UPPSLAGET

Mattemagi från delbarhet

Här beskrivs hur ett mattemagi-trick från Benjamin Arthurs bok *Secrets of mental math: The mathemagician's guide to lightning fast math* kan användas som inspiration för en lektionsaktivitet. Aktiviteten har potential att stimulera elever från mellanstadiet och uppåt.

Maria ber Johan att dolt multiplicera sju ensiffriga tal större än ett på sin miniräknare. Johan multiplicerar sju, tre, åtta, sju, fyra, två, sex och får produkten 56 448. Därefter får Johan som instruktion att läsa upp siffrorna i produkten från vänster, men utelämna en av dem. Johan utelämnar åttan och läser följaktligen upp: "fem, sex, fyra, fyra". Maria lyssnar och är därefter tyst en kort stund innan hon lite kryptiskt svarar: "Min farmor bor på Ahlgatan 64, men det är inte 64 du söker, utan snarare det tal som multiplicerat med sig själv är 64. Du utelämnade 8". Häpet frågar Johan hur Maria kunde veta – han fick ju välja allting helt själv och på egen hand göra alla beräkningar! Johan blir misstänksam och undrar: Var det bara ren bonntur?

Hur funkar "tricket"?

Kommer Maria alltid kunna säga vilken siffra det är som Johan har utelämnat? Om inte, under vilka förutsättningar fungerar tricket? Dessa frågor ligger till grund för den föreslagna lektionsaktiviteten.

I exemplet är det faktiskt så att Maria hade lite tur, men inte så som Johan misstänker – att hon slumpmässigt valt siffra och lyckats välja rätt. Nej, turen infann sig snarare vid Johans val av faktorer då de resulterade i att produkten kan skrivas $9 \cdot C$ där C är ett naturligt tal, vilket är detsamma som att primtalsfaktoriseringen av produkten innehåller faktorn 3^2. Detta innebär att produkten är jämnt delbar med 9, och ett tal som är jämnt delbart med 9 har också en siffersumma som är jämnt delbar med 9. Denna egenskap kan utnyttjas för att avgöra vilket tal det är som har utelämnats.

Vi tittar återigen på exemplet, men nu utifrån Marias perspektiv. Maria har ingen vetskap om vilka faktorer Johan har valt, men förutsätter trots det att produkten är jämnt delbar med 9. När Johan läser upp "fem, sex, fyra, fyra" gör Maria lite snabb addition i huvudet och får siffersumman av nämnda tal till 19. Därefter väljer hon det ensiffriga tal som gör att siffersumman blir jämnt delbar med 9. Eftersom $19 + 8 = 27$, väljer Maria talet 8. För att förvilla Johan lite ytterligare drar hon en sidohistoria om talet (Ahlgatan 64), innan hon slutligen avslöjar att det är en åtta som Johan utelämnat.

Som du ser kan tricket vara relativt enkelt och rättframt att genomföra – och de flesta kan algoritmiskt lära sig grunderna för det snabbt.

För att få en djupare förståelse av trickets styrkor och svagheter är det värt att reflektera kring följande frågor:

a. Hur ofta har Maria tur med faktorvalen?
b. Är det nödvändigt att Johan använder just sju faktorer för att det ska fungera?
c. Spelar det någon roll i vilken ordning Johan läser upp produktens siffror?
d. Vad händer om produkten innehåller en nia eller en nolla, och Johan väljer att utelämna någon av dessa två siffror?

Punkt a

I praktiken är det svårt att uppskatta hur stor andel av gångerna som Maria kommer att ha tur med faktorvalen, men utifrån de cirka 500 gånger jag genomfört tricket, har jag i cirka 95 % av fallen haft tur med faktorvalen. Denna relativt höga andel beror nog huvudsakligen på att personen som utsätts för tricket ombeds välja ett relativt stort antal faktorer. Sannolikheten för att primtalsfaktoriseringen av produkten innehåller 3^2 ökar nog – till en viss gräns i alla fall – med ett större antal faktorer. Det är också bra att känna till att om Maria använder den strategi som beskrivits men inte har tur med faktorvalen, då kommer hon att gissa fel.

Punkt b

Just sju faktorer är inte nödvändigt för att tricket ska fungera. Men sju verkar vara tillräckligt många för att det oftast ska fungera.

Punkt c

I och med att det enda Maria gör med siffrorna som Johan läser upp är att addera dessa för att beräkna siffersumman, spelar det ingen roll i vilken ordning Johan läser upp dem, eftersom addition är en kommutativ operation.

Punkt d

Låt säga att Johan som faktorer istället hade valt talen: tre, tre, tre, tre, nio, nio, nio. Då hade han erhållit produkten 59 049. Om Johan då väljer att utelämna en nia hade han läst upp: fem, noll, fyra, nio. Här är siffersumman 18, alltså ett tal som redan är jämnt delbart med 9. Det här är problematiskt för den som gör tricket, för nu finns det alltså två olika ensiffriga tal som kan adderas för att göra siffersumman jämnt delbar med 9 – nämligen noll (18) och nio (27). Här kan Maria inte vara säker på vilken siffra som har utelämnats utan får helt enkelt gissa. Min erfarenhet är att när en nolla finns med är människor i allmänhet betydligt mer benägna att utelämna en nolla än en nia, därför blir en nolla oftast min gissning. Skulle jag med noll ha fel brukar jag säga något i stil med ”Jag vet, och det är inte ettan, tvåan, trean ... heller, utan du har utelämnat en nia”.

I klassrummet

Hur kan vi arbeta med matematiken relaterad till detta trick i klassrummet? Två vägar:

- Eleverna får först lära sig tricket algoritmiskt och därefter arbeta med förståelse för varför det fungerar.
- Eleverna får med läraren som guide utforska problemet och själva försöka komma på hur det fungerar.

För den sistnämnda vägen kan det vara lämpligt att låta elever använda en tabell, likt den som finns upplagd på *Nämnaren på nätet*, för att lättare kunna upptäcka mönster som finns för faktorer, produkt och siffersumma. Där finns även ett förslag på en programmeringsuppgift för elever som behöver en extra utmaning.

Några matematiska begrepp och relationer att förklara och arbeta vidare med utifrån denna aktivitet:

- Vad *siffersumma* innebär.
- *Primtalsfaktorisering* och *faktorisering* överlag. Exempelvis som del av förklaring till varför produkten 18 är jämnt delbar med nio, trots att en nia eventuellt inte använts som faktor vid beräkning av produkten ($18 = 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 2$).
- Varför det gäller att ett tal som är jämnt delbart med nio också har en siffersumma som är jämnt delbar med nio.
- *Kombinatorik* och på hur många sätt man utifrån sju faktorer kan skapa produkter som är jämnt delbara med 9.

Björn Runow