PROBLEM
AVDELNINGEN

Problem om delbarhet, rest och primtal

I detta nummer kom primtal att framstå som ett minitema. Av den anledningen har vi valt problem från avsnittet Delbarhet, rest och primtal i häftet *Taluppfattning med Känguruproblem*. Läs mer om häftet på Nämnaren på nätet.

4390 *Delbarhet med entalssiffra*
Talet 36 har egenskapen att det är delbart med det tal som är entalssiffra i talet, 36 är delbart med 6. Talet 48 har också den egenskapen, 48 går att dela med 8. Hur många tal mellan 20 och 30 har denna egenskap?

4391 *Fyra kusiner*
Ema, Iva, Ritva och Zina är kusiner. Kusinernas åldrar är 3, 8, 12 och 14 år. Zina och Emas sammanlagda ålder är delbar med 5. Zina och Ritas sammanlagda ålder är också delbar med 5. Hur gammal är Iva?

4392 *Summan av två primtal*
På hur många sätt kan talet 1 001 skrivas som summan av två primtal?

4393 *Fyrsiffriga tal*
Hur många fyrsiffriga tal går jämnt upp i talet 102^2?

4394 *Hälften, tredjedel och femtedel*
Hur många fyrsiffriga tal finns det där hälften av talet är delbart med 2, en tredjedel av talet är delbart med 3 och en femtedel av talet är delbart med 5?

4395 *Produkten AB*
Heltalet A har precis två olika delare. Heltalet B har precis fem olika delare. Hur många delare har produkten AB?

4396 *Positiva heltal*
För hur många olika positiva heltal n är talet $n^2 + n$ ett primtal?

4397 *Tal delbara med* 2^{10}
Hur många av talen från och med 2^{10} till och med 2^{13} är delbara med 2^{10}?

4398 *Konsekutiva heltals siffersumma*
Åtta konsekutiva tresiffriga heltal har följande egenskap: Vart och ett av talen är delbart med sin sista siffra. Vilken siffersumma har det minsta av dessa åtta tal?

4399 *Bara 2 och 3 som primfaktorer*
Hur många tal finns det mellan 100 och 200 som har 2 och 3 som enda primtalsfaktorer?

4400 *Absoluta tal*
För hur många heltal n är $|n^2 - 2n - 3|$ ett primtal?

Svar och förslag på lösningar

4390 Svar: 4
21, 22, 24 och 25.

4391 Svar: Iva är 14 år
De enda av de möjliga kombinationerna av två åldrar $(3+8, 3+12, 3+14, 8+12, 8+14, 12+14)$ där summan är delbar med 5 är $3+12$ och $8+12$. Ivas ålder är det tal som återstår, nämligen 14.

4392 Svar: 0
Om ett udda heltal ska vara summan av två heltal måste ett av talen vara jämnt. Det enda jämna primtalet är 2. $1001-2=999$ som är delbart med 9.

4393 Svar: 5
$102^2=(2\cdot3\cdot17)^2=2^2\cdot3^2\cdot17^2$. De fyrsiffriga tal som kan bildas av primtalsfaktorerna är $2^2\cdot17^2=1156$, $2\cdot3\cdot17^2=1734$, $3^2\cdot17^2=2601$, $2^2\cdot3\cdot17^2=3468$ och $2\cdot3^2\cdot17^2=5202$.

4394 Svar: 10
Hälften av det fyrsiffriga talet är delbart med 2, vilket betyder att talet är en multipel av 4. Motsvarande resonemang ger att talet också är en multipel av 9 och av 25. Talen 4, 9 och 25 är *relativt prima*, det vill säga de saknar gemensamma delare. Det leder till att det fyrsiffriga talet är delbart med deras produkt $4\cdot9\cdot25=900$. Fyrsiffriga multiplar av 900 är talen $900\cdot2$; $900\cdot3 \ldots 900\cdot11$. Det finns 10 av dem.

4395 Svar: Det går inte att avgöra utan ytterligare information. Vi vet inte om talen har någon delare som är gemensam.

4396 Svar: 1
$n^2+n=n(n+1)$ är en produkt av två på varandra följande tal av vilket ett är jämnt. Det enda jämna primtalet är 2 och det fås då n är 1, det vill säga det finns ett sådant heltal.

4397 Svar: 8
För att talet ska vara delbart med 2^{10} måste det vara en multipel av 2^{10}. I intervallet finns då talen: $1\cdot2^{10}, 2\cdot2^{10}, 3\cdot2^{10}, 4\cdot2^{10}, 5\cdot2^{10}, 6\cdot2^{10}, 7\cdot2^{10}$ där $8\cdot2^{10}=2^3\cdot2^{10}=2^{13}$.

4398 Svar: 13
Den sista siffran i någon sådan uppsättning av åtta konsekutiva tal är inte 0, eftersom 0 inte är en tillåten delare.

Uppsättningen med åtta på varandra följande tal måste ha slutsiffror som antingen är 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 eller 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. När entalen subtraheras från vart och ett av talen erhålls ett tal som måste vara en multipel av alla ental i serien, det vill säga antingen en multipel av 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 och 8 eller av 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9.

Det andra fallet måste släppas eftersom den minsta sådan multipel är $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7=2\,520$, vilket är större än ett tresiffrigt tal.

Vi koncentrerar oss på den första serien. Det minsta tal som är en multipel av 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 och 8 är $2^3\cdot3\cdot5\cdot7=840$.

Vår uppsättning med åtta konsekutiva tal är därför 841, 842 … 848 varav det minsta talet har siffersumman $8+4+1=13$.

4399 Svar: 5
$100<2^a\cdot3^b<200$
$b=0$ ger $a=7$ och talet 128
$b=1$ ger $a=6$ och talet 192
$b=2$ ger $a=3$ och 144
$b=3$ ger $a=2$ och 108
$b=4$ ger $a=1$ och 162.

4400 Svar: 4
$|n^2-2n-3|=|(n-3)|\cdot|(n+1)|$. En av faktorerna i högerledet måste vara 1 om produkten ska vara ett primtal. Alltså är $n=4, 2, 0$ eller -2. För dessa n blir $|n^2-2n-3|$: 5, 3, 3 eller 5, samtliga primtal (bara två olika primtal men fyra olika n).

Ulrica Dahlberg