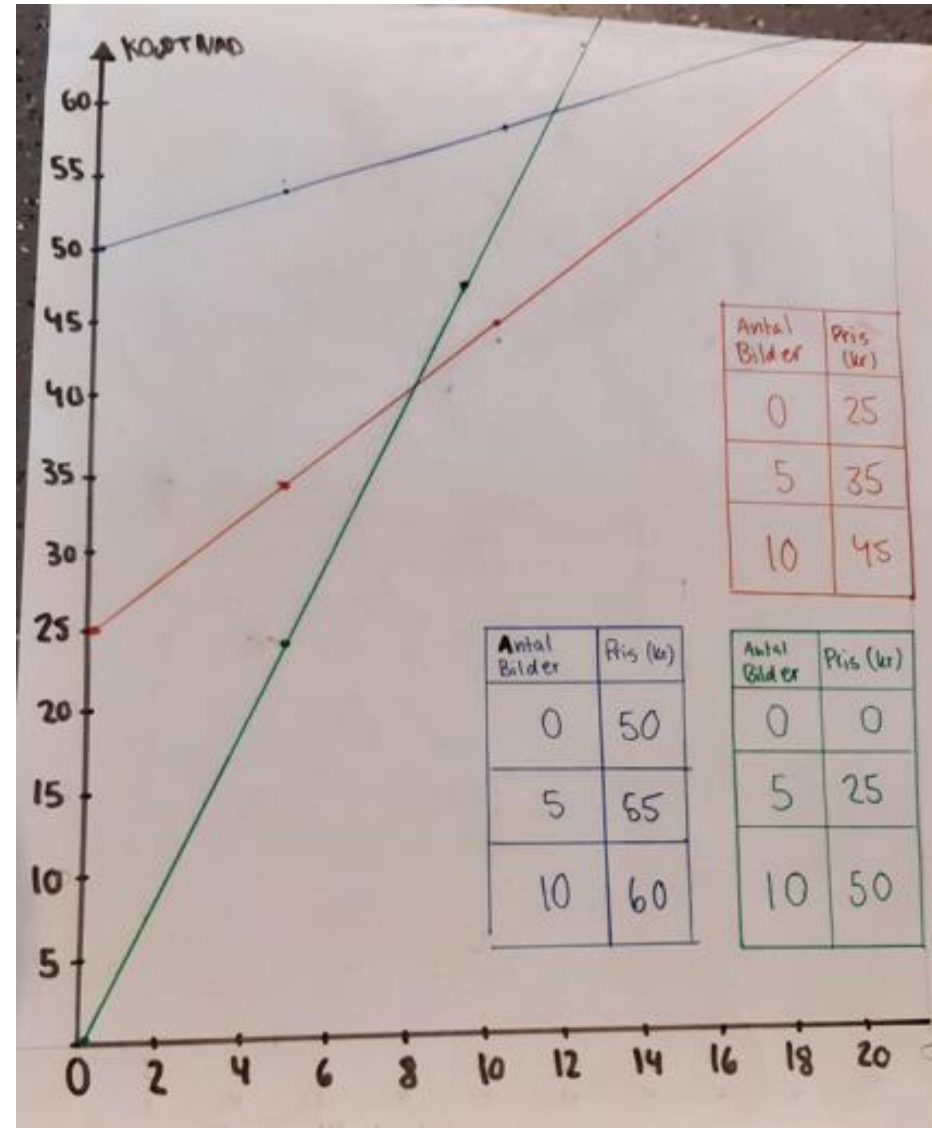
Klara ska välja telefonabonnemang. Hon väljer mellan tre olika abonnemang. Vilket ska hon välja?

- ☐ Fast månadskostnad 250 kr.
20 kr per Gigabyte.
- ☐ Fast månadskostnad 150 kr.
30 kr per Gigabyte.
- ☐ Fast månadskostnad 500 kr.
Fri surf

Formler hittas med hjälp av text. Grafer ritas med hjälp av två punkter

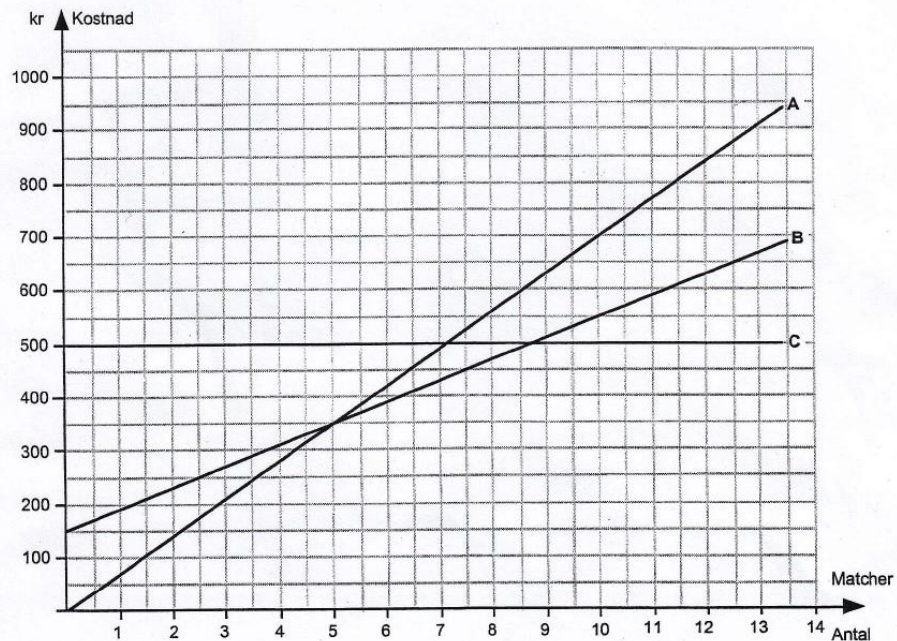


Nästa steg att uttrycka grafer som formler utan att "plotta"

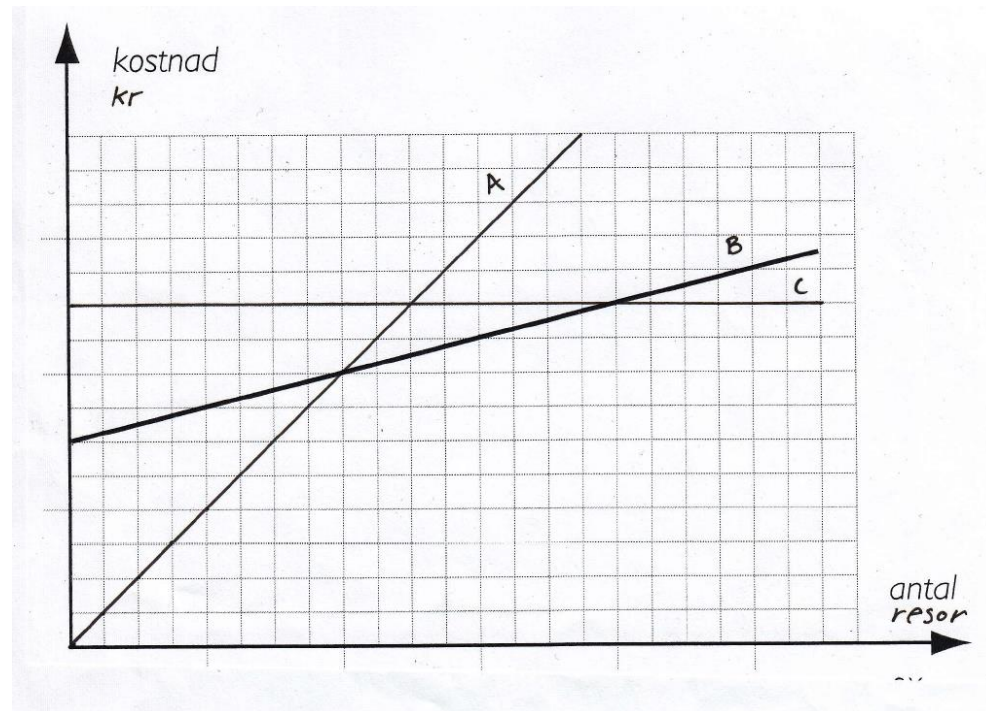


Grupppuppgift: Nästa lärandemål (Från graf till formel)

A



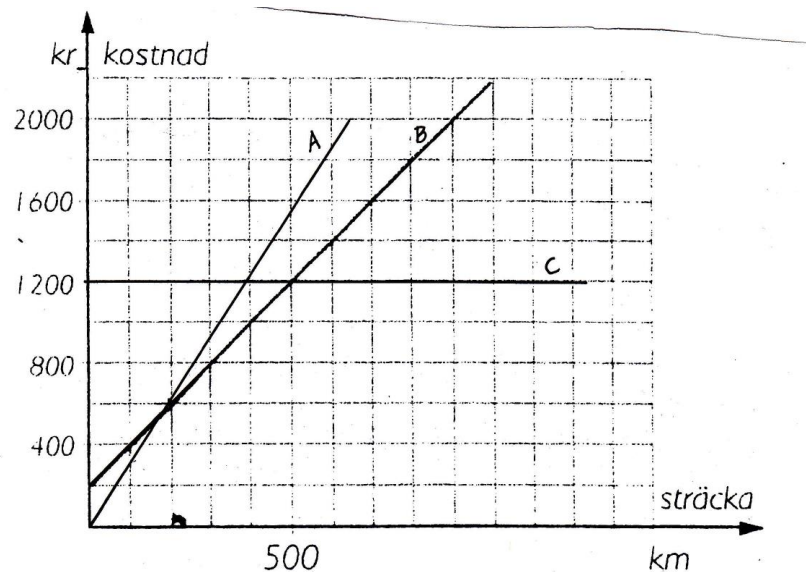
C



Testa två olika graderingar och undersök vad som händer med formlerna

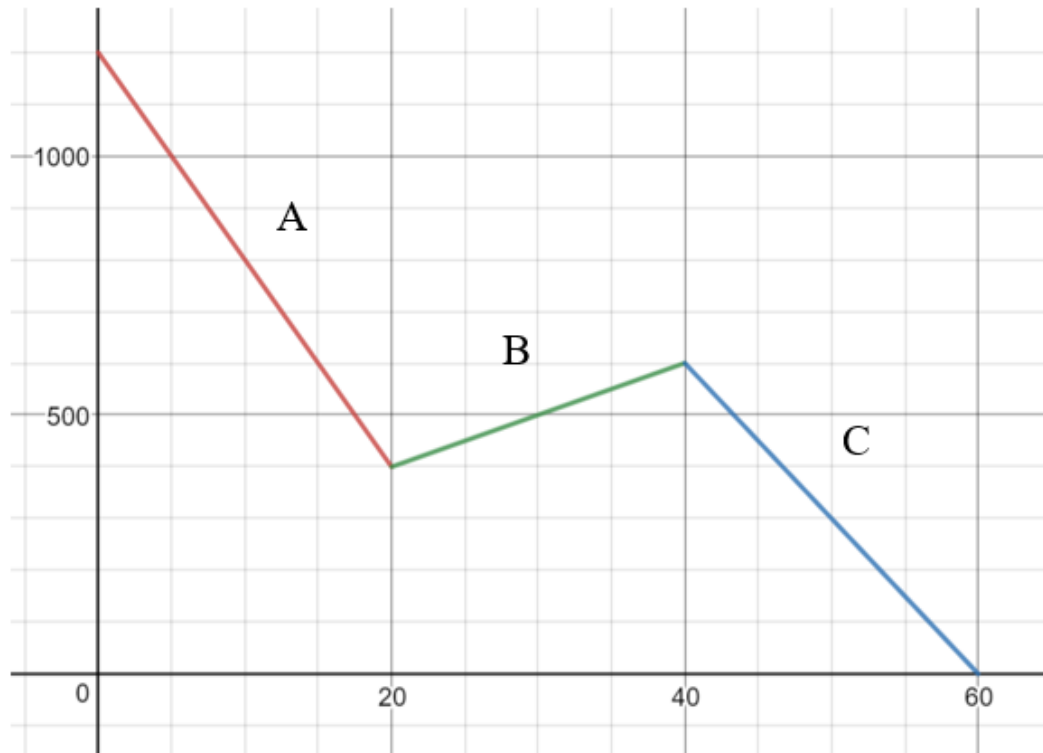
Vi diskuterar era olika varianter i helklass. Var beredda på att förklara hur ni bestämde k- och m - värde

B



Bestäm formlerna till de 3 graferna i var och en av diagrammen

Exempel på skriftlig examinationsuppgift



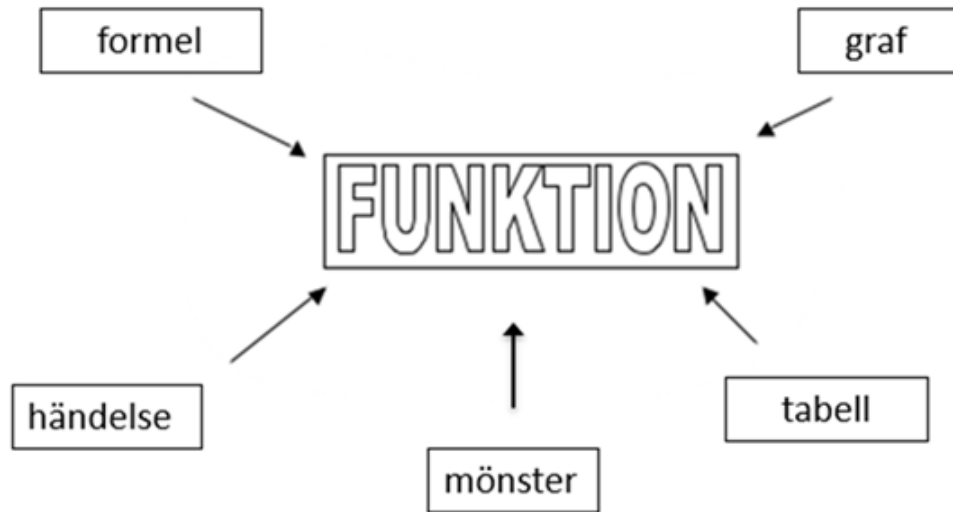
Grafen ovan visar snödjupet (i mm) i en by i Norrland under 60 dagar

- Formulera med ord en berättelse som motsvarar grafen.
- Teckna en formel för vardera linjen A, B och C. Visa hur du använder värden i grafen för att bestämma de tre funktionerna.

Exempel på muntlig examinationsuppgift

A

Examinationsuppgift för "the Funky Course" år 9

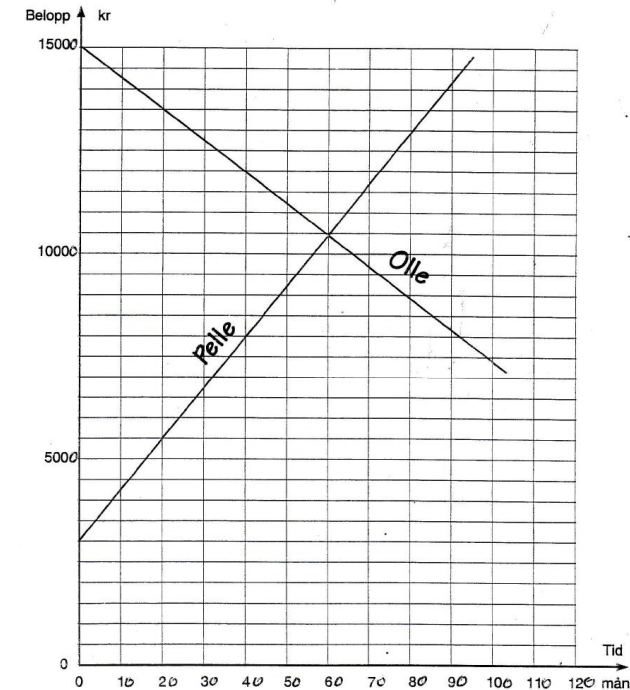
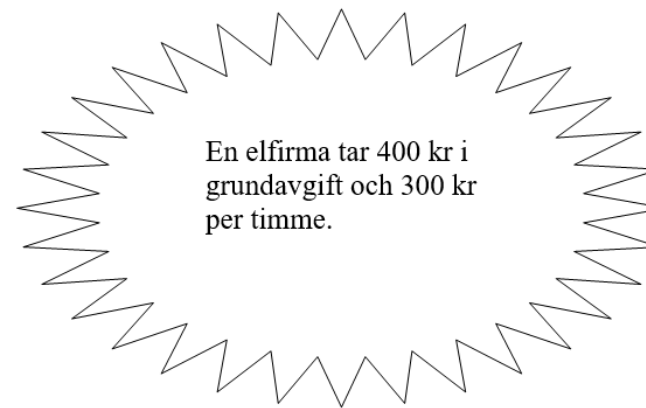
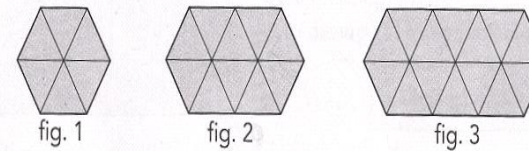


Studera bilden ovan. Er uppgift i den här examinationen är att ta texten/grafen/mönstret eller formeln ni får på det här pappret och "översätta" det till så många som möjligt av de andra tre.

Ju fler sätt och ju tydligare presenterat desto bättre genomförd examination

Lycka till!

I byn Öjersjö finns 3 500 invånare och antalet invånare ökar med 250 personer per år. Byn Genarp har 7 500 invånare men här minskar antalet invånare med 150 personer per år. Efter hur många år kommer de båda byarna att ha samma antal invånare?



Fundera på: Individualisering

Är **individualisering** samma sak som att undervisa en elev åt gången om ett innehåll på varje elevs nivå?

Kan inte **individualisering** vara att undervisa många elever på allas nivå samtidigt?

Dilemmat diskuteras i Lindensjö & Lundgren (2002)

Tack!

