



HÖGSKOLAN
DALARNA

Begrepp i matematikundervisning

Lotta Wedman

En presentation för NCM

2021-05-27



Presentation av mig



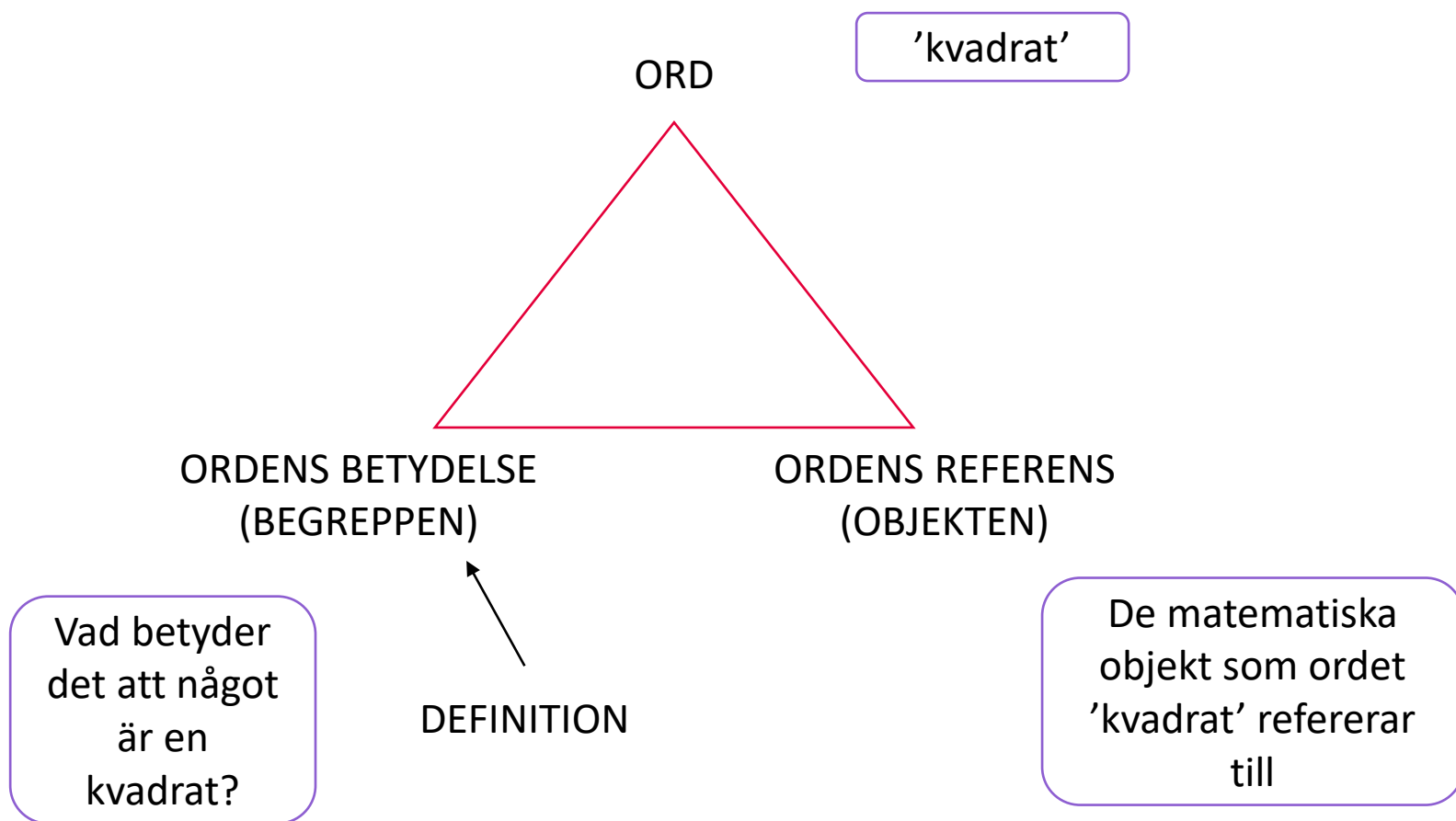
- Gymnasielärare: matematik och filosofi
- Lärarutbildningen Högskolan Dalarna (2011 -)
- Doktorand matematikdidaktik (gu, anställd av NCM)
- Disputation ht 2020

Begrepp: mitt stora intresse

- Oändlighetsbegreppet, gränsvärdesbegreppet, funktionsbegreppet
- Geometriska begrepp: area, höjden i en triangel
- Talbegrepp: Hur ser ett talbegrepp ut när man håller på med algebra?
Hur ser det ut när man håller på med statistik?
- Hur förändras begrepp över åren?
- Begreppet *begrepp*: Vad är egentligen ett begrepp?



Den begreppsliga triangeln

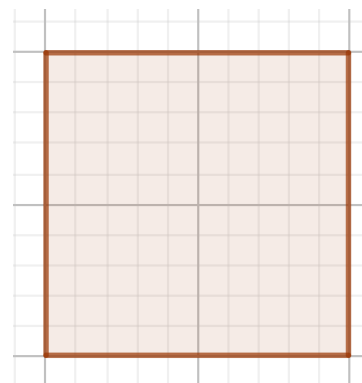


Exempel: *kvadrat*

- Ordet 'kvadrat' har sju bokstäver
- Ordet 'kvadrat' har en betydelse: begreppet *kvadrat*
- Betydelsen kan pekas ut av en definition: "En kvadrat är en fyrhörning där alla sidor är lika långa och alla vinklar är räta"
- I betydelsen ingår också relationer till andra begrepp:
 - En kvadrat är en slags rektangel
 - En kvadrat är en slags romb
- Kvadrater kan vara olika stora och vara vända åt olika håll
- Man kan räkna ut area och omkrets av en kvadrat
- Man kan rita in kvadrater i ett koordinatsystem

Exempel: *kvadrat*

- Kvadrater kan användas för att representera olika saker:
procent



- En del skyltar har kvadratisk form
- Det finns inga kvadrater i världen, bara objekt som har en kvadratisk form

Ord och begrepp

- Ofta blandas ord och begrepp ihop
- I vissa sammanhang innebär ett fokus på begrepp att få elever att använda rätt ord: 'subtrahera' istället för 'ta bort' och 'skillnad'
- Listor med ord, med rubriken "Begrepp"
- Behöver också fokusera på hur eleverna förstår orden
- Vilken innebörd lägger de i orden?
- Vilken innebörd finns i orden rent matematiskt?

Begrepp i uppslagsverk

- **Begrepp** är det abstrakta innehållet i en språklig term, till skillnad från termen själv och de konkreta eller abstrakta objekt som termen syftar på.

Vad är det abstrakta innehållet



Platon och Aristoteles

- Aten ca 300 f.Kr.

Vad betyder det att rosor av olika arter och färger delar egenskapen att vara en ros?

Platon och Aristoteles var överens om att begreppet *ros* är ett abstrakt objekt, som innehåller essensen av vad det är att vara en ros.

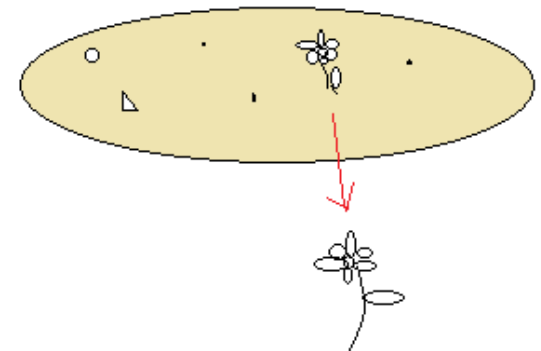
Det är begreppen som gör att nya rosor inte är helt nya för oss, vi kan ha kunskap utan att ha erfarenhet av alla konkreta rosor.

Platon



HÖGSKOLAN
DALARNA

- Begrepp är idéer som existerar i en idévärld (utanför människan).
- Rosorna i världen är kopior av begreppet *ros*
- De matematiska objekten finns i idévärlden.

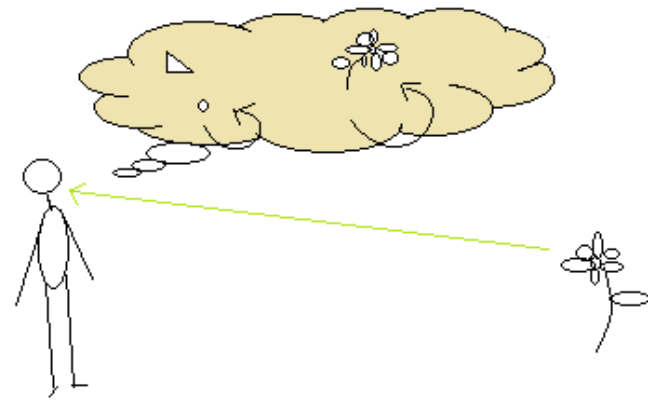


En platonisk syn idag?

- Frege (1884): De matematiska begreppen bestäms genom definitioner
Begreppet kvadrat bestäms genom definitionen "En kvadrat är en fyrhörning där alla sidor är lika långa och alla vinklar är räta"
- Hilbert's program för att axiomatisera matematiken, där begreppen var beståndsdelar
- Begreppen är betydelsen som ord får i språket eller i matematiken
- Vi ska undervisa eleverna så att de får kunskap om begreppen

Aristoteles

- Begreppen uppstår i det mänskliga sinnet som en abstraktion
- Begreppet *ros* är en mental bild av en ros
- De matematiska objekten konstrueras i det mänskliga sinnet



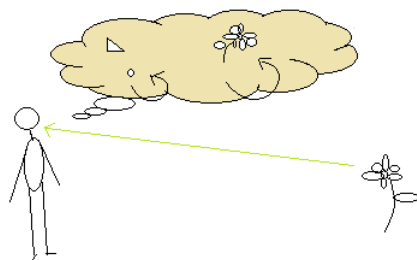
Ett mentalt synsätt idag

- Piaget: Ett begrepp är en mental representation som individen utvecklar
- Eleverna utvecklar egna begrepp.
- Begreppet *kvadrat* kan ha delvis olika innebörd beroende på vem det är som har utvecklat begreppet
- Mitt begrepp *kvadrat* kan vara lite annorlunda jämfört med ditt begrepp *kvadrat*, beroende på vilken betydelse vi lägger i ordet 'kvadrat'

Det finns olika synsätt på vad begrepp är

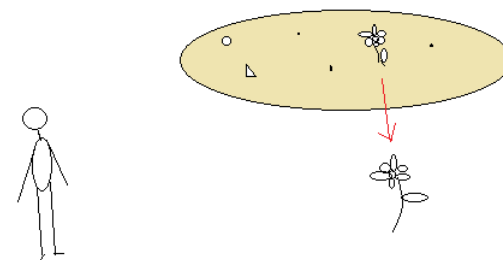
Mentalt

- Begrepp är mentala bilder eller mentala representationer
- Begrepp utvecklas av individen



Icke-mentalt

- Begrepp är oberoende av människan
- Begrepp bestäms av definitioner
- Begrepp är byggstenar i matematiken

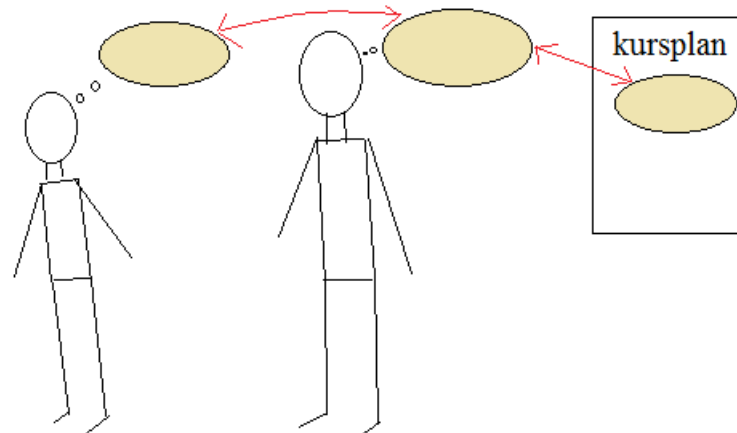




HÖGSKOLAN
DALARNA

Behöver vi två slags olika begrepp?

- Vi kanske både behöver en insikt i matematikens natur och i psykologiska processer?



I matematikdidaktisk forskning är begrepp ibland mentala och ibland icke-mentala

How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics (Tall, 2013)

- Mentalt

“[t]hese multiple mental links are necessary for the biological brain to construct the concept of number”

(Tall, 2013, p. 40)

- Icke-mentalt

“the concept of real number was given a formal construction in different ways by Georg Cantor and Richard Dedekind

(Tall, 2013, p. 270)”

**Hur påverkar dessa två olika
syner på begrepp vår
undervisning?**



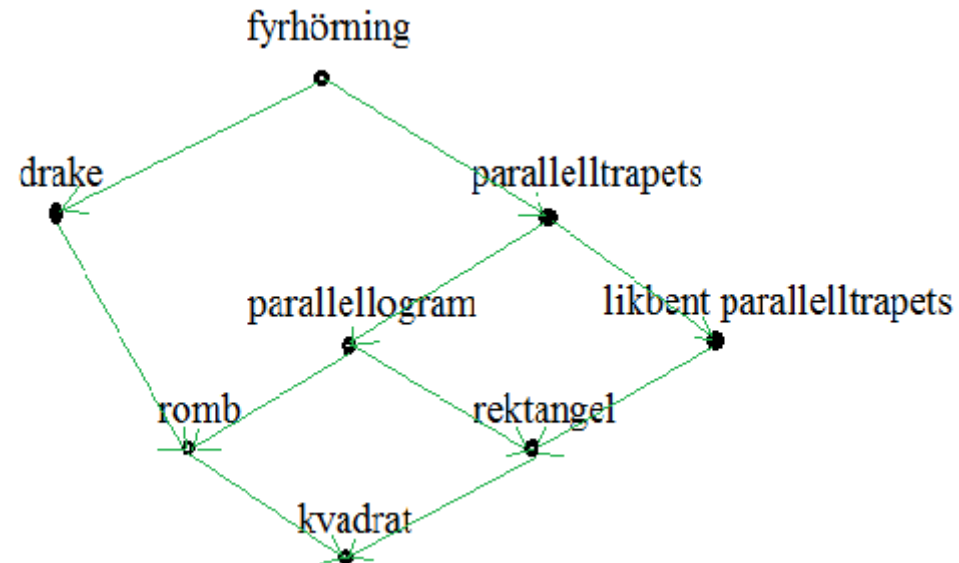
Vad undervisar vi om/för?

- Undervisar vi om matematikens uppbyggnad utifrån begreppens definitioner och hur begrepp relaterar till varandra utifrån egenskaper och definitioner?
- Undervisar vi om matematik för att eleverna ska bygga upp begreppsliga (mentala) strukturer som är effektiva i problemlösning?



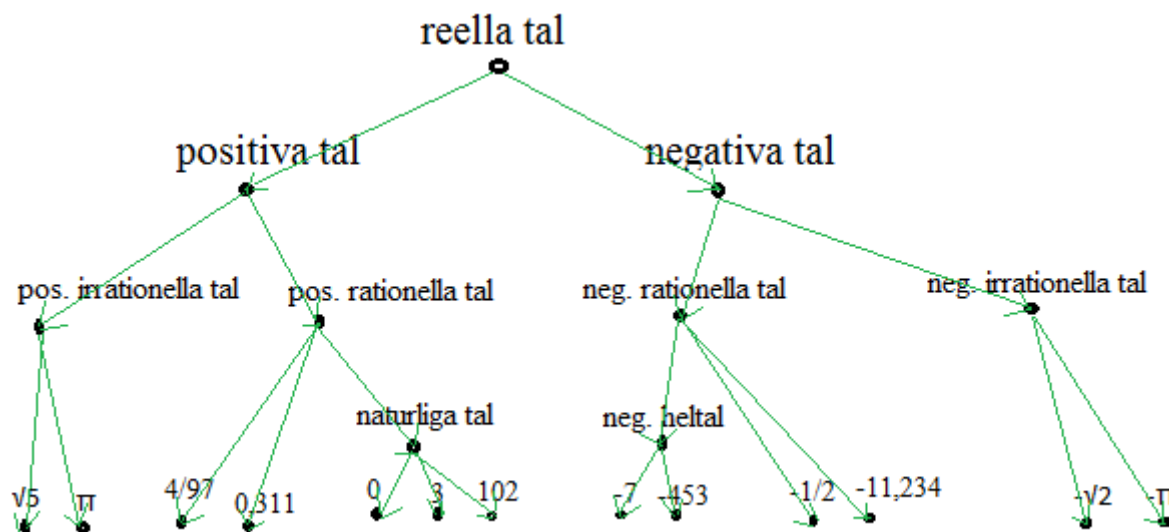
Begreppsstruktur i ett icke-mentalt synsätt

- Definitioner, egenskaper
- Likheter och skillnader mellan olika begrepp
- Matematiska begrepp har en hierarkisk struktur
- Viktigt att veta att en kvadrat är en slags rektangel





Begreppsstruktur i ett icke-mentalt synsätt

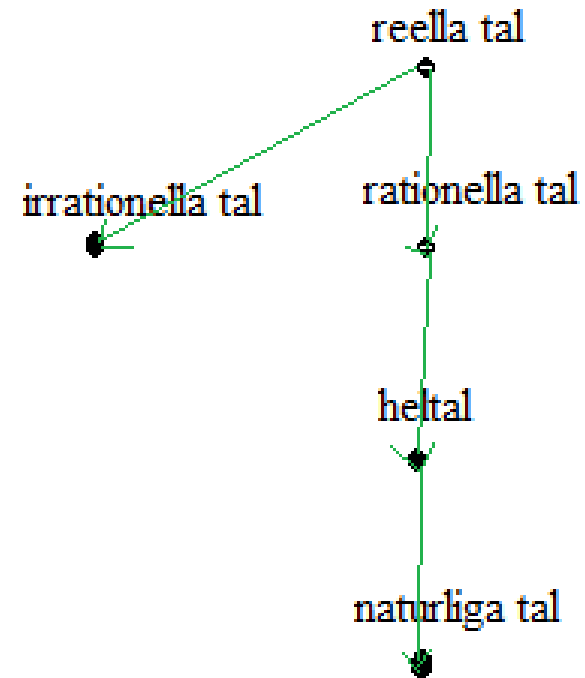
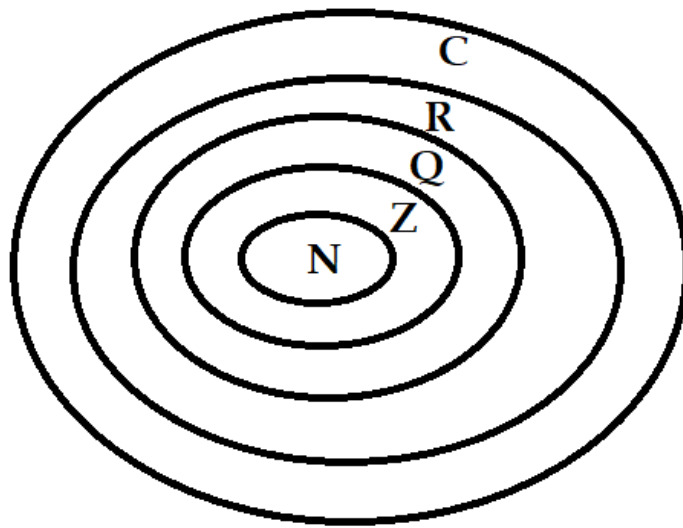


Alla begrepp finns inte med: rationella tal, heltal, primtal, udda tal, jämna tal, ...



Begreppsstruktur i ett icke-mentalt synsätt

HÖGSKOLAN
DALARNA





HÖGSKOLAN
DALARNA

Hur undervisar vi om begrepps egenskaper och relationer mellan begrepp?



Begreppsstruktur i ett mentalt synsätt

- Hur ser elevernas mentala begreppsstrukturer ut?
- Hur bygger effektiva problemlösare upp sina begreppsstrukturer?

Det finns forskning som visar att framgång i matematik hänger ihop med en medvetenhet om strukturer. Högpresterande kan göra kopplingar mellan begrepp. Lågpresterande har ofta osammanhängande begrepp.

Hur uppfattar eleverna bråk?

Intervju Axel, 9 år

Vad tänker du på när du tänker på bråk?

Tal i bråkform

Kan du ge ett exempel?

$7/9$

Kan du ge ett exempel till?

$1/9$ $2/9$ $3/9$ $4/9$ $5/9$ $6/9$ $8/9$ $9/9$

Forts.

Vilket är det största bråktalet?

Det finns flera:

$1/1$ $2/2$ $3/3$ $4/4$ $5/5$ $6/6$ $7/7$ $8/8$ $9/9$ $10/10$ ∞/∞

Vilket är det minsta bråktalet?

$1/\infty$

Tydligt: $0 < (\text{eller } \leq) n/m \leq 1$

Forts.

Kan det bli $0/9$?

Om det blir minus kan det det

t.ex. $1/9 - 1/9$

Kan det bli ännu mindre än 0?

t.ex. $1/9 - 2/9 = -1/9$

Kan det bli större än 1?

t.ex. $1/9 + 9/9 = 1 \frac{1}{9}$

Kan utveckla talområdet om han får frågor

Forts.



HÖGSKOLAN
DALARNA

Kan du komma på något som är större än $\frac{10}{9}$? $\text{TEX. } \frac{1000}{1}$

Finns det något ännu större? $\text{TEX. } \frac{\infty}{1}$

Något ännu större? $\text{TEX. } \frac{\infty \infty}{\infty \infty}$

Finns det något mindre än $-\frac{1}{9}$? $\text{TEX. } -\frac{\infty \infty}{\infty \infty}$

Hur uppfattar eleverna bråk?

Vad är skillnaden mellan en nämnare och en täljare?

Täljaren talar om hur många delar man har och
nämnaren talar om hur många delar figuren är
indelad i.

Kan du ge något exempel? T.E.X. en oktagon 
Vad är nämnaren & täljaren nu?
Täljaren är de rutor jag har målat och
nämnaren är hur många delar som det finns

Forts.

Vad tänker du mer på när du tänker på bråk?

figurer

Vad tänker du på för figurer då?

T.ex. fyrhörningar, trianglar, femhörningar,
sexhörningar och oktagoner

På vilket sätt har det med bråk att göra?

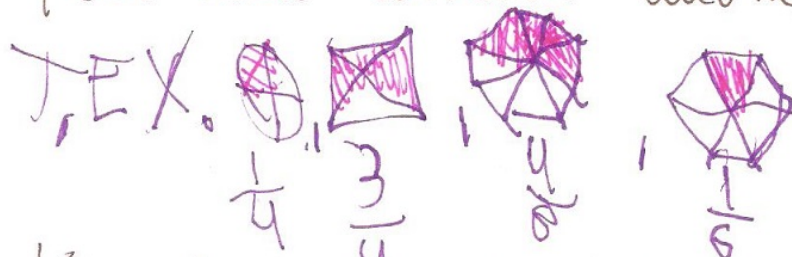
Man kan dela in figurerna i olika delar.

Forts.



HÖGSKOLAN
DALARNA

Kan man använda andra typer av figurer?



Kan du visa hur det blir bråk: figurerna?

Hur uppfattar eleverna bråk?

Enkät en klass i årskurs 4

1. När du tänker på bråktal, vilket tal tänker du på då?
2. Ge tre andra exempel på bråktal.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 23, 32

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$$

Division

$$\frac{4}{9}, \frac{2}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{3}{3}, \frac{7}{7}, \frac{9}{9}$$

$$\frac{2}{15}, \frac{3}{12}, \frac{5}{10}, \frac{10}{12}$$

$$\frac{62}{6}, \frac{23}{8}, \frac{21}{7}, \frac{10}{2}, \frac{10}{5}, \frac{15}{3}$$



HÖGSKOLAN
DALARNA

Forts.

Vilket är det största bråket du vet?

(Heltalssvar)

(Inget svar)

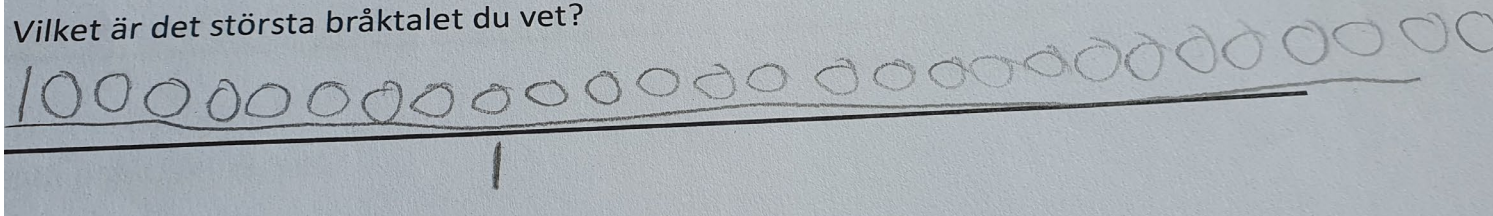
Tio tiondelar

$$\frac{1}{1}, \frac{9}{9}, \frac{10}{10}, \frac{1000}{1000}$$

$$\frac{99}{100}$$

$$\frac{1}{10000}$$

Vilket är det största bråket du vet?



Forts.

Vilket är det minsta bråktalet du vet?

(Heltalssvar)

(Inget svar)

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{0}{10}$$

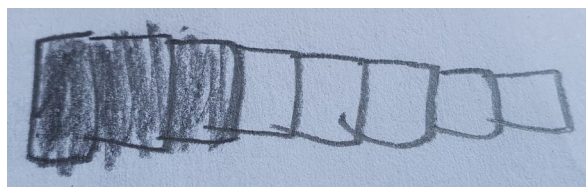
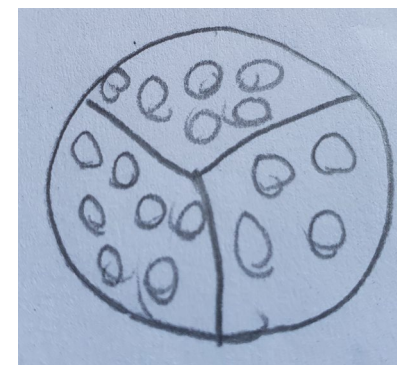
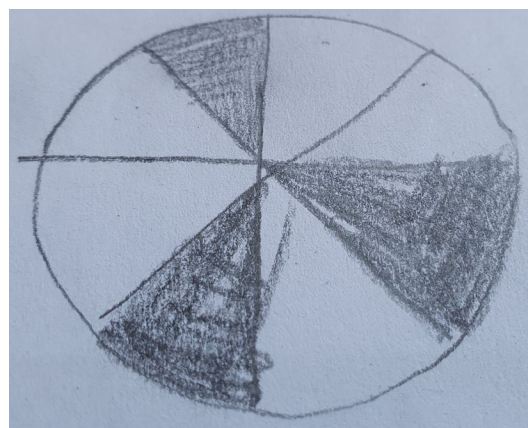
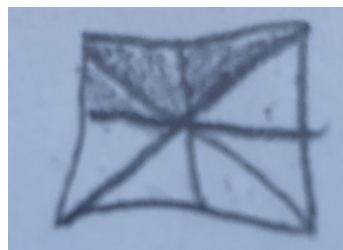
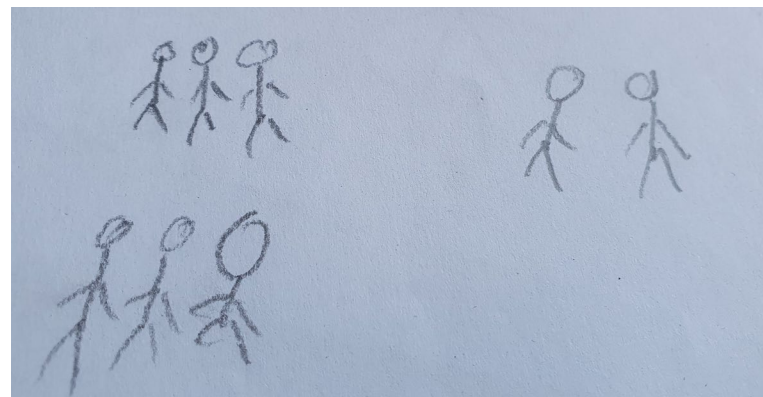
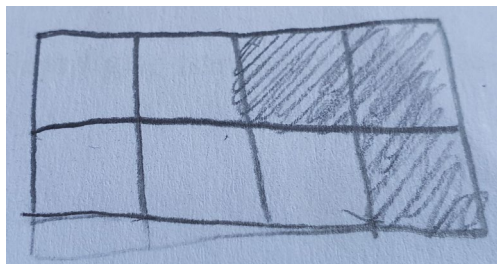


HÖGSKOLAN
DALARNA

Forts.

Rita en figur som visar bråket $\frac{3}{8}$

(Inget svar)



Forts.



HÖGSKOLAN
DALARNA

4. Vilket är det största bråktalet du vet?

$$\frac{10}{10}$$

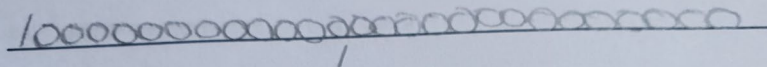
5. Vilket är det minsta bråktalet du vet?

$$\frac{0}{10}$$

Rita en figur som visar bråktalet $\frac{3}{8}$



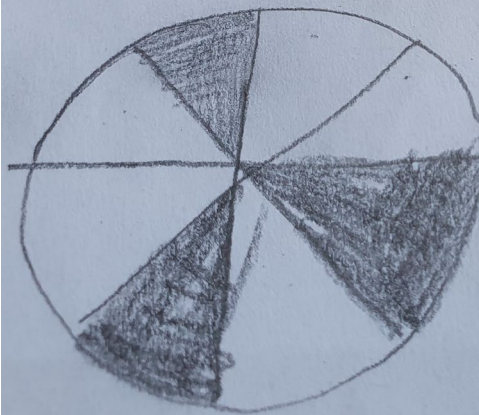
4. Vilket är det största bråktalet du vet?



5. Vilket är det minsta bråktalet du vet?

$$\frac{1}{1}$$

6. Rita en figur som visar bråktalet $\frac{3}{8}$



Forts.



HÖGSKOLAN
DALARNA

2. När du tänker på bråktal, vilket tal tänker du på då? Svara i rutan.

2

3. Ge tre andra exempel på bråktal. Svara i rutorna.

3 4 5

4. Vilket är det största bråktalet du vet?

9/9

5. Vilket är det minsta bråktalet du vet?

1/1

6. Rita en figur som visar bråktalet $\frac{3}{8}$

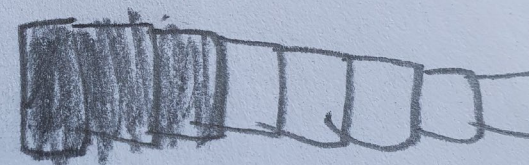
1. Vilket är det största bråktalet du vet?

999 999

Vilket är det minsta bråktalet du vet?

1

Rita en figur som visar bråktalet $\frac{3}{8}$



Hur undervisar vi om relationer mellan begrepp?

- Om vi vet hur effektiva problemlösare tänker, kan vi använda detta för att planera vår undervisning?





HÖGSKOLAN
DALARNA

Kan vi ha nytta av två olika synsätt?

- Ett mentalt synsätt på begrepp kan användas om vi är intresserade av hur eleverna tänker om matematiken
- Ett icke-mentalt synsätt på begrepp kan användas om vi är intresserade av begreppens egenskaper, definitioner och hur begreppen relaterar till varandra utifrån hur matematiken är uppbyggd

Paus 5 min



Kanske onödigt att ha två olika betydelser för samma ord?

- Kanske bättre att använda 'begrepp' och 'begreppsförståelse'?
- Begrepp: icke-mentalt
- Begreppsförståelse: mentalt

Nuvarande projekt

Högpresterandes kognitiva strukturer

Syftet är att studera hur högpresterande elever gör kopplingar mellan begrepp i matematik

Intervjuer med elever i årskurs 4



Nuvarande projekt

Uppgifter som skapar begreppsliga utmaningar i matematik

Syftet är att ta fram principer för urval och design av uppgifter/problem som fokuserar på utveckling av elevers begreppsförståelse. Dessa uppgifter ska utvecklas och testas i klassrummet. Forskning kommer att bedrivas på klassrumsinteraktion, men vi vill också få möjlighet att intervjua elever för att få en större insikt i hur de utvecklar olika begrepp.

Tillsammans med Jonas Jäder



HÖGSKOLAN
DALARNA

Tack för att du har lyssnat!

lwd@du.se

