Materialisering av algebraiska uttryck i helklassdiskussioner med lärandemodeller som medierande redskap i årskurs 1 och 5

Inger Eriksson, Sanna Wettergren, Jenny Fred, Anna-Karin Nordin, Martin Nyman och Torbjörn Tambour

Syftet med denna artikel är att beskriva och diskutera vilka funktioner lärandemodeller kan ha för att främja yngre elevers kollektiva diskussioner om algebraiska uttryck. Artikeln bygger på data från ett designforskningsprojekt baserat på Davydovs principer för lärandeverksamhet, bestående av videofilmade forskningslektioner i årskurs 1 och 5. Analysen fokuserar på vad som skapar förutsättningar för helklassdiskussioner om algebraiska uttryck, hur de drivs framåt och kvalificeras samt vilka funktioner lärandemodeller kan ha för elevernas utforskande av matematiska strukturer och relationer i algebraiska uttryck. Resultatet indikerar att lärandemodeller som medierande redskap gör det möjligt för eleverna att föra kreativa och reflekterande diskussioner om algebraiska uttryck och deras komponenter.

Det övergripande intresset för denna artikel är att diskutera vilka funktioner speciellt utformade medierande redskap, lärandemodeller, kan ha när det gäller att kvalificera yngre elevers (årskurs 1–5) kollektiva diskussioner rörande algebraiska uttryck. Diskussioner som i förlängningen kan bidra till utvecklingen av elevernas algebraiska tänkande. Utgångspunkten är Davydovs (2008) matematiska lärandeverksamhet, *learning activity*, med begreppet lärandemodeller i centrum.

Bakgrund

Under senare år har intresset för matematikundervisningens kommunikativa inslag ökat både nationellt och internationellt och då med ett särskilt fokus på utvecklingen av elevers matematiska tänkande och deras

Inger Eriksson, *Stockholms Universitet*
Sanna Wettergren, *Stockholms Universitet*
Jenny Fred, *Stockholms Universitet*
Anna-Karin Nordin, *Stockholms Universitet*
Martin Nyman, *Stockholms Universitet*
Torbjörn Tambour, *Stockholms Universitet*

Eriksson, I., Wettergren, S., Fred, J., Nordin, A.-K., Nyman, M. & Tambour, T. (2019). Materialisering av algebraiska uttryck i helklassdiskussioner med lärandemodeller som medierande redskap i årskurs 1 och 5. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 24 (3-4), 81–106.

förmåga att resonera, argumentera och delta i matematiska klassrumsdiskussioner (Larsson, 2015; Lithner, 2008; Radford & Barwell, 2016; Sfard, 2008). I en studie rörande klassrumsdiskussioner konstaterar Larsson och Ryve (2012) att produktiva klassrumsdiskussioner inte alltid är lätta att få till stånd. Exempelvis kommer diskussionerna lätt att handla om procedurfrågor även om eleverna ger inspel som skulle kunna öppna upp för produktiva diskussioner. Ryve, Larsson och Nilsson (2011) konstaterar vidare att kvaliteten på klassrumsdiskussioner blev innehållsligt rikare när eleverna erbjöds medierande redskap i form av till exempel tabeller och inte enbart verbala representationer (se även Leung & Bolite-Frant, 2015; Ryve, Nilsson & Pettersson, 2013). Medierande redskap ses således som viktiga för den innehållsliga kvaliteten i klassrumsdiskussioner.

Inom forskningsfältet tidig algebra, *early algebra*, har frågor om vad som skapar förutsättningar och hinder för utveckling av elevers algebraiska tänkande som grund för formell algebra i senare årskurser diskuterats (Blanton m fl, 2015; Hodgen, Oldenburg & Strømskag, 2018; Kaput, Carraher & Blanton, 2008; Kieran, 2018; Radford, 2018; Radford & Barwell, 2016; Warren, Trigueros & Ursini, 2016). Inom detta fält finns det även flera försök att kategorisera nivåer och typer av algebraiskt resonemang och/eller algebraiskt tänkande (se t ex Godino m fl, 2015; Radford, 2018). I denna artikel har vi valt att utgå från Lithners (2008, 2017) beskrivning av imitativa och kreativa resonemang. I imitativa resonemang använder eleverna memorerade procedurer. Kreativa resonemang handlar istället om att de a) förs i relation till, för eleverna, nya problemsituationer b) framstår som rimliga och/eller sanna och c) är matematiskt förankrade (Lithner, 2008, 2017).

Flera forskare pekar på att den dominerande traditionen att introducera algebra grundat i aritmetik skapar problem, speciellt i relation till elevers förmåga att resonera, argumentera och lösa problem algebraiskt. Stacy och MacGregor (1999) uppger att elever som inledningsvis undervisas inom en aritmetisk undervisningstradition tenderar att använda aritmetiska problemlösningsmetoder som en grund när de senare introduceras till algebra. Exempelvis är det vanligt att elever löser algebrauppgifter genom att ”sätta in” konkreta tal istället för att föra mer generella resonemang (Kieran, 2006). Att utveckla ett algebraiskt tänkande med aritmetiska metoder som bas beskrivs således som problematiskt (Kieran, 2006; Lins & Kaput, 2004; Stacy & Chick, 2004). Forskare som arbetar inom sociokulturella traditioner i linje med Vygotskijs arbete om teoretiskt tänkande hävdar att algebraisk problemlösning och algebraiskt tänkande bör introduceras redan från årskurs 1 (Lins & Kaput, 2004). I relation till detta har Davydovs (2008) matematiska program, som bygger på lärandeverksamhetsteori, förts fram som ett alternativ (Cai & Knuth, 2011; Kieran m fl, 2016; Schmittau, 2004, 2005; Veneciano & Dougherty, 2014). Matematiskt tar programmet sin utgångspunkt i möjliga relationer mellan kvantiteter, det vill säga innehållet bygger på att kunskaper utvecklas i relation till mätning (Schmittau, 2004; Schmittau & Morris, 2004).

Ett av särdragen i Davydovs lärandeverksamhet är reflektion och då speciellt kollektiva reflektioner. Zuckerman (2004) beskriver att reflektionsprocessen behöver organiseras så att eleverna kan a) få syn på syftet med egna och andras redskapsmedierade handlingar, b) ta andras perspektiv och c) förstå sina egna handlingar och försöka identifiera styrkor och begränsningar för att kunna driva sin sak eller inse vad som kan vara problematiskt. Att förstå hur någon annan har tänkt kan möjliggöras genom att låta eleverna möta problemsituationer där de får ta del av vad andra elever har gjort eller svarat, till exempel i en fiktiv klass: "i en annan klass". Kollektiva och redskapsmedierade diskussioner är därmed centrala för att eleverna ska kunna utveckla sitt teoretiska eller algebraiska tänkande. Principerna för lärandeverksamhet vidareutvecklas nedan.

Utifrån ovanstående kan frågor ställas som handlar om vilka redskap som tas i bruk och hur de kan användas för att främja innehållsligt rika, kreativa och reflektiva resonemang i form av klassrumsdiskussioner. Det finns således skäl att ytterligare undersöka betydelsen av hur redskap kan introduceras och användas för att kvalificera diskussionerna matematiskt samt vilka innehållsliga aspekter som medieras genom bruket av redskapen i klassrumsdiskussioner. Om undervisningen syftar till att utveckla elevers algebraiska tänkande och deras problemlösningsförmåga i relation till exempelvis diskussioner om algebraiska uttryck blir frågan om både innehållet och de medierande redskapens potentialiteter av betydelse.

Det preciserade syftet med föreliggande artikel är att exemplifiera och diskutera vilka funktioner lärandemodeller, i kombination med övriga lärandeverksamhetsteoretiska principer (Davydov, 2008), kan ha för att främja elevers diskussioner om algebraiska uttryck. Den mest centrala frågan som vi vill diskutera är:

– Vilka funktioner kan lärandemodeller ha för att helklassdiskussioner om generella strukturer i algebraiska uttryck drivs framåt och kvalificeras?

Lärandeverksamhet

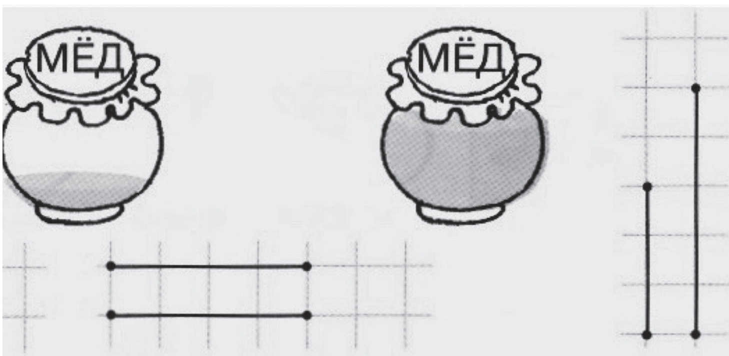
Lärandeverksamhet (*learning activity*) har sin grund i kulturhistoriska (Vygotskij, 2001) och verksamhetsteoretiska (Leontiev, 1978) principer för lärande och utveckling. Dessa principer får konsekvenser både för hur innehållet i undervisningen väljs ut och hur det behandlas och organiseras för främjandet av elevernas teoretiskt tänkande som i relation till matematik kan ses som algebraiskt tänkande (Davydov, Slobodchikov & Tsuckerman, 2003). En lärandeverksamhet i Davydovs mening karakteriseras av att elever introduceras till en problemsituation som skapar ett meningsbärande sammanhang men där deras aktuella kunskaper i viss utsträckning är otillräckliga. En sådan problemsituation behöver konstrueras så att en motsättning byggs in i den uppgift eleverna presenteras för.[1] Motsättningen kan ta form som ett dilemma, en hake eller synbarligen oförenliga villkor. I matematik kan sådana motsättningar skapas till exempel genom att två olika lösningar båda presenteras som korrekta. För att avgöra om båda stämmer eller om någon är felaktig måste eleverna analysera situationen. Utifrån problemidentifieringen tar eleverna, med stöd av läraren, sig an arbetet med det som Davydov (2008) kallar en lärandeuppgift. Upprättandet och upprätthållandet av lärandeverksamheten underlättas av att eleverna kan använda sig av varandras kompetenser, det som Vygotskij (1934/1963) talar om som sekundära erfarenheter för att på detta sätt överskrida sina aktuella kompetenser. Arbetet i en lärandeverksamhet främjas av att eleverna kollektivt, exempelvis i form av klassrumsdiskussioner, reflekterar över andras och egna lösningsförslag (Zuckerman, 2004). Problemsituationer och kollektiva reflektioner är således centrala begrepp i lärandeverksamhet. Ytterligare ett centralt begrepp, och kanske det mest karakteristiska, är lärandemodeller (Davydov, 2008; Repkin, 2003). En lärandemodell ska kunna fungera som ett medierande redskap med vilket eleverna ska kunna lösa det problem de identifierat.

Lärandemodeller som medierande redskap

Davydov (2008) argumenterar för att lärandemodeller kan utgöra en nödvändig länk för utveckling av teoretiskt tänkande. En lärandemodell ska inte blandas ihop med matematiska modeller utan är en form av visualisering som i relation till en specifik lärandeuppgift kan hjälpa eleverna att utforska ett teoretiskt innehåll. Lärandemodeller ses som en speciell form av abstraktion:

> [...] where the visually perceived and represented connections and relations of the material and semiotic elements reinforce the essential relations of the object. [...] This is a unique unity of the individual and the general, where the general and essential come to the fore. (Davydov, 2008, s 95)

I Davydovs matematiska lärandeverksamhet används till exempel sträckor (⊢———⊣) som lärandemodell från årskurs 1. Sträckorna är tänkta att göra det möjligt för de yngsta eleverna att utforska vad som är lika och vad som är olika och i förlängningen hur en olikhet matematiskt kan transformeras till en likhet. I figur 1 nedan finns två likadana burkar som båda har samma innehåll men har olika mängd. De två horisontella parallella sträckorna nedanför burkarna refererar till att burkarna ser likadana ut och har samma innehåll. De två vertikala sträckorna till höger om burkarna visar att volymen av innehållet i de två burkarna inte är lika. Kvantiteten kan därmed inte bestämmas med något tal utan måste istället förstås generellt och relationellt.



Figur 1. *Utdrag ur läromedlet för årskurs 1, Matematikka 1 (Davydov m fl, 2012, s 19)*

Sträckorna kan sedan kopplas samman med algebraiska bokstavssymboler. Kvantiteten i den första burken kan således benämnas a och i den andra b. Det är då möjligt för eleverna att bestämma att $a < b$. Genom att upprätta en relation mellan sträckorna och de algebraiska beteckningarna skapas en lärandemodell som möjliggör för eleverna att utforska olika generella och strukturella aspekter hos ett uttryck. Därmed möjliggörs matematiska diskussioner om likhet, olikhet och möjliga transformationer från olika till lika som generella operationer (Krutetskii, 1976). Att enbart låta eleverna arbeta med det ”nakna” algebraiska uttrycket $a < b$ blir inte meningsfullt. Visserligen skulle eleverna med guidning kunna se hur den uttryckta olikheten $a < b$ på olika sätt skulle kunna transformeras till likheter, till exempel: $a + c = b$; $b - c = a$; $a + d = b - d$. Genom att istället diskutera hur volymerna representerade av a och b kan göras lika ges uttrycket en funktion som är mera innehållslig än vad enbart det nakna uttrycket möjliggör. I en aritmetisk tradition skulle motsvarande exempel kunna vara $6 < 8$ och för att göra $6 < 8$ lika skulle eleverna till exempel kunna resonera sig fram till: $6 + 2 = 8$; $8 - 2 = 6$; $6 + 1 = 8 - 1$. Det konkreta, i detta fall talen, kan med sitt fokus på vilka tal som är möjliga försvåra för eleverna att erfara generella strukturer och relationer. Enligt lärandeverksamhetsteori behöver eleverna först förstå det generella för att sedan kunna se hur det generella kan fungera för konkreta fall, till exempel i form av aritmetiska operationer med tal (jfr Bråting, Madej & Hemmi, 2019). Om eleverna istället använder sträckorna som en lärandemodell kan de transformera dem så att de blir lika genom att till exempel förlänga den kortare sträckan (a) med ytterligare en sträcka (c). Sträckorna a och c är då tillsammans lika långa som sträckan b. Detta ger en grund för att transformera uttrycket $a < b$ till $a + c = b$. Eleverna kan sedan resonera sig fram till andra varianter av generaliserade bearbetningar av relevans för den aktuella situationen, exempelvis kvantiteterna i honungsburkarna. En lärandemodell kan enligt Davydov skapa förutsättning för elevers utforskande av innehållets teoretiska aspekter (jfr Eriksson, 2017, 2018). Eleverna får med andra ord möjlighet att arbeta teoretiskt med lärandemodeller som medierande redskap (Gorbov & Chudinova, 2000).

Metod och analys

Data för föreliggande artikel kommer från ett treårigt forskningsprojekt (år 2017–2019) finansierat av Skolforskningsinstitutet.[2] Projektets övergripande syfte var att utforska hur undervisningen, i termer av matematikuppgifter, lärandemodeller och arbetssätt, kan utformas så att elever ges möjligheter att utveckla förmågan att kunna föra och följa algebraiska resonemang. Studien genomfördes i form av en serie learning studies (Marton, 2015) med lärandeverksamhet[3] som teoretiskt ramverk i årskurserna 1, 5 och 7 i tre olika grundskolor och i en gymnasieskolas åk 1 (bygg- och samhällsprogrammet). I denna artikel används data från de två första learning studies som genomfördes i åk 1 och åk 5 läsåret 2017–2018. I dessa årskurser genomfördes tre respektive fyra iterativt justerade forskningslektioner. Varje forskningslektion videofilmades och transkriberades inkluderande utsagor, tonfall och gester (Radford, 2010; Roth & Radford, 2011). Vid transkriberingen har elevernas namn fingerats. Analysen bygger på data från den tredje forskningslektionen i årskurs 1 och den fjärde i årskurs 5 då dessa lektioner var de mest innehållsligt utvecklade.

Design och genomförande av forskningslektionerna

I årskurs 1 användes Cuisenairestavar som lärandemodell för att visualisera algebraiska uttryck och i årskurs 5 användes på motsvarande sätt ritade sträckor (se nedan).

I Davydovs lärandeverksamhet är tanken, som beskrivits ovan, att eleverna ska möta en problemsituation som kräver ett arbete som kan resultera i utveckling av deras teoretiska tänkande. En sådan problemsituation måste för eleverna upplevas som meningsfull samtidigt som den behöver innehålla någon form av motsättning, ett dilemma eller en så kallad hake (se t ex Eriksson, 2017). Genom att bygga in en motsättning är tanken att eleverna ska erfara ett behov av att utforska problemet (jfr Blanton m fl, 2015). I forskningslektionerna utformades problemsituationerna med hjälp av fiktiva elevers lösningar på olika matematikuppgifter som antingen kunde vara korrekta eller felaktiga. Läraren sa till exempel: ”i en annan klass svarade några elever så här när de fick den här uppgiften” eller ”hur kunde den här eleven ha tänkt?”.

Analysarbetet

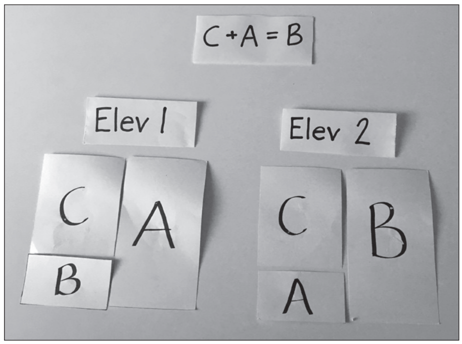
Analysen har sin grund i ett verksamhetsteoretiskt perspektiv (Leontiev, 1978) där mänskliga redskapsmedierade handlingar ses som målinriktade i avsikt att exempelvis lösa olika problem (ett objekt eller ett problemområde). Därmed riktas analysen mot hur eleverna, tillsammans med läraren, initierar och driver diskussioner med hjälp av de redskap de tar i anspråk och på vilka sätt eleverna använder redskapen. Detta gör det möjligt att analytiskt urskilja vilka funktioner lärandemodellerna kan ha i en given klassrumssituation. Speciellt analytiskt fokus läggs på de handlingar som tar form som argument och lärandemodellens funktion i detta. Analysarbetet genomfördes i två steg. I ett första steg identifierades olika sekvenser i respektive forskningslektion där elevernas och lärarens diskussioner kring algebraiska uttryck tog form och där det var tydligt att lärandemodellen hade en betydande funktion. I årskurs 1 och 5 urskildes tre sekvenser vardera. Dessa sekvenser analyserades vidare i ett andra steg med ett fokus på vad som kunde ses som tecken på att eleverna genom diskussionerna hade möjlighet att reflektera över strukturella och relationella aspekter i de algebraiska uttrycken. I detta steg identifierades även vilken funktion eller vilka funktioner lärandemodellen hade för att helklassdiskussionerna kunde drivas framåt och kvalificeras. Vidare identifierades vilken betydelse inplanerade och spontant uppkomna motsättningar hade för elevernas diskussioner.

Resultat

Nedan presenteras resultatet från analysen av de två utvalda forskningslektionerna. Först presenteras resultatet från årskurs 1 och därefter från årskurs 5.

Algebraiska diskussioner i årskurs 1

I den första sekvensen presenterades en problemsituation på tavlan och uttrycket $c + a = b$ tillsammans med hur två fiktiva elever representerade uttrycket (figur 2). Syftet var att iscensätta en problemsituation där den planerade lärandemodellen skulle etableras i en kollektiv diskussion.

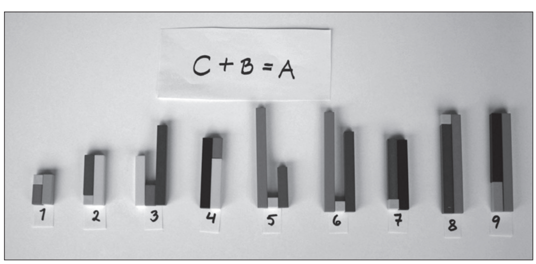


Figur 2. *Problemsituationen såsom den presenterades för eleverna* [4]

I lektionens andra sekvens fick eleverna i uppdrag att med hjälp av Cuisenairestavar[5] skapa representationer av uttrycket $c + b = a$. Stavarna representerade, liksom papperslapparna, okända kvantiteter och syftet var att synliggöra möjliga relationer och strukturer i uttrycket. Elevernas stavkonstruktioner skulle därefter användas som lärandemodeller i de kollektiva diskussionerna i lektionens tredje sekvens.

”Man behöver en till”

Sekvensen inleddes med att läraren samlade eleverna runt ett bord där hon hade lagt kopior på elevernas stavkonstruktioner, både sådana som stämde med uttrycket, $c + b = a$, och sådana som inte stämde (figur 3). Läraren påstod: ”alla de här [stavkonstruktionerna] stämmer”. Flera av



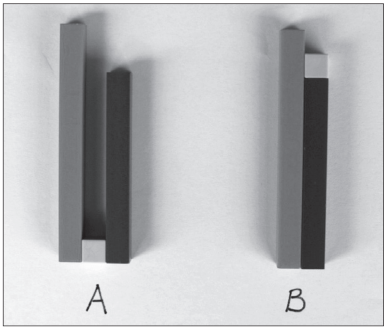
Figur 3. *Kopior av elevernas stavkonstruktioner (både korrekta och felaktiga) utifrån uttrycket $c + b = a$*

eleverna protesterade mot lärarens påstående. Två av eleverna, Adam och Elliot, började argumentera för varför alla stavkonstruktioner inte kunde stämma.

Utdrag 1

Adam:	Eh, till exempel den här [pekar på stavkonstruktion 6 i figur 3] det sitter ju inte ihop här [pekar på konstruktion 6]. Så man borde göra så här [flyttar stavarna så att de ligger som konstruktion B i figur 4]!
Lärare:	Ok! För att det ska stämma överens [med frågande tonfall]?
Adam:	Nej det gick inte [flyttar tillbaka till ursprunglig placering]!
Lärare:	Vad var det du gjorde? Vad är det som inte går? [gör om Adams förflyttning] Vad är det som inte går här?
Adam:	Det ... man behöver en till [pekar där det ser ut att saknas en om de ska bli lika långa].
Elliot:	Dom har skärt bort lite [visar genom att dra fingret över den stav som är ”för lång”].
Lärare:	Ok. Varför behöver vi en bit till? [...]
Elliot:	För annars blir de inte lika långa.

Först efter att Adam och Elliot arrangerat om stavarna upptäckte de stavkonstruktionens egentliga problem, nämligen att stavraderna inte utgjorde en likhet. I den fortsatta diskussionen prövades och omprövades argument för huruvida stavraderna utgjorde en likhet eller inte. I argumenten uppmärksammades att det antingen krävdes ytterligare en bit stav, eller att en bit av den längsta staven togs bort, för att det skulle bli en likhet.



Figur 4. *Konstruktion A visar den ursprungliga konstruktionen och B den manipulation som Adam gjorde i utdrag 2*

Adam och Elliot byggde vidare på varandras idéer genom att laborera med stavkonstruktionerna. Argumenten tog form som en kombination av elevernas verbala uttryck och deras laborerande med stavarna och prövande av vad som hände när stavarna flyttades. Stavarna visualiserade och fixerade vad som kunde utgöra ett problem och således materialiserades argumenten för eleverna. Lärandemodellen gav förutsättningar för det kollektiva arbete som ledde till den mer kvalificerade diskussionen som följer i nästa utdrag.

”Flera blir en bokstav”

Under den pågående diskussionen om innebörden i likheter uppmärksammade Embla att det inte räckte att diskutera stavkonstruktionerna enskilt utan att de också måste beakta det skrivna uttrycket, $c+b=a$. Embla kopplade också till det arbete som gjorts gemensamt i lektionens inledande sekvens och som fanns kvar, skrivet på tavlan (se figur 2).

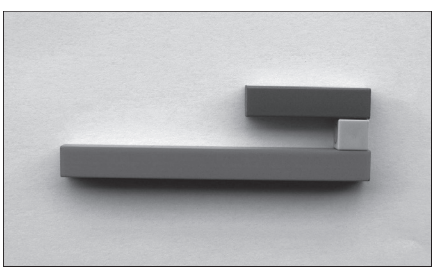
Utdrag 2

Embla: Jag gissade på ... kanske att där [pekar mot tavlan där arbetet från sekvens ett fanns kvar] [ohörbart]. En för varje bokstav [en papperslapp eller en stav för varje bokstav].

Lärare: En för varje bokstav?

Embla: Här [pekar på en stavkonstruktion där tre stavar tillsamman bildar en likhet i överensstämmelse med uttrycket] men här behöver man [pekar på en konstruktion som inte går jämt upp] fler för att de ska bli lika långa [pekar återigen mot tavlan] där, ... lika långa [petar på konstruktionen i figur 5] för då blir det rätt. Här behövs det flera. Då måste man ... flera blir en bokstav. Här blir det en bokstav och det går inte. Där [pekar återigen mot tavlan] ähm, ja.

Embla påpekade att stavkonstruktionen (figur 5) inte stämde med uttrycket då det krävdes fler stavar för att skapa en likhet. I argumentationen tog Embla stöd, dels i en annan stavkonstruktion som bildade



Figur 5. *Stavkonstruktion nummer 5 från figur 3*

en likhet, dels i den tidigare lärandemodellen på tavlan. Embla kopplade också samman stavkonstruktionen med uttrycket och uppmärksammade att antalet stavar måste motsvara antalet variabler i uttrycket. Lärandemodellen möjliggjorde således att Embla kunde vidareutveckla det arbete som Elliot och Adam påbörjat. Det var när Embla pekade på papperslapparna och samtidigt manipulerade med stavarna som argumenten kvalificerades ytterligare. Således materialiserades såväl strukturer i algebraiska uttryck som relationer mellan variablerna i uttrycken.

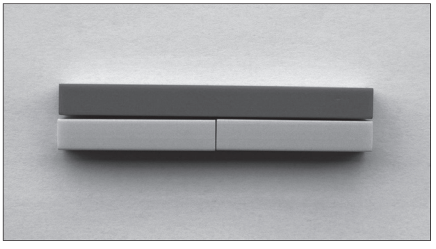
”Då blir det två *c*”

I slutet av lektionen återvände läraren till en annan konstruktion där Ines hade använt två gula stavar för att göra stavraderna lika (figur 6). Läraren försökte få eleverna att upptäcka att även uttrycket behövde justeras för att stavkonstruktion och uttryck skulle stämma överens.

Utdrag 3

Lärare:	Men om vi har kvar dom här gula [figur 6]. Hur skulle vi skriva då? [...] För ni säger att de måste vara olika stora [pekar och rör på den ena gula]. Hur skulle det här uttrycket skrivas [flyttar på lappen med det skrivna uttrycket och håller upp det]?
Ines:	Ska det vara lika långa staplar?
Lärare:	Ja, men om vi skulle skriva det då [pekar på det skrivna uttrycket]?
Ines:	Då så ...
Lärare:	Vilken är den här [pekar på orange]?
Ines:	Det är ... *a*!
Lärare:	*a*
Ines:	... och ... då är det två *c*!
Lärare:	Då är det två *c* istället.
Elliot:	*c* plus *c* blir *a*.

Läraren utnyttjade här Ines konstruktion (figur 6) som tillkommit under det gemensamma arbetet och försökte med hjälp av den driva diskussionen

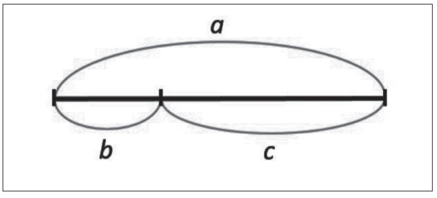


Figur 6. *Ines bearbetning av en av de ursprungliga konstruktionerna*

framåt genom att visa på motsättningen att två olika variabler, *c* och *b*, representerades av två likadana stavar.[6] I diskussionen riktade läraren elevernas uppmärksamhet mot både uttrycket och stavarna samt relationen mellan dessa. Den kollektiva diskussionen ledde slutligen till att Ines och Elliot urskilde att även uttrycket behövde förändras, till $c+c=a$. Detta kan förstås som att eleverna uppmärksammade det generella i stavkonstruktion och därmed valde att göra motsvarande förändring i uttrycket. Eleverna identifierade att uttrycket har strukturen av "summan av två tal är lika med ett tredje tal", och representerade den strukturen genom att bygga konstruktion 1, 2, 4, 7, 8 och 9 (se figur 3). Eleverna identifierade senare att Ines konstruktion (se figur 6) utgjorde ett relationellt specialfall där de två korta stavarna var lika och därmed motsvarade att de två termerna i uttrycket borde vara lika, och för att återge den konstruktionen algebraiskt borde uttrycket justerades till $c+c=a$. I den kollektiva diskussionen skapades en möjlighet att materialisera argumenten med hjälp av de kopior av elevernas konstruktioner läraren samlat eleverna runt. I och med lärandemodellen kunde både läraren och eleverna gå tillbaka till idéer som uppstått under det tidigare teoretiska arbetet. Lärandemodellen möjliggjorde därmed att modelleringen av problemet inte bara blev momentant utan fick funktionen av ett kollektivt "minne".

Algebraiska diskussioner i årskurs 5

I den första sekvensen i årskurs 5 introducerade läraren lärandemodellen genom att presentera en bild av en sträcka med delsträckor markerade med bågar på smartboarden. Sträckorna var markerade med variablerna *a*, *b* och *c* (figur 7).



Figur 7. *Lärandemodell som användes i årskurs 5 (med inspiration från Davydov m fl, 2012)*

Under bilden stod frågan *Vilket eller vilka av följande uttryck stämmer med bilden?* samt tre algebraiska uttryck, $a=b+c$, $b+c=a$ och $b=c+a$. Dessa presenterades som förslag som fiktiva elever hade gett. Avsikten med sträckorna var att de skulle symbolisera okända kvantiteter, det vill säga fungera som en lärandemodell där strukturer och relationer i uttrycken visualiserades. Den planerade motsättningen bestod i att alla förslag från de fiktiva eleverna kunde uppfattas som korrekta, då alla tre uttrycken hade samma struktur. Uttrycken bestod av samma variabler, samma operator samt ett likhetstecken, där de två första algebraiska uttrycken överensstämde med lärandemodellen medan det tredje uttrycket inte stämde. Tanken var att eleverna kollektivt skulle använda sträckorna som ett redskap för att visualisera den inbyggda motsättningen och diskutera uttryckens innebörd. I den andra sekvensen, som planerades i syfte att eleverna kollektivt skulle laborera med lärandemodellen, presenterade läraren en problemsituation i form av ett påstående och tre algebraiska uttryck (figur 8).

Karim, Robin och Petra promenerar till skolan. Petra har lika lång väg till skolan som Karim och Robin tillsammans.

$a = b + c$ $\qquad$ $f + e = m$ $\qquad$ $t = k - s$

Figur 8. *En problemsituation i form av ett påstående och tre algebraiska uttryck som möjliga svar*

För att öppna upp och erbjuda olika möjligheter till kollektiva diskussioner om algebraiska strukturer symboliserades variablerna i uttrycken med olika bokstäver. Även dessa uttryck presenterades som förslag från fiktiva elever. I problemsituationen planerades för en möjlig motsättning i form av att texten hade en additiv karaktär då ordet ”tillsammans” vanligen signalerar att någonting ska läggas samman, men där ett av de algebraiska uttrycken, $t = k - s$, uttrycktes som en subtraktion.

En tredje sekvens urskildes när läraren förde in ett nytt uttryck som inte stämde med den givna lärandemodellen men som däremot kunde stämma med problemet.

”Jag vet inte vilken som är vilken”

I början av helklassdiskussionen frågade en av eleverna, Matilda, om man inte kunde använda den nyligen introducerade lärandemodellen för att visa varför uttrycket $a = b + c$, stämde:

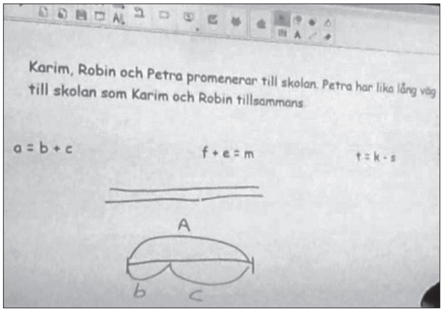
Utdrag 4

Matilda: [ritar en sträcka (figur 9)] Jag tror att det var någonting så här [ritar en båge över sträckan] [ritar två bågar under, en kortare och en längre]. Fast det här är *a* [drar fingret längs den övre bågen] och det är typ *b* [drar med fingret längs den ena bågen] och *c* [drar med fingret längs den andra bågen].

Lärare: Skriv ut det då.

Matilda: [skriver *b* under den vänstra bågen och *c* under den högra] Jag vet inte vilken som är vilken [skriver a ovanför den övre bågen].

Matilda ritade en likadan modell som den läraren presenterat. Hon satte ut variablerna *b* respektive *c* under bågarna och sa ”jag vet inte vilken som är vilken” samtidigt som hon pekade på sträckorna och sedan satte ut variabeln *a*.



Figur 9. *Matildas lärandemodell (nederst)*

Matilda uppmärksammade att relationen mellan variablerna *b* och *c* inte kan bestämmas genom att rita upp lärandemodellen och markera med fingret. Matildas gester och hennes verbala utsaga ”jag vet inte vilken som är vilken” bildade tillsammans med lärandemodellen ett argument som blev tillgängligt för de andra. Hon visualiserade också att relationen till sträckan *a* går att förstå utan att bestämma värdena på någon av de ingående delarna.

”Fast nu är det *k* minus *s*”

Efter Matildas resonemang konstaterade klassen snabbt att även det andra uttrycket, $f + e = m$, stämde. En annan elev, Nils, frågade därefter om inte uttrycket $t = k - s$ också kunde stämma. Han pekade på den längsta sträckan (*a* i Matildas modell) och sa att det var *s*. Vidare pekade han på variabeln *b* och sa att det var *k* samt på variabeln *c* och sa att det var *t*. Nils avslutade sitt förslag med att säga ”så *s* minus *k*”. Den felaktiga kopplingen mellan variablerna och sträckorna samt att Nils sa ”*s* minus *k*”, fick Samuel att invända.

Utdrag 5

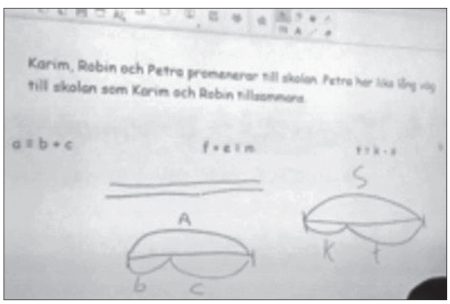
Nils: Kolla, *s* [pekar mot *s* i uttrycket $k = t - s$] skulle då vara Petras [pekar på Petra i texten] och så *b*, den mindre [pekar på *b* i Matildas modell] sträckan antar jag skulle då *k* vara [pekar på *k* i uttrycket] så *s* minus

	k [pekar på s och *k* i uttrycket] skulle bli lika mycket som *c* [pekar på *c* i Matildas modell]
Samuel:	Fast nu är det *k* minus *s* [Samuel hänvisar till uppgiften].
Nils:	Ja, men [rycker lätt på axlarna].
Samuel:	Det är tvärtom.
Nils:	Ja, exakt, tvärtom.
Samuel:	Om du [ohörbart] vänder på dem är det exakt så [...] Jo, tar du den lilla sträckan, minus den stora sträckan då kommer det bli minus [ohörbart].

Nils upprepade det han redan hade sagt och Samuel avbröt honom och sa att ”om *s* var den stora sträckan så är det ju den lilla sträckan minus den stora sträckan”. I detta skede valde läraren att rita en likadan modell bredvid Matildas på Smartboarden och uppmanade därefter Nils att skriva ut variablerna.

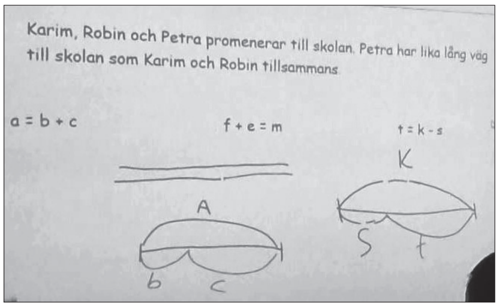
Utdrag 6

Läraren:	Skriv ut de som du tänker.
Nils:	[sätter ut *s*, *k* och *t* vid de bågar han sade] (se figur 10).



Figur 10. *Nils första placering av variablerna i lärandemodellen längst till höger*

Samuel argumenterade för att uttrycket $t = k - s$ kan stämma givet att den längsta sträckan i modellen tillskrivs variabeln *k* och de två kortare sträckorna *s* och *t* men såsom Nils använde variablerna i lärandemodellen stämde det inte. Som respons på Samuels invändning ryckte Nils på axlarna och sa ”Ja, men”, som om det inte spelade så stor roll att han vände på variablerna i uttrycket. Att Nils inte verkade uppfatta det problematiska med hur han hade relaterat uttrycket till sträckorna i lärandemodellen skapade en motsättning som triggade Samuel att fortsätta argumentera. Genom invändningarna ”Det är tvärtom” och ”Om du vänder på dem är det exakt så” gav Samuel uttryck för att lärandemodellen stämde om *k* motsvarade den långa sträckan och *s* en av de kortare sträckorna. När Samuel sa att ”Jo, tar du den lilla sträckan, minus den stora sträckan då kommer det bli minus” jämförde han således sträckornas längder och uppmärksammade att en längre sträcka inte kan subtraheras från en kortare utan att svaret blir negativt, vilket visualiserades i lärandemodellen. Nils justerade slutligen lärandemodellen (figur 11) så att den stämde med uttrycket och kontexten varefter Samuel och övriga elever höll med.



Figur 11. *Nils förändrade placering av variablerna i lärandemodellen längst till höger*

Genom att kollektivt pröva olika argument med hjälp av lärandemodellen materialiserades variablernas inbördes relationer samt innebörden av subtraktion för klassen.

”Eftersom det är samma bokstav”

Lite senare under lektionen presenterade läraren ytterligare ett algebraiskt uttryck, $a = d + d$, i relation till problemsituationen med skolvägen där den tidigare ritade lärandemodellen fanns på tavlan.

Utdrag 7

Lärare:	Om jag skulle skriva ett annat uttryck då. Om jag skulle skriva [skriver $a = d + d$]. Vad skulle det innebära i såna fall?
Filippo:	Karims och Robins väg är lika långa.
Lärare:	Hur kan du veta det?
Filippo:	Eftersom det är samma bokstav.
Lärare:	Eftersom det är samma bokstav och då skulle det betyda att det är samma [hörs från klassen ”det tänker jag också”].
Lärare:	Vad säger Ezra?
Ezra:	Jag säger som Filippo, då är det ju exakt lika långa sträckor eftersom det är … vad heter det, samma bokstav […]

Lärare: Vad säger Sara?

Sara: Asså ... att, typ Karims väg är hälf/eller att Petras väg är dubbelt så lång som Karims.

När läraren skrev det nya uttrycket bjöd hon in till ett vidgat resonemang rörande relationen helhet och delar som dubbelt/hälften. Lärandemodellerna, som fanns tillgängliga på Smartboarden (se figur 11), möjliggjorde för eleverna att granska det nya uttrycket i relation till de tidigare förda resonemangen även om eleverna inte ritade en ytterligare modell. Att alla modellerna och de olika uttrycken fanns visuali-serade möjliggjorde för eleverna att "minnas" tidigare problem och lösningar. Resonemangen som fördes öppnade således upp för en, vad som framstår som, kvalificerad algebraisk förståelse för att $d + d = 2d$.

Diskussion

I det följande diskuterar vi resultatet i relation till syftet och den övergripande forskningsfrågan: Vilka funktioner kan lärandemodeller ha för att helklassdiskussioner om matematiska strukturer i algebraiska uttryck drivs framåt och kvalificeras? Avslutningsvis lyfter vi möjliga implikationer för undervisningen.

Lärandemodellernas funktioner

Genom analysen har vi identifierat tre funktioner som lärandemodellerna hade för att driva och kvalificera kreativa helklassdiskussionerna 1) materialisering av argument, 2) materialisering av problem och problemlösning, och 3) materialisering av ett kollektiv "minne".

Materialisering av argument – Lärandemodellen blev en del av elevernas argument och hjälpte till att ge argumenten specifika innebörder som tillgängliggjordes för övriga elever i klassen. Argumenten byggdes således upp av verbala utsagor, gester och manipulationer av lärandemodellen. I utdrag 1 utgjorde till exempel Adams flyttande av stavarna tillsammans med utsagan "så man borde göra så här" en kommunikativ helhet som var möjlig för de andra eleverna att följa. På liknande sätt materialiserades Matildas (se utdrag 4) argument genom hennes "jag vet inte vilken som är vilken" och att hon pekade på de två kortare sträckorna samtidigt som hon skrev variablerna i bågmodellen. Verbala utsagor som "den där", "nej det gick inte", " jag vet inte vilken som är vilken", "det är tvärtom", tillsammans med att peka i modellen eller justera den utgör kommunikativa (multimodala) helheter (jfr Roth & Radford, 2011).

Materialisering av problem och problemlösning – Lärandemodellen möjliggjorde ett prövande och omprövande av argument genom att den visualiserade och fixerade vad som kunde utgöra ett problem och vad som kunde utgöra möjliga lösningar. Detta möjliggjorde att de kollektiva diskussionerna kunde föras och följas med en gemensam grund.

Materialisering av ett kollektivt "minne" – Lärandemodellen som hade använts i ett tidigare skede fanns tillgänglig på tavlan (figur 2) och i utdrag 2 kan man följa hur Embla kopplade tillbaka till den när eleverna skulle skapa sina stavkonstruktioner (figur 3). Denna form materialisering av minnet som Emblas pekande mot lärandemodellen på tavlan innebar gjorde det möjligt för de andra att följa hennes argument. Likaså kan diskussionen som fördes i utdrag 7 ses som ett exempel på ett kollektivt minne.

Utifrån ovanstående identifierade funktioner kan lärandemodeller således bidra till att olika elevers resonemang och argument kan gestaltas materiellt och därmed lättare granskas och prövas av andra. Med hänvisning till idén om att lärandeverksamhet ska utveckla en reflekterande och kritisk hållning hos eleverna (Eriksson, 2017; Zuckerman, 2003, 2004) visar resultatet att lärandemodeller kan ha en sådan funktion, det vill säga redskapet bidrar till att främja kollektiva teoretiska reflektioner (Davydov, 2008). Arbetet med lärandemodellerna bidrog inte bara till kvalificeringen av klassrumsdiskussionerna utan de blev också en del av klassens gemensamma matematiska språk.[7]

Flera av de resonemang som tog form under klassrumsdiskussionerna kan ses som kvalificerade för elever i grundskolans lägre årskurser. Vidare kan resonemangen som fördes, med Lithners (2008, 2017) indelning i imitativa och kreativa resonemang, ses som kreativa. Det framgår av resultatet att eleverna försattes i problemsituationer där imitativa resonemang inte var möjliga eftersom de inte kunde använda sig av tidigare memorerade procedurer. Problemsituationerna och redskapen i form av lärandemodeller var helt nya för eleverna vilket också ledde till att merparten av de diskussioner som eleverna förde kan förstås som kreativa. De inbyggda och uppkomna motsättningarna i form av hakar eller provokationer bidrog också till att eleverna måste bedöma rimligheten i olika lösningsförslag samt förankra dem matematiskt.

Materialisering av ett kollektivt thinking in action

Lärandemodellernas funktion i helklassdiskussionerna kan på ett övergripande plan beskrivas som att de bidrog till att eleverna kunde identifiera problem, utveckla och belägga sina argument och synliggöra sitt tänkande. Genom att lärandemodeller är visuella skapas förutsättningar för eleverna att delta i en kollektiv reflekterande process där de kan testa sina idéer bland annat genom att bearbeta, omforma och justera modellen (Davydov, 2008; Gorbov & Chudinova, 2000). Detta kan ses som att eleverna ges möjlighet till det Schön (1983) kallar *thinking in action* men också att de, genom att integrera modellerna i sina argument, kan materialisera sitt tänkande. När lärandemodellerna dessutom är tillgängliga för hela klassen skapas förutsättningar för eleverna att delta i ett kollektivt thinking in action.

Kvalificering av helklassdiskussioner – implikationer

Ett uppenbart villkor, med hänvisning till Davydovs (2008) idé om att gå från det abstrakta till det konkreta, är att de lärandemodeller som väljs behöver fånga några av de centrala strukturer och relationer man vill att eleverna ska urskilja, det vill säga lärandemodellen behöver möjliggöra ett teoretiskt utforskande.

I de forskningslektioner som vi analyserat här har vi använt oss av ett kulturhistoriskt grundat lärandeteoretiskt ramverk – lärandeverksamhet (Davydov, 2008). I planeringen av lektionerna lades, utöver valet av lärandemodeller, mycket arbete på att designa problemsituationerna, motsättningar och fundera över hur de valda lärandemodellerna skulle introduceras och användas. Vikt lades även vid att skapa problemsituationerna och försöka bygga in motsättningarna eller hakarna som skulle kunna skapa ett motiv hos eleverna att gå in i ett sådant teoretiskt arbete som eftersträvades. Lärarens beredskap att utnyttja uppkomna situationer och då försöka provocera eleverna att kollektivt kvalificera resonemangen var således teoretiskt motiverade (jfr Eriksson, 2017).

Att använda medierande redskap – här i form av det Davydov (2008) talar om som lärandemodeller – ger som bland annat Ryve, Larsson och Nilsson (2011) noterat ökade förutsättningar för produktiva diskussioner. Men som Newman, Griffin och Cole (1987) visat i relation till uppgifter, kan en och samma uppgift erbjuda kvalitativt skilda förutsättningar för lärande beroende på hur den introduceras och bearbetas. På motsvarande sätt har det betydelse för hur olika redskap introduceras och används (jfr Lindberg, 2010). Även om varken uppgifter eller redskap så att säga kan göras ”läraroberoende” så kan kanske teoretiska principer om vad redskapen ska åstadkomma och vilken typ av kommunikation som behöver eftersträvas komplettera uppgiftsbeskrivningar. På detta sätt ökar förutsättningarna för att utvecklade ämnesdidaktiska kunskaper kan användas av lärarkollektivet utan att centrala aspekter går förlorade. De funktioner som vi i denna studie identifierat kan förhoppningsvis, i kombination med lärandeverksamhetsteoretiska principer, utgöra ett sådant teoretiskt bidrag visavi förandet och följandet av algebraiska resonemang.

Tack

Detta projekt har finansierats av Skolforskningsinstitutet (diarienummer 2016/151). Ett stort tack riktar vi till de lärare och deras elever som medverkade i planering och genomförande av forskningslektionerna: Hiba Mikhail, Eva-Lena Nielsen och Boel Staffansson.

Referenser

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46, 39–87.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bråting, K., Madej, L. & Hemmi, K. (2019). Development of algebraic thinking: opportunities offered by the Swedish curriculum and elementary mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 24 (1), 27–49.

Cai, J. & Knuth, E. (red). (2011). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. New York: Springer.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: a theoretical and experimental psychological study*. New York: Nova Science Publishers.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G. & Saveleva, O. V. (2012). *Matematikka 1* [Matematik 1]. Moskva: VitaPress.

Davydov, V. V., Slobodchikov, V. I. & Tsuckerman, G. A. (2003). The elementary school students as an agent of learning activity. *Journal of Russian and East European Psychology*, 41 (5), 63–76.

Eriksson, H. (2015). *Rationella tal som tal: algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap* (Licentiatuppsats). Stockholms universitet.

Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en learning study. I I. Carlgren (red), *Undervisningsutvecklande forskning. Exemplet learning study* (s 61–81). Malmö: Gleerups.

Eriksson, I. (2018). Lärandeverksamhet, lärandeuppgifter & lärandemodeller. I E. Insulander & S. Selander (red), *Att bli lärare* (s 160–165). Stockholm: Liber.

Eriksson, I. & Jansson, A. (2017). Designing algebraic tasks for 7-year-old students – a pilot project inspired by Davydov's learning activity. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18 (2), 257–272.

Fermsjö, R. (2014). *Rekonstruktion av logaritmer med tallinjer som medierade redskap* (Licentiatuppsats). Stockholms universitet.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, W., Aké, L., Etchegaray, S. et al. (2015). Algebraic reasoning levels in primary and secondary education. I K. Krainer & N. Vondrová (red), *Proceedings of CERME 9* (s 426–432). Prag: ERME.

Gorbov, S. F. & Chudinova, E. V. (2000). The effect of modeling on the students' learning (regarding problem formulation). *Psychological Science and Education*, 2, 96–110.

Hodgen, J., Oldenburg, R. & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. I T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (red), *Developing research in mathematics education* (s 32–45). London: Routledge

Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (red). (2008). *Algebra in the early grades*. Mahwah: Erlbaum.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. I A. Gutiérrez & P. Boero (red), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (s 11–50). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2018). Introduction. I C. Kieran (red), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice* (s ix–xiii). Cham: Springer International.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early algebra research into its nature, its learning, its teaching*. Cham: Springer International.

Krutetskii, V. D. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. The University of Chicago Press.

Larsson, M. (2015). *Orchestrating mathematical whole-class discussions in the problem-solving classroom: theorizing challenges and support for teachers* (Doktorsavhandling). Västerås: Mälardalens högskola.

Larsson, M. & Ryve, A. (2012). Balancing on the edge of competency-oriented versus procedural-oriented practices: orchestrating whole-class discussions of complex mathematical problems. *Mathematics Education Research Journal*, 42, 447–465.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: the role of tools. I A. Watson & M. Ohtani (red), *Task design in mathematics education* (ICMI study 22) (s 191–225). Cham: Springer International.

Lindberg, V. (2010). Skolans kunskapsinnehåll i ljuset av elevers uppgifter – exemplet matematik. I I. Eriksson, V. Lindberg & E. Österlind (red), *Uppdrag undervisning – kunskap och lärande!* (s 109–123). Lund: Studentlitteratur.

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. I H. Chick & K. Stacy (red), *The future of the teaching and learning of algebra* (ICMI study 12) (s 45–70). New York: Kluwer Academic Publishers.

Lithner, J. (2008). Research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255–276.

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM*, 49, 937–949.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. London: Routledge.

Newman, D., Griffin, P. & Cole, M. (1989). *The construction zone: working for cognitive change in school*. Cambridge University Press.

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (red), *Proceedings of CERME 6* (s XXXIII–LIII). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. I C. Kieran (red), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice* (s 3–25). Cham: Springer International.

Radford, L. & Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. I A. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (red), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (s 275–313). Rotterdam: Sense Publishers.

Repkin, V. V. (2003). Developmental teaching and learning activity. *Journal of Russian & East European Psychology*, 41 (5), 10–33.

Roth, W. M. & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.

Ryve, A., Larsson, M. & Nilsson. P. (2011). Analyzing content and participation in classroom discourse: dimensions of variation, mediating tools and conceptual accountability. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 57, 101–114.

Ryve, A., Nilsson, P. & Pettersson, K. (2013). Analyzing effective communication in mathematics group work: the role of visual mediators and technical terms. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 497–514.

Schmittau, J. (2004). Vygotskian theory and mathematics education: resolving the conceptual procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education*, XIX (1), 19–43.

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking. A Vygotskian perspective. *ZDM*, 37(1), 16–22.

Schmittau, J. & Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V. V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8 (1), 60–87.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Stacey, K. & Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red), *The future of the teaching and learning of algebra* (ICMI study 12) (s 1–20). New York: Kluwer Academic Publishers.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1999). Ideas about symbolism that students bring to algebra. I B. Moses (red), *Algebraic thinking grades K–12* (s 308–312). Reston: NCTM.

Strømskag, H. (2017). A methodology for instructional design in mathematics – with the generic and epistemic student at the centre. *ZDM*, 49, 909–921.

Veneciano, L. & Dougherty, B. (2014). Addressing priorities for elementary school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 34 (1), 18–24.

Vygotskij, L. S. (1963). Learning and mental development at school age. I B. Simon & J. Simon (red), *Educational psychology in the U.S.S.R*. London: Routledge & Kegan Paul (arbete i original publicerat 1934).

Vygotskij, L. S. (2001). *Tänkande och språk*. Göteborg: Daidalos.

Warren, E., Trigueros, M. & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. I Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (red), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (s 73–108). Rotterdam: Sense Publishers.

Wickman, P. O. (2014). Teaching learning progressions: an international perspective. I N. G. Lederman & S. K. Abell (red) *Handbook of research on science education* (volume II, s 159–178). London: Routledge.

Zuckerman, G. (2003). The learning activity in the first years of schooling. I A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev & S. M. Miller (red), *Vygotsky's educational theory in cultural context* (s 39–64). Cambridge University Press.

Zuckerman, G. (2004). Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, XIX (1), 9–18.

Fotnoter

1 Denna typ av problemsituationer är inte unik för Davydov-traditionen utan återfinns i andra didaktiska traditioner, t ex: Deweys theory of inquiry som av Wickman (2014) benämns den empiriska metoden och Brousseau (1997) som utvecklat idén med theory of didactical situations (TDS) (se Strømskag, 2017).

2 https://www.su.se/hsd/forskning/forskningsprojekt/developing-algebraic-reasoning-capabilities

3 I ett antal studier har lärandeverksamhet använts som ett alternativ till variationsteori i olika learning studies (se t ex Eriksson, H., 2015; Eriksson, I., 2017; Fermsjö, 2014).

4 Denna figur och övriga figurer i årskurs 1 är efterhandskonstruerade.

5 Cuisenairestavar har tidigare använts som lärandemodeller i andra studier där uppgifter för elever i årskurs 1 designades med inspiration från Davydov (se t ex Eriksson & Jansson, 2017).

6 Två olika variabler, till exempel *c* och *b*, kan visserligen anta samma värde, däremot är det inte lämpligt att representera ett generellt samband med ett specifikt samband i vilket variablerna har samma värde.

7 Eriksson (2015) visar i sin licentiatuppsats att lärandemodeller fungerar som en gemensamt matematikspråklig resurs i flerspråkiga klassrum.

Inger Eriksson

Inger Eriksson är professor i pedagogik vid Stockholms universitet. Hennes forskningsintresse är elevers kunskapsutveckling och förutsättningar för lärande, speciellt i matematik och kemi, i ett verksamhetsteoretiskt perspektiv.

inger.eriksson@hsd.su.se

Sanna Wettergren

Sanna Wettergren är fil lic i didaktik. Hennes forskningsintresse är kvalificering av matematikundervisning i grundskolan, speciellt algebra och resonemang, samt olika aspekter av formativ bedömning.

sanna.wettergren@hsd.su.se

Jenny Fred

Jenny Fred är fil lic i matematikämnets didaktik. Hennes forskningsintresse handlar främst om den tidiga algebraundervisningen samt hur och vad i undervisningen som skapar förutsättningar för elevers lärande.

jenny.fred@edu.stockholm.se

Anna-Karin Nordin

Anna-Karin Nordin är fil lic i matematikämnets didaktik och arbetar vid Stockholms universitet. Hennes forskningsintresse är skapandet av matematiska argument och resonemang i helklassdiskussioner.

anna-karin.nordin@mnd.su.se

Martin Nyman

Martin Nyman är doktorand i matematikämnets didaktik. Hans forskningsintresse rör modeller för utformandet av en undervisning där elever ges möjligheter att engagera sig i ett aktivt undersökande av matematikens abstrakta dimensioner.

martin.nyman@edu.stockholm.se

Torbjörn Tambour

Torbjörn Tambour är docent i matematik vid Stockholms universitet. Hans forskningsintresse är algebra och lärande av algebra.

torbjorn@math.su.se

Abstract

The aim for this article, which draws upon on data from a design research project based on Davydov's principles of learning activity, is to discuss which functions learning models can have to promote students' collective discussions on algebraic expressions. The data is comprised of videotaped lessons in Grade 1 and 5 respectively. The analysis focuses on conditions for qualifying whole-class discussions and the functions learning models can have for the students' collective exploration of mathematical structures and relationships in algebraic expressions. The result indicates that learning models as mediating tools enable the students to conduct creative and reflective discussions on algebraic expressions and their components.