Att designa för elevers deltagande i ett algebraiskt arbete

Elever i årskurs 2 och 3 utforskar visuellt växande mönster

JENNY FRED

Artikelns syfte är att beskriva och analysera vad i olika lektionssekvenser som skapar förutsättningar för att elever ska engageras i ett algebraiskt arbete och därmed urskiljer kritiska aspekter. Artikeln bygger på data från tre forskningslektioner i vilka lärandeverksamhet (*learning activity*) tillsammans med Radfords arbete om mönstergeneraliseringar har utgjort teoretiska utgångspunkter. I analysen har didaktiska principer från lärandeverksamhet samt kritiska aspekter gällande att uttrycka och argumentera för mönstergeneraliseringar fungerat som analysredskap. Resultatet kan bidra till att fördjupa förståelsen gällande på vilka sätt principerna från lärandeverksamhet kan stödja ett etablerande och upprätthållande av ett algebraiskt arbete och därmed möjliggöra för elevers urskiljande av kritiska aspekter.

Inom forskningsfältet som idag benämns *early algebra* (se t ex Cai & Knuth, 2011; Kaput, 2007; Lins & Kaput, 2004; Radford, 2006, 2010a, 2010b, 2014) argumenteras för att elever redan i de lägre årskurserna behöver introduceras till ett algebraiskt arbete[1], för att därmed stödja framväxten av ett algebraiskt tänkande. Elever i yngre åldrar som engageras i ett algebraiskt arbete förväntas fokusera på att uppmärksamma, generalisera, kommunicera och argumentera för matematiska strukturer. Följaktligen behöver inriktningen i undervisningen riktas mot matematiska strukturer snarare än på bemästrandet av matematiska operationer (se t ex Radford, 2012).

Mönster och generaliseringar föreslås som en möjlig ingång till algebra i de lägre årskurserna (Mason, 1996; Radford, 2006; Warren, 2005). Matematiska mönster har en inneboende struktur gällande hur mönstrets olika delar är organiserade som kan vara föremål för ett utforskande arbete av strukturer och generaliseringar (Mulligan & Mitchelmore,

Jenny Fred
Stockholms universitet

Fred, J. (2019). Att designa för elevers deltagande i ett algebraiskt arbete – elever i årskurs 2 och 3 utforskar visuellt växande mönster. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 24 (3-4), 107–130.

2009). En undervisning som tar sin utgångspunkt i mönster med fokus på matematiska strukturer och generaliseringar antas främja framväxten av elevers algebraiska tänkande (se t ex Blanton & Kaput, 2011; Radford 2006).

Undervisning utgörs av ett komplext samspel mellan uppgifter, instruktioner, orkestrering av elevers arbete, kunskapsinnehållet samt eleverna och läraren (Lindberg, 2010; Newman, Griffin & Cole, 1989). I relation till uppgiftsdesign framhåller Strømskag (2015) betydelsen av själva frågeställningen i uppgiften och vad den riktar elevers uppmärksamhet mot. Vidare betonar Strømskag att uppgifter som endast fokuserar antalet komponenter i mönster, och inte dess inneboende multiplikativa strukturer, inte är gynnsamma för utvecklingen av algebraiskt tänkande. I relation till orkestrering av elevers arbete framställs bland annat lärares förmåga att identifiera, agera och utnyttja betydelsefulla matematiska situationer som uppstår i undervisningen (Blanton & Kaput, 2011; Larsson, 2015; Warren, 2005). Vidare betonar Larsson (2015) behovet av medierande redskap för att kunna hantera helklassdiskussioner som tar sin utgångspunkt i elevers olika idéer. Ryve, Larsson och Nilsson (2011) framhåller att elever behöver erbjudas medierande redskap för tänkande och kommunikation i form av tabeller, siffror och muntliga uttryck.

I så väl planeringen som genomförandet av undervisningen är bland annat lärares förmåga att bygga in förutsättningar för algebraisk tänkande i instruktionerna och frågorna central. Instruktioner, frågor och medierande redskap har alltså i denna artikel en central roll gällande att skapa förutsättningar för att elever engageras i ett algebraiskt arbete med visuellt växande mönsters matematiska strukturer.

I relation till det kunnande eleverna ska utveckla understryker Runesson (2011) och Kullberg (2011) betydelsen av att elever får möjlighet att urskilja det de beskriver som *kritiska aspekter*, det vill säga aspekter av ett specifikt och avgränsat kunskapsinnehåll som i relation till en specifik elevgrupp kan antas vara avgörande för deras lärande. Aspekterna anses vara kritiska då eleverna ännu inte har urskilt dem. För att avsett lärande ska äga rum behöver eleverna urskilja de kritiska aspekterna. Att i design av undervisning ta utgångspunkt i kritiska aspekter gällande exempelvis ett avgränsat algebraiskt kunskapsinnehåll har i tidigare studier visat sig vara gynnsamt för elevers lärande (se t ex Fred & Stjernlöf, 2015).

För att designa en undervisning som engagerar elever i ett algebraiskt arbete krävs kunskaper om uppgiftsdesign och design av orkestrering av klassrumsarbetet som kan skapa förutsättningar för att elever engageras i ett algebraiskt arbete. Vidare krävs kunskaper gällande det kunskapsinnehåll som undervisningen ska riktas mot. Syftet med denna artikel är att beskriva och analysera vad i olika lektionssekvenser som skapar förutsättningar för att elever ska engagera sig i ett algebraiskt arbete och därmed få möjlighet att urskilja ett antal identifierade kritiska aspekter gällande förmågan att uttrycka och argumentera för algebraiska mönstergeneraliseringar (Fred & Boistrup, 2017, se vidare nedan). Följande fråga adresseras: På vilka sätt kan didaktiska principer för lärandeverksamhet stödja ett etablerande och ett upprätthållande av ett algebraiskt arbete och därmed möjliggöra för ett urskiljande av kritiska aspekter?

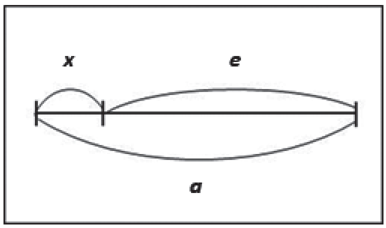
Teoretiska utgångspunkter

Artikeln bygger på data som utgår från Davydovs (2008) lärandeverksamhet (*learning activity*) tillsammans med Radfords arbete (t ex 2006, 2010a, 2010b, 2011) om mönster och mönstergeneraliseringar som teoretiska utgångspunkter.

Lärandeverksamhet

Lärandeverksamhet (Davydov, 2008) är ett teoretiskt och didaktiskt ramverk som har sin grund i Vygotskijs (2001) kulturhistoriska perspektiv och Leontievs (1978) verksamhetsteori. I ett kulturhistoriskt perspektiv ses lärande som ett förändrat deltagande (handlande) i en specifik praktik som är kulturellt och historiskt utvecklad (Davydov, 2008). Bemästrande av praktikspecifika redskap ses som en aspekt av vad det innebär att vara kunnig. Vidare betonas att elever för att lära sig behöver försättas i problemsituationer som utmanar till ett teoretiskt arbete, i vilket eleverna själva är aktiva agenter (Eriksson, 2017). Intentionen med en lärandeverksamhet är att skapa förutsättningar för att elever ska kunna engagera sig i ett teoretiskt arbete där de kollektivt och aktivt konstruerar och utvecklar systematiska och vetenskapliga begrepp inom specifikt kunskapsinnehåll (Davydov, 2008; Repkin, 2003). Lärandeverksamhet tillhandahåller principer om hur undervisning, uppgifter och klassrumskommunikation kan designas så att elever engageras i ett teoretiskt (läs här algebraiskt) arbete. Tre centrala didaktiska principer är 1) skapandet av innehållsliga *problemsituationer,* 2) skapandet och etablerandet av *lärandemodeller* och 3) skapandet eller framlyftandet av *motsättningar* (Eriksson, 2017, se även Björk, Nikula, Stensland & Stridfält, 2019; Eriksson m fl, 2019)

I lärandeverksamhet har lärandemodeller en central betydelse gällande att möjliggöra för elever att kollektivt engagera sig i ett teoretiskt arbete. Det är i målet att lösa ett givet problem som arbetet med lärandemodellen tar form. Idén är att lärandemodellen ska fungera som ett redskap i det kollektiva teoretiska arbetet genom att lärandemodellen skapas, rekonstrueras och/eller bearbetas (Davydov, 2008; Gorbov & Chudinova, 2000). Lärandemodeller kan vara materiella, ikoniska eller semiotiska och tar bland annat form som scheman, skisser, sträckor eller symboler (Davydov, 2008). Centralt är att lärandemodellen fångar teoretiska aspekter av det kunskapsinnehåll som ska läras och att det sedan är genom att eleverna skapar, rekonstruerar och bearbetar lärandemodellen som de får tillgång till kunskapsinnehållet (Eriksson, 2018; Gorbov & Chudinova, 2000). I figur 1 visas ett exempel på en lärandemodell.



Figurl. *Exempel på lärandemodell*[2]

Lärandemodellen i figur 1 syftar till att gestalta relationen mellan *a*, *x* och *e* och intentionen är att den därmed ska möjliggöra för eleverna att genom ett teoretiskt arbete utforska strukturer och relationer i algebraiska uttryck.

Motsättningar är historiskt utvecklade spänningar som i vardagen ofta kommer till uttryck i form av upplevda konflikter, dilemman eller en hake (Eriksson, 2017). Vidare är idén med motsättningar att de kan användas som redskap i designen av problemsituationer för att på så sätt utmana elever att engageras i ett teoretiskt arbete (Davydov, 2008; Zuckerman, 2003). Det är när motsättningen framträder i form av en hake eller liknande som den kan fungera som en drivkraft i elevers teoretiska arbete. Motsättningar beskrivs även utgöra grunden för att en praktik förändras eller utvecklas, då eleverna i sina försök att överbrygga motsättningar behöver hitta nya redskap och metoder (Eriksson, 2017). Vidare är intentionen att försöka planera motsättningar för att stimulera elever till ett ytterligare utforskande av innehållsliga aspekter. Till exempel kan motsättningar handla om att läraren eller någon elev skapar ett matematiskt dilemma eller en hake som behöver hanteras och som när det hanteras möjliggör för ett urskiljande av innehållsliga aspekter.

Även idén om kollektiva reflektioner är centralt i lärandeverksamhet, där reflektion ses som en viktig aspekt i utvecklingen av elevers framväxande teoretiska tänkande. Med kollektiv reflektion avses i lärandeverksamhet att man försöker förklara hur någon annan har tänkt och resonerat. Idén är således att eleverna ska utvecklas i sitt eget teoretiska tänkande genom att försöka reflektera över hur någon annan har tänkt och genom att sätta det i relation till hur man själv tänker (Zuckerman, 2004).

Algebraiska mönstergeneraliseringar

Radfords (2006) distinktion mellan aritmetiska och algebraiska mönstergeneraliseringar handlar inte om huruvida skriftliga symboler används eller ej, utan på vilket sätt det generella i ett mönster behandlas. I stora drag handlar skillnaden om att en aritmetisk mönstergeneralisering inte gör det möjligt att förutsäga vilket element som helst i ett mönster, något som däremot en algebraisk mönstergeneralisering gör. Exempelvis ses en mönstergeneralisering som ”nästa element har två fler” som aritmetisk, då den representerar endast den konstanta differensen mellan två element. En aritmetisk mönstergeneralisering anses alltså inte ge underlag för att förutsäga relationen mellan ett godtyckligt elements position och antalet komponenter. En mönstergeneralisering som ”addera tre till elementets nummer” anses däremot algebraiskt, då den uttrycker relationen mellan elementets position och antalet komponenter (Fred & Boistrup, 2017; Radford, 2006).

Radford (2006) delar in algebraiska mönstergeneraliseringar i tre kategorier: verklig, kontextuell och symbolisk baserat på sättet de uttrycks på. En verklig mönstergeneralisering baseras på handlingar i form av ord, gester eller perceptuell aktivitet. Den kan ta form genom att eleven urskiljer specifika elements interna relationer, att till exempel eleven pekar på respektive element samtidigt som han/hon uttrycker dess uppbyggnad verbalt ”Det skulle vara ett plus tre /... / två plus tre /... / tre plus tre” (min översättning, Radford, 2006, s 10). I en kontextuell mönstergeneralisering har det obestämda gjorts språkligt explicit, det namnges. Det innebär att mönstergeneraliseringen kommer till uttryck i verbala utsagor, som till exempel ” Du dubblar siffran på elementet” (min översättning, Radford, 2006, s 13). I en symbolisk mönstergeneralisering baseras mönstergeneraliseringen på det matematiska symbolspråket, till exempel ”$n + n$” (Radford, 2006, s 13).

Metod och data

Learning study (Marton & Tsui, 2004; Marton, 2015) har använts som ansats för dataproduktion.[3] I denna learning study arbetade artikelns författare och lärare tillsammans i en kollaborativ och intervenerande process med att utveckla en lektion. Intentionen var att förfina undervisningsdesignen för en och samma lektion och genom det studera vad som skapade förutsättningar för elever att engageras i ett algebraiskt arbete och därmed ges möjlighet att urskilja ett antal identifierade kritiska aspekter gällande förmågan att uttrycka och argumentera för algebraiska mönstergeneraliseringar. I arbetet med att utveckla lektionen genomfördes tre forskningslektioner där respektive forskningslektion genomfördes i en ny elevgrupp. I samtliga tre forskningslektioner var artikelns författare den undervisande läraren.[4] Denna learning study genomfördes i en iterativ process i tre iterationer där varje iteration innehöll stegen: design, genomförande samt analys och revidering av forskningslektion.[5] Analysen av forskningslektionerna genomfördes i två steg (jfr Carlgren, Eriksson & Runesson, 2017), där steg 1 skedde mellan forskningslektionerna och steg 2 efter att samtliga tre iterationer genomförts. I denna artikel presenteras framför allt resultat från den fördjupade analysen i steg 2. Det datamaterial som ligger till grund för artikeln beskrivs i tabell 1.

Tabell 1. *Datamaterial*

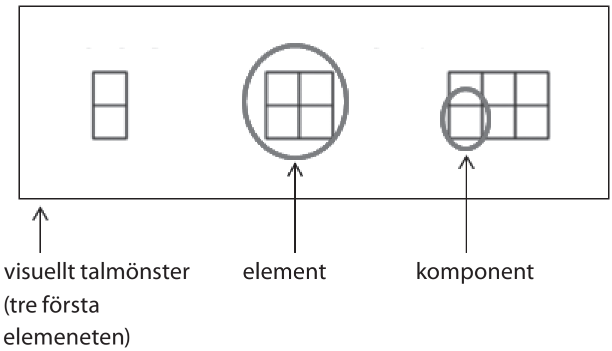
Data	Antal	Sidor	Minuter
Lektionsplaneringar	3	12	
Videoinspelade forskningslektioner	3		111
Transkriberade forskningslektioner	3	13	

Samtliga elever i årskurs 2 och 3 fick genom sina vårdnadshavare en förfrågan om att delta i forskningsprojektet. Elever fick även i samband med forskningslektionerna ge sitt muntliga medgivande. Sammanlagt deltog 53 elever i forskningslektionerna.

De elever som finns med i utdragen i denna artikel har getts fingerade namn, anonymiserats genom att de har fått ett annat namn, dock har flickor fått flicknamn och pojkar fått pojknamn.

Design av forskningslektioner

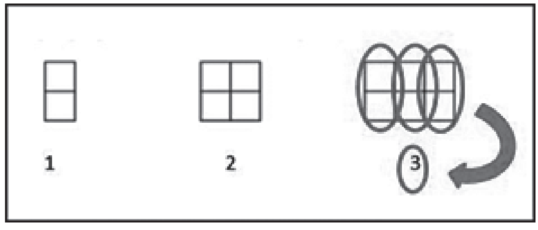
De mönster som användes i forskningslektionerna var visuellt växande mönster (se figur 2) som illustreras med bilder, där komponenterna i elementen var i form av kvadrater, och som ökar eller minskar enligt en additiv struktur (Warren & Cooper, 2008). I artikeln benämns ett mönsters olika delar enligt bilden (figur 2) och benämningen tar sin utgångspunkt i Strømskag Måsøval (2011, s 140):



Figur 2. *Benämning av ett mönsters olika delar*[6]

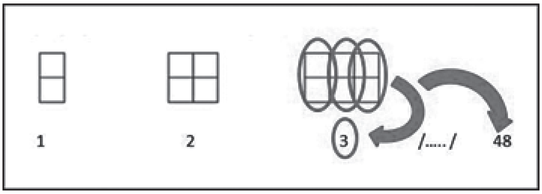
I den didaktiska designen fungerade begreppen *problemsituation*, *lärandemodell* och *motsättningar* som designredskap (Davydov, 2008).[7] Vidare fungerade ett antal identifierade kritiska aspekter gällande förmågan att uttrycka och argumentera för algebraiska mönstergeneraliseringar som utgångpunkt i designen (Fred & Boistrup, 2017). De kritiska aspekterna hade identifierats i en kartläggningsstudie[8] (Fred & Boistrup, 2017), där elevers kvalitativt skilda sätt att erfara mönstergeneraliseringar utforskades. Kartläggningsstudien genomfördes före första forskningslektionen. Den utgjordes av fyra semistrukturerade intervjuer, i vilka åtta elever parvis fick arbeta med uppgifter som efterfrågade att de gjorde mönstergeneraliseringar. Med utgångspunkt i transkriptioner av elevintervjuerna kategoriserades sedan elevers skilda sätt att uppfatta mönstergeneraliseringar, vilka i sin tur utgjorde underlag för identifieringen av följande kritiska aspekter.

A *Att urskilja relationen mellan elementets position och antal komponenter*
Eleverna betonar här antalet komponenter i förhållande till elementets position vilket indikerar att de endast urskiljer enskilda elements interna strukturella relation, det vill säga relationen mellan elementets position och antalet komponenter.



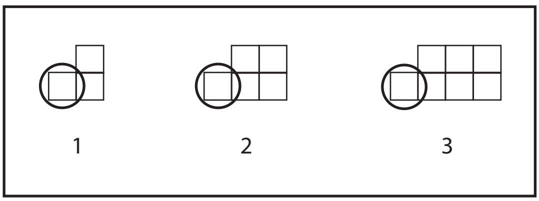
Figur 3. *Relationen mellan elementets position och antalet komponenter*

B *Att urskilja hur man kan använda relationen mellan ett elements position och antalet komponenter för att förutsäga ett godtyckligt element i mönstret*
Eleverna urskiljer här såväl elementens interna som externa strukturella relationer, det vill säga de urskiljer både relationen på enskilda elements position och antalet komponenter samt hur de enskilda komponenternas relation kan sättas i relation till varandra. Relationen används också för att förutsäga ett godtyckligt element i mönstret.



Figur 4. *Att använda relationen mellan ett elements position och antalet komponenter för att förutsäga ett godtyckligt element i mönstret*

C *Att urskilja konstanten i mönstret*
Eleverna urskiljer här den eller de komponenter som inte förändras i mönstret. Urskiljandet av konstanten kan till exempel komma till uttryck "... då kan man säga att om man lägger undan den ... [pekar samtidigt på den markerade kvadraten i mönstret i figur 5]". Med andra ord består konstanten av lika många komponenter oberoende av elementets position.



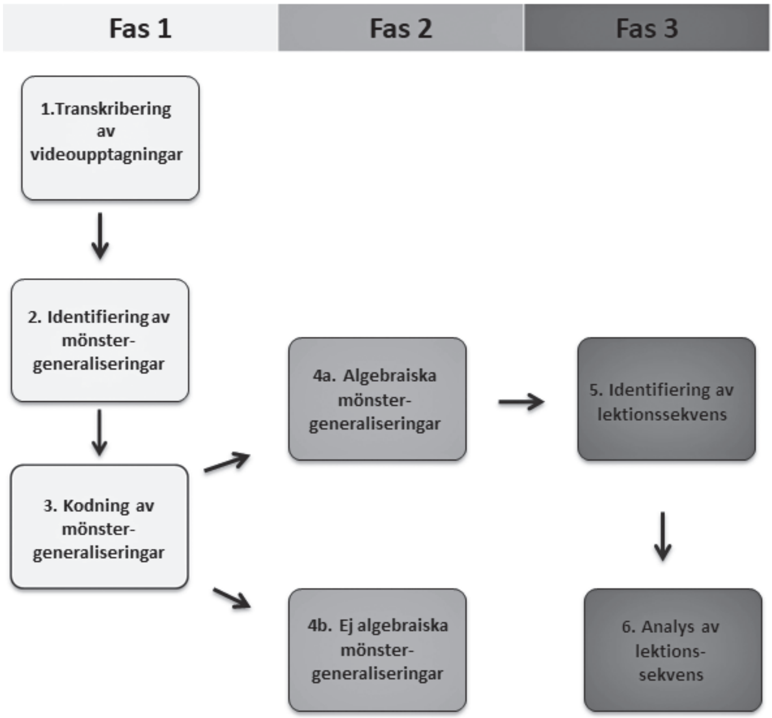
Figur 5. *Konstanten i mönstret*

Analysprocess

Analysen har skett i tre faser, där varje fas innehåller olika steg (figur 6).

Fas 1

I fas 1 ingick följande steg (1) *transkription av videoupptagningar*, (2) *identifiering av mönstergeneraliseringar* (3) *kodning av mönstergeneraliseringar*. I steg 1 transkriberades delar av videoupptagningar från forskningslektion 1 och 2 samt hela forskningslektion 3. Valet av vilka delar som transkriberades tog sin utgångspunkt i de synopsis som gjorts på samtliga



Figur 6. *Analysprocessen*

forskningslektioner. I steg 2 identifierades och markerades i transkriptionerna elevernas uttryckta mönstergeneraliseringar. I steg 3 kodades uttryckta mönstergeneraliseringar med utgångspunkt i de kritiska aspekter eleverna gav uttryck för att urskilja.

Fas 2

I fas 2 kategoriserades, med kodningen som grund, de uttryckta mönstergeneraliseringarna i *algebraiska mönstergeneraliseringar* (steg 4a i figur 6) respektive *ej algebraiska mönstergeneraliseringar* (steg 4b i figur 6). I kategorin ej algebraiska mönstergeneraliseringar kategoriserades mönstergeneraliseringar vilka ej föll inom ramen för de tidigare identifierade kritiska aspekterna eller kunde identifieras som vad Radford (2006) beskriver som algebraiska mönstergeneraliseringar. Fördelningen visas i tabell 2.

Fas 3

I fas 3 ingick *identifiering av lektionssekvenser* (steg 5 i figur 6) samt *analys av lektionssekvenser* (steg 6 i figur 6). Detta arbete tog sin utgångspunkt i

Tabell 2. *Kategorisering av ej algebraiska vs algebraiska mönstergeneraliseringar*

	Ej algebraisk mönstergeneralisering	Algebraisk mönstergeneralisering
Forskningslektion 1	2	0
Forskningslektion 2	4	2
Forskningslektion 3	2	6

de åtta identifierade algebraiska mönstergeneraliseringarna (från forskningslektion 2 och 3) i fas 2. Fokus i steg 5 var att fånga lektionssekvenser som helhet. Stöd i identifieringsprocessen var frågorna: ”Vilka lektionssekvenser/uppgifter möjliggjorde ett urskiljande av kritiska aspekter?” samt ”I vilka lektionssekvenser möjliggjorde lärarens orkestrering av klassrumsarbetet ett urskiljande av kritiska aspekter?” som analysredskap. I steg 6 analyserades de identifierade lektionssekvenserna med fokus på: ”Vad i uppgiftsdesignen och lärarens orkestrering av klassrumsarbetet möjliggjorde ett algebraiskt arbete gällande utforskandet av visuellt växande mönsters algebraiska strukturer?” I analysarbetet användes innebörder av de tre didaktiska principerna från lärandeverksamhet som analysredskap: *problemsituation*, *lärandemodeller* och *motsättningar*.

I föreliggande artikel ligger fokus på att beskriva och analysera vad som skapar förutsättningar för att elever engageras i ett algebraiskt arbete i undervisningen. Det finns samtidigt i varje forskningslektion saker som har begränsat och hindrat elevernas deltagande i ett algebraiskt arbete. Då det inte har varit fokus på i artikeln har detta uteslutits från analysen.

Resultat

I resultatet nedan presenteras exempel på lektionssekvenser från forskningslektion 3 där det framträder extra tydligt att eleverna engagerades i ett algebraiskt arbete och därmed kan antas ha möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna. Resultatet är organiserat med utgångspunkt i tre lektionssekvenser[9], innefattande (1) en beskrivning av lektionssekvensen som helhet samt (2) en analys av lektionssekvensen. Urvalet av lektionssekvenser, tre av totalt åtta identifierade, motiveras med syftet att synliggöra vilka redskap som kan ha betydelse i uppgiftens design och lärarens orkestrering av klassrumsarbetet för möjliggörandet av elevernas urskiljande av de kritiska aspekterna.

Under forskningslektionernas genomförande använde läraren ordet figur när hon talade om olika element (se figur 2) i mönster. I nedanstående utdrag har ordet figur ersatts med ordet element, detta för att ordet figur som gäller för datautdrag (bilder på uppgifter, mönster etc.) inte ska sammanblandas med benämningen figur som gäller för element i mönstren.

Lektionssekvens 1

Den första lektionssekvensen exemplifierar vad som bidrog till att eleverna urskilde den kritiska aspekten *relationen mellan elementets position och antalet komponenter.* I analysen av denna lektionssekvens adresseras framför allt samspelet mellan *uppgiftens design* och *lärarens orkestrering av klassrumsarbetet* som möjliggjorde detta urskiljande. Vidare diskuteras i analysen av denna lektionssekvens vilken funktion lärandemodellen fick.

Lektionssekvensen inleddes med att eleverna fick ett mönster (figur 7) där element 3 och element 5 var givna. Läraren introducerade uppgiften genom att säga ”Er uppgift nu är att ni ska rita element 4. Ni har fått element 3 och ni har fått element 5.”

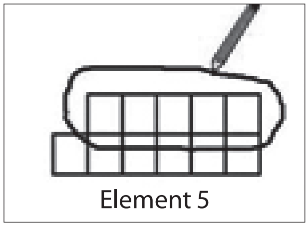
Figur 7. *Uppgift ”Rita element 4”*

Efter en kort stund avbröt läraren elevernas parvisa arbete.

Läraren: Vet ni nu är jag inte så *jätte intresserad egentligen* ... Vet ni vad jag är intresserad av? Det är *hur* ni *tittade* på de här elementen [pekar på element 3 och 5 som finns på tavlan, se figur 7] när ni kom fram till hur element 4 skulle se ut?

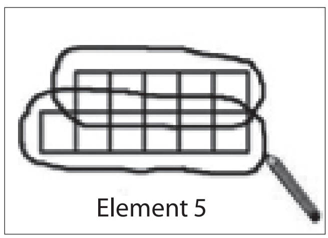
Läraren ändrade alltså nästan genast inriktningen på frågeställningen, från hur ett specifikt element skulle ritas till hur eleverna hade använt sig av de två givna elementen för att bestämma hur det icke givna elementet skulle ritas.

Eleverna fick därefter fundera ytterligare en kort stund innan läraren fortsatte med att säga: ”För jag tror att ni kan ha tittat lite olika på mönstret. Så skulle någon vilja komma fram och *rita hur* de tittade? Vill du, Thea, rita?” Thea och hennes kompis Elvira gick fram till tavlan men de såg lite tveksamma ut. Läraren visade då, genom att i luften ringa in den ensamma kvadraten längst till vänster i element 5 (figur 7), hur man kunde rita. Kort därefter började Thea ringa in den översta raden i element 5 i det mönster som fanns på tavlan (se figur 8).



Figur 8. *Eleven ringar in övre raden i element 5*[10]

När Thea hade ritat klart i element 5 tittade hon frågande på läraren. Läraren uppmanade eleverna att fortsätta genom att säga: ”Ok, hur gjorde ni sedan när ni hade sett det där [pekar på den rad Thea har ringat in]? Tittade ni på något annat?” Thea fortsatte då att ringa in den undre raden på element 5.



Figur 9. *Eleven ringar in undre raden i element 5*

Samtidigt som Thea ringade in i element 5 gick Elvira fram och pekade på först den övre raden och sedan på den undre raden i element 3. Thea fortsatte därefter med att ringa in på motsvarande sätt i element 3.

Analys

Uppgiftens design i lektionssekvensen ovan bestod av två steg. I det första steget skulle eleverna rita ett icke givet element, och i det andra steget skulle eleverna berätta hur de hade tittat på två givna element för att bestämma det icke givna elementet. Läraren skapade här en problemsituation vilken möjliggjorde för att eleverna började jämföra elementets strukturella egenskaper i mönstret. Läraren uttryckte inte explicit att eleverna skulle göra detta, men framför allt genom uppgiftens andra steg riktades elevernas uppmärksamhet mot *hur givna element kunde användas för att förutsäga ett godtyckligt element*. Att det också var det som skedde framträdde genom elevernas inringningar i elementen, då de grupperade komponenterna på ett sätt som kunde sättas i relation till elementets position.

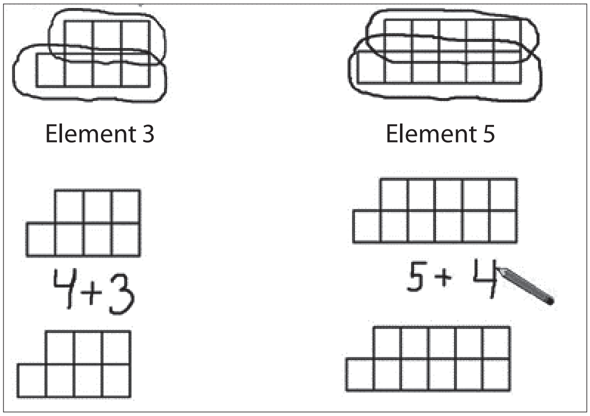
Lärarens orkestrering av klassrumsarbetet skapade även förutsättningar för att en lärandemodell tog form. Det var elevernas inringningar i givna element som fick funktionen av en lärandemodell. Den övre raden bestod av samma antal komponenter som elementets position i mönstret angav och den undre raden bestod av en extra komponent. Med andra ord kunde grupperingarna av komponenterna sättas i relation till elementets position. Eleverna fick således tillgång till, genom inringningarna, en algebraisk struktur gällande *relationen mellan elementets position och antalet komponenter*.

Lektionssekvens 2

Den andra lektionssekvensen exemplifierar hur eleverna urskilde hur *relationen mellan elements position och antalet komponenter kan användas för att förutsäga ett godtyckligt element i mönstret*. I relation till denna lektionssekvens adresseras framför allt hur eleverna, genom att läraren gjorde fel, inbjöds till att reflektera över *relationen mellan elementets position och antalet komponenter samt hur den kan användas för att förutsäga ett godtyckligt element i mönstret*.

Lektionssekvensen inleddes med att läraren av misstag omvandlade Theas och Elviras inringningar i element 5, framme på tavlan, felaktigt: ”Så som de [Thea och Elvira] här hade sett på det [mönstret]. Skulle jag kunna skriva det så här?” Läraren pekade på elementens övre respektive undre rad samtidigt som hon sa och skrev omvandlingen av inringningarna, det vill säga sa hon fem samtidigt som hon pekade på övre raden i element 5 och så vidare (se figur 10).

Den felaktiga omvandlingen innebar att inringningarna i element 5 omvandlades till ”5 + 4” istället för ”5 + 6”. Element 3 omvandlades däremot relevant till ”4 + 3”. Läraren fortsatte efter att ha omvandlat även element 3 med att ställa frågan: ”Var det så ni såg det tjejer? Eller är det något ni vill ändra?”. Thea och Elvira svarade genom att skaka på huvudena och läraren inbjöd då eleverna att uttrycka vad det var som de inte höll med om: ”Det var inte så ni såg det? [Låter förvånad i rösten – har ännu inte upptäckt sitt misstag]”. Varpå Elvira började argumentera för varför hon inte tyckte att omvandlingen var korrekt: ”Det var tre där uppe. Det är tre. På element 3 är det tre rutor. Men element 5 är det fem däruppe och då så måste det på element 4, fyra där uppe.”



Figur 10. *De tre uppsättningarna av det visuellt växande mönstret på tavlan*

Analys

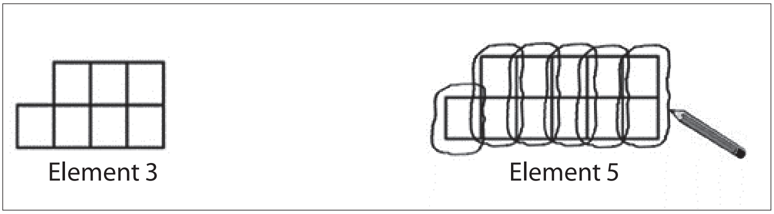
Under lektionssekvensen riktades elevernas uppmärksamhet mot de givna elementens strukturer genom att läraren uttryckte omvandlingen av Theas och Elviras tidigare grupperingar verbalt, med gester samt genom att symbolisera dem med tal.

Läraren byggde även omedvetet in en motsättning, i form av en hake, i lektionssekvensen genom att omvandla tidigare inringningar felaktigt. Motsättningen fungerade som utgångspunkt i elevernas kollektiva arbete, genom att den inbjöd eleverna att ytterligare reflektera över relationen mellan elementets position och antalet komponenter. Att det var det som också skedde blev synligt i Elviras argumentation, då hon tog stöd i *elementens position i relation till antalet komponenter* på övre raden (se ovan).

Lektionssekvens 3

Den tredje lektionssekvensen exemplifierar även den hur eleverna urskilde hur de kunde *använda relationen mellan elements position och antalet komponenter för att förutsäga ett godtyckligt element i mönstret.* I relation till denna lektionssekvens adresseras framför allt hur läraren skapade förutsättningar för detta genom att erbjuda en alternativ struktur samt att bjuda in eleverna att reflektera över den alternativa strukturen.

Lektionssekvensen inleddes med att läraren erbjöd en alternativ gruppering av komponenterna i element 5. Den alternativa grupperingen, som fanns på tavlan, innebar att läraren ringade in komponenterna lodrätt två och två och den ensamma kvadraten till vänster för sig (figur 11).



Figur 11. *Läraren erbjuder en alternativ struktur*

Läraren bjöd sedan in eleverna genom att, med utgångspunkt i den alternativa grupperingen, berätta hur element 5 skulle skrivas:

Läraren: Om jag såg mönstret så [pekar mot inringningarna i element 5]? Hur skulle jag skriva då, det här [låter undrande]? Här skrev jag fem plus sex [pekar på tidigare inringningar i element 5].

En elev, Elton, svarade snabbt: ”Två plus två plus två plus två plus två plus en.” Varpå läraren bad honom att förtydliga med hur många tvåor han sa. Elton svarade först på frågan hur många tvåor han hade sagt och gav sedan ett alternativt förslag för hur element 5 skulle kunna uttryckas: ” Fem. Eller två gånger fem plus 1.” Efter en stund flyttade läraren fokus från element 5 till hur ett icke givet element skulle kunna uttryckas: ” Om vi ska skriva hur element 7 är uppbyggd då? Hur ska vi skriva då?” Samtidigt som läraren frågade detta påminde hon eleverna om hur uppbyggnaden av element 5 uttryckts tidigare: ”När vi tittade på figur 5 då skrev vi 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 eller 5 + 6.” Ella svarade genom att uttrycka hur elementets komponenter kunde grupperas horisontellt på ett sätt som gick att sätta i relation till elementets position: ”Sju där uppe och åtta där nere.” Läraren bad därefter de andra eleverna att beskriva vad i Ellas verbalt uttryckta grupperingar som de höll med om och varför: ”Håller ni andra med om det? Varför håller ni med? Vad är det ni håller med om?” Varpå Sophie valde att argumentera med utgångspunkt i grupperingarna av de övre raderna i element 3 och element 5: ”På element 3 så är det tre där uppe och på element 5 är där fem där uppe, så på element 7 måste det vara sju.” I nästa skede kopplade läraren tillbaka till den alternativa grupperingen som uttryckte lodrätta grupperingar av komponenterna.

Läraren: Om man vill använda det här sättet då?

Elton: Då kan man ta sju tvåor plus 1.

Läraren: Håller ni med om det här då? Om det är element 7 kan man skriva så? Ska det vara sju tvåor plus ett? Eller kan man skriva 2 x 7 + 1? Och varför håller ni med? Vad är det ni håller med om?

Grete: För att på element 5 så är det 2 + 2 +2 + 2 + 2 +1 och där var det ju fem (---) och då blir det ju fem tvåor men på figur sju blir det ju sju tvåor. Då varierar sju-siffrigt (---).

Analys

I lektionssekvensen ovan skapade läraren förutsättningar för att eleverna skulle kunna urskilja att mönstrets algebraiska struktur kunde uttryckas på olika sätt, detta genom att hon skapade en motsättning mellan en lodrätt gruppering och Theas och Elviras horisontella gruppering. Eleverna behövde således hantera de båda grupperingarna samtidigt och också ytterligare utforska hur komponenterna hade grupperats i relation till elementens position. Mot bakgrund av detta blev det möjligt för eleverna att utveckla en mer generell förståelse gällande hur *relationen mellan elements position och antalet komponenter* kan formuleras. Det var genom att de olika grupperingarna båda visualiserade en relation mellan elementens position och antalet komponenter men samtidigt såg och uttrycktes olika som skapade förutsättningar för detta. Till exempel uttrycktes element 5 som "5 + 6" eller som "två gånger fem plus 1".

Lärarens orkestrering av klassrumsarbetet bestod i att läraren genom att ställa frågan: "Om vi ska skriva hur element 7 är uppbyggd då? Hur ska vi skriva då?" bjöd in eleverna att använda sig av hur elements uppbyggnad tidigare hade uttryckts. Med andra ord använde läraren den interna strukturen för element 5 som redskap för att eleverna skulle kunna uttrycka ett icke givet element. Läraren riktade samtidigt elevernas uppmärksamhet mot att det var just strukturen som skulle fokuseras, detta genom att efterfråga elementets uppbyggnad.

I denna lektionssekvens innebar även lärarens orkestrering att hon genom att ställa frågorna: "Varför håller ni med? Vad håller ni med om?" bjöd in eleverna att reflektera över andra elevers sätt att uttrycka element 7:s uppbyggnad. Att detta också skedde synliggjordes i såväl Sophies: "På element 3, så är det tre där uppe och på element 5 är där fem där uppe, så på element 7 måste det vara sju." som Gretes argumentation: "För att på element 5 så / ... / var det ju fem / ... / och då blir det ju fem tvåor men på element sju blir det ju sju tvåor". Båda eleverna tog i sina argumentationer på olika sätt stöd i relationen mellan elements position och antalet komponenter.

Diskussion

I föreliggande artikel adresseras frågan: *På vilka sätt kan didaktiska principer för lärandeverksamhet stödja ett etablerande och ett upprätthållande av ett algebraiskt arbete och därmed möjliggöra för ett urskiljande av kritiska aspekter?*

Centralt i etableringen av ett algebraiskt arbete är, ur ett lärandeverksamhetsperspektiv, att eleverna inledningsvis ställs inför en problemsituation som utmanar dem att engageras i ett algebraiskt (teoretiskt) arbete. Det är dock inte tillräckligt att det algebraiska arbetet etableras utan lika stor vikt behöver läggas på själva upprätthållandet av det. Den lärandeverksamhetsteoretiska principen om lärandemodeller har en central roll i såväl etablerandet som i upprätthållandet. Lärandemodellernas roll handlar dels om att möjliggöra ett kollektivt algebraiskt arbete dels att eleverna genom att kollektivt skapa, rekonstruera och bearbeta modellen får tillgång till sådana teoretiska aspekter av det kunskapsinnehåll som de ska lära sig (Eriksson, 2018; Gorbov & Chudinova, 2000). I detta learning study-projekt skulle det kunna tolkas i termer av att eleverna genom arbetet med lärandemodellen ges möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna. Även den lärandeverksamhetsteoretiska principen motsättningar kan ha en tvådelad roll, det vill säga att fungera som en drivkraft i såväl etablerandet som i upprätthållandet av det algebraiska arbetet. Till exempel kan det handla om att läraren eller någon elev skapar ett matematiskt dilemma eller en hake som behöver hanteras av eleverna och som när det hanteras möjliggör för ett urskiljande av innehållsliga aspekter. Även här skulle det kunna uttryckas i termer av att motsättningen möjliggör ett urskiljande av kritiska aspekter.

I följande avsnitt kommer de lärandeverksamhetsteoretiska principerna som nämnts ovan att diskuteras i relation till skapandet av förutsättningar för ett algebraiskt arbete och hur eleverna därigenom ges möjlighet till att urskilja kritiska aspekter gällande förmågan att uttrycka och argumentera för algebraiska mönstergeneraliseringar.

Davydov (2008, jfr. Eriksson, 2017) beskriver hur aspekter av det teoretiska kunnandet elever förväntas utveckla behöver byggas in i de problemsituationer som elever ställs inför samt att dessa problemsituationer ska utmana elever till ett teoretiskt arbete i vilket de själva är aktiva agenter. Det kan beskrivas som att en problemsituation etablerades i forskningslektion 3 där eleverna utmanades till ett teoretiskt utforskande av mönstrets strukturella egenskaper. Problemsituationen etablerades genom uppgiften ”Rita element 4” tillsammans med lärarens uppmaning till eleverna att visa hur de hade tittat i de givna elementen för att rita figur 4. Det fanns inte uttalat i uppgiften eller i lärarens frågor att eleverna skulle jämföra givna elements strukturella egenskaper utan det var uppmaningen som inbjöd till detta genom att läraren bad eleverna visa hur de hade tittat i givna element för att förutsäga ett icke givet element. I förlängningen möjliggjorde även elevernas arbete med att jämföra givna element att de kunde urskilja den kritiska aspekten *relationen mellan elementets position och antalet komponenter.*

I relation till principen lärandemodell får de inringningar (se figur 9) som gjordes inledningsvis i den tredje forskningslektionen funktionen av en lärandemodell. Den skapades när eleverna skulle visa hur de hade tittat i givna element för att bestämma ett icke givet element. När det skedde fick även de andra eleverna tillgång till den kritiska aspekten *relationen mellan elementets position och antalet komponenter.* Detta möjliggjordes genom att grupperingar av komponenter i givna element kunde sättas i relation till elementets position, vilket därmed innebar att relationen visualiserades. Vidare fungerade inringningarna som redskap för klassrumskommunikationen och de reflektiva diskussionerna. Det skedde till exempel när läraren omvandlade inringningarna till tal felaktigt, och därmed utmanade eleverna till att argumentera kring varför och vad i omvandlingen som var felaktig. När läraren senare förändrade inringningarna i givet element och erbjöd en alternativ struktur blev det möjligt för eleverna att urskilja att *relationen mellan elementets position och antalet komponenter* kan uttryckas på olika sätt.

Även den didaktiska principen motsättningar i form av en hake visade sig ha betydelse för att eleverna skulle engageras sig i ett algebraiskt arbete. Resultatet i föreliggande artikel ger exempel på hur lärarens misstag att omvandla elevers inringningar i element felaktigt utmanade elever att ytterligare pröva och reflektera över relationen mellan elementets position och antalet komponenter. Det blev synligt genom att eleverna i sina argumentationer tog stöd i aspekter som till exempel *relationen mellan elementets position och antalet komponenter.* Vidare ges exempel på hur den planerade motsättningen mellan en lodrätt gruppering och en horisontell gruppering av komponenterna i givna element gjorde det möjligt för eleverna att utveckla en mer generell förståelse gällande hur *relationen mellan elements positioner och antalet komponenter* kan formuleras.

Denna artikel bygger på en begränsad kvalitativ studie, där tre forskningslektioner har genomförts. Trots detta kan den bidra till att fördjupa förståelsen gällande på vilka sätt principerna för lärandeverksamhet kan stödja ett etablerande och upprätthållande av ett algebraiskt arbete och därmed möjliggöra för elevers urskiljande av kritiska aspekterna. Resultatet kan användas som grund för fortsatta studier, exempelvis i en studie av en serie av lektioner där även mer komplexa mönster används.

Tack

Detta arbete finansieras och stöds av Stockholm stad, Forskarskolan i learning study samt Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik vid Stockholms universitet.

Referenser

Björk, M., Nikula, Å., Stensland, P. & Stridfält, A. (2019). Tecken på teoretiskt tänkande om strukturer i bassystemet. *Forskning om Undervisning och Lärande*, 7 (2), 26–49.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. I J. Cai & E. Knuth (red), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (s 5–23). New York: Springer Science & Business Media.

Cai, J. & Knuth, E. (red). (2011). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. New York: Springer Science & Business Media.

Carlgren, I., Eriksson, I. & Runesson, U. (2017). Learning study. I I. Carlgren (red), *Undervisningsutvecklande forskning. Exemplet learning study* (s 17–30). Malmö: Gleerups.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: a theoretical and experimental psychological study*. New York: Nova Science Publishers.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G. & Saveleva, O. V. (2012). *Matematikka 1*. [Mathematik 1]. Moskva: VitaPress.

Eriksson, H. (2015). *Rationella tal som tal. Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap* (Licentiatuppsats). Stockholms universitet.

Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en Learning study. I I. Carlgren (red). *Undervisningsutvecklande forskning. Exemplet learning study* (s 61–81). Malmö: Gleerups.

Eriksson, I. (2018). Lärandeverksamhet, lärandeuppgifter & lärandemodeller. I E. Insulander & S. Selander (red), *Att bli lärare* (s 160–165). Stockholm: Liber.

Eriksson, I., Wettergren, S., Fred, J., Nordin, A.-K., Nyman, M. & Tambour, T. (2019). Materialisering av algebraiska uttryck i helklassdiskussioner med lärandemodeller som medierande redskap i årskurs 1 och 5. Nomad, *Nordisk MatematikkDidaktikk*, 24 (3-4).

Fred, J. & Boistrup, L. B. (2017). Students' qualitatively different ways of experiencing pattern generalization. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 27 (2), 155–162.

Fred, J. & Stjernlöf, J. (2014). Uppgifter som redskap för mediering av kritiska aspekter i matematikundervisning. *Forskning om Undervisning och Lärande*, (12), 21–43.

Gorbov, S. F. & Chudinova, E. V. (2000). The effect of modeling on the students' learning (regarding problem formulation). *Psychological Science and Education*, 2, 96–110.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic thinking? I J. Kaput, D. W. Carraher & M. Blanton (red), *Algebra in the early grades* (s 5–17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. I A. Gutiérrez & P. Boero (red), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (s 11–49). Rotterdam: Sense.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: perspectives for research and teaching. I J. Cai & E. Knuth (red), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (s 579–593). New York: Springer.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: research into its nature, its learning, its teaching*. London: Springer International Education.

Kullberg, A. (2011). Vad lär eleverna och vad görs möjligt för dem att lära? I *SMDF medlemsblad*. Hämtad från http://www.mai.liu.se/SMDF/medlemsblad.pdf

Larsson, M. (2015). *Orchestrating mathematical whole-class discussions in the problem-solving classroom: theorizing challenges and support for teachers* (Doktorsavhandling). Västerås: Mälardalens högskola.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Lindberg, V. (2010). Skolans kunskapsinnehåll i ljuset av elevers uppgifter – exemplet matematik. I I. Eriksson, V. Lindberg & E. Österlind (red), *Uppdrag undervisning – kunskap och lärande!* (s 109–123). Lund: Studentlitteratur.

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. I H. Chick & K. Stacy (red), *The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study* (s 45–70). New York: Kluwer Academic Publishers.

Marton, F. & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (s 65–86). Dordrecht: Kluwer.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21 (2), 33–49.

Newman, D., Griffin, P. & Cole, M. (1989). *The construction zone: working for cognitive change in school*. New York: Cambridge University Press.

Radford, L., Bardini, C. & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: the multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (5), 507–530.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. I S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (red), *PME-NA 2006 Proceedings*. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010a). Elementary forms of algebraic thinking in young students. I M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (red), *Proceedings of PME 34* (Vol. 4, s 73–80). Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais.

Radford, L. (2010b). Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (red), *Proceedings of CERME 6* (s XXXIII-LIII). Lyon: Institut National de Récherche Pédagogique.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. I J. Cai & E. Knuth (red), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (s 303–322). Berlin: Springer.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: epistemological, semiotic, and developmental issues. I S. J. Cho (red), *Proceedings of ICME 12. Intellectual and attitudinal challenges* (s 2019–228). Seoul: National University of Seoul.

Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85 (3), 405–422.

Repkin, V. V. (2003). Developmental teaching and learning activity. *Journal of Russian & East European Psychology*, 41 (5), 10–33.

Runesson, U. (2011). Lärares kunskapsarbete – exemplet Learning study. *Forskning om Undervisning och Lärande*, 5, 7–17.

Ryve, A., Larsson, M. & Nilsson. P. (2011). Analyzing content and participation in classroom discourse: dimensions of variation, mediating tools and conceptual accountability. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 57, 101–114.

Strømskag, H. (2015). A pattern-based approach to elementary algebra. I K. Krainer & N. Vondrová (red), *Proceedings of CERME 9* (s 474–480). Prag: Charles Universitet.

Strømskag Måsøval, H. (2011). *Factors constraining students' establishment of algebraic generality in shape patterns: a case study of didactical situations in mathematics at a university college* (Doktorsavhandling). Universitetet i Agder.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. I H. L. Chick & J. L. Vincent (red), *Proceedings of PME 29* (Vol. 4, s 305–312). University of Melbourne.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalizing the pattern rule for visual growth patterns: action that support 8-year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (2), 171–185.

Vygotskij, L. S. (2001). *Tänkande och språk*. Göteborg: Daidalos.

Zuckerman, G. (2003). The learning activity in the first years of schooling. I A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev & S. M. Miller (red), *Vygotsky's educational theory in cultural context* (s 39–64). Cambridge University Press.

Zuckerman, G. (2004). Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, XIX (1), 9–18.

Fotnoter

1 Begreppet ”algebraic activity” är ett begrepp som används av bl.a. Kieran (2008, 2011), Kieran, Pang, Schifter & Ng (2016) och Radford, Bardini & Sabena (2007) och har här översatts till algebraiskt arbete.

2 Bilden är efterkonstruerad utifrån Davydov, Gorbov, Mikulina och Saveleva (2012).

3 Learning study som forskningsansats möjliggör ett systematiskt utforskande och analyserande av vad som kan skapa förutsättningar i undervisningen empiriskt.

4 Valet att författaren genomförde forskningslektionerna var att ett nytt teoretiskt och didaktiskt ramverk skulle prövas och det fanns inte utrymme för de deltagande lärarna att sätta sig in i ramverket innan första forskningslektionen skulle genomföras.

5 Med forskningslektion avses här en lektion som designas, genomförs, analyseras och revideras i en iterativ process. Intentionen är att förfina undervisningsdesignen för en och samma lektion och genom det studera vad det är som skapar förutsättningar för elevers lärande gällande specifika kunskapsinnehåll. Det är med andra ord ”samma” lektion med samma innehåll som genomförs tre gånger med olika elever.

6 Bilden är efterkonstruerad utifrån Davydov, Gorbov, Mikulina och Saveleva (2012).

7 Lärandeverksamhet har under senare år använts som en alternativ lärandeteori till variationsteori i learning study (se t ex Björk m.fl, 2019; Eriksson, 2015; Eriksson, 2017).

8 Det övergripande forskningsprojektet som ligger till grund för denna artikel består av två delstudier, där delstudie 1 är en kartläggningsstudie gällande elevernas erfarande av mönstergeneraliseringar.

9 I utdragen har följande transkriptionsnycklar använts:
Kursivering innebär att läraren betonar ordet.
... innebär att läraren pausar.
Inom [ ] beskrivs gester och dylikt, det som uttrycks verbalt.
(---) innebär att det som sägs inte är hörbart.
Språket i utdragen har ändrats något, för att underlätta läsning. De redigeringar som gjorts har inte ändrat innebörden utan handlar till exempel om att halva ord har tagits bort.

10 Denna och liknande bilder är efterkonstruerade med stöd av videoinspelning.

Jenny Fred

Jenny Fred är fil lic i matematikämnets didaktik och lärare åk F–6. Hennes forskningsintresse handlar främst om den tidiga algebraundervisningen samt hur och vad i undervisningen som skapar förutsättningar för elevers lärande.

jenny.fred@edu.stockholm.se

Abstract

The aim of the article is to describe and analyze what in different lesson sequences that creates the conditions for students to be involved in algebraic work and thereby distinguish critical aspects. The article is based on data from three research lessons in which *Learning activity* together with Radford's work on pattern generalizations were theoretical starting points. In the analysis, didactic principles of Learning activity along with a few identified critical aspects regarding the ability to express and justify algebraic generalizations served as analytical tools. The result can contribute to deepened understanding of the ways the principles can support the establishment and maintenance of algebraic work enabling students to distinguish critical aspects.