

Diskreta tal är inte diskreta

Det finns ord som har en speciell betydelse i matematik. Ett sådant är ordet diskret. Den första betydelse som kommer upp i en modern ordbok är taktfull, finkänslig, försynt, dämpad eller lågmäld. Exempel som ges är ett diskret påpekande; en diskret färg; att klä sig diskret; att vara diskret när du lämnar salen. I Svenska Akademiens ordbok, SAOB 1916, kan vi läsa att ordet diskret kommer av latinets *discretus* som betyder åtskild, skild från varandra. Det är ordets ursprungliga betydelse. Motsatsen är sammanhängande eller kontinuerlig.

Så småningom kom ordet diskret att användas i överförd bemärkelse för att beteckna egenskaper hos en person som håller sig lite vid sidan av andra. En sådan person är ofta försiktig i sitt tal, eftertänksam, varsam, försynt, finkänslig, lågmäld. Det är en person som kan behålla en hemlighet. Därifrån överfördes ordets betydelse till konsthantverk som kunde beskrivas som dämpade och måttfulla, och åt saker som ska hållas privata och hemliga. På engelska kom den nya betydelsen av ordet att få en annorlunda stavning, och därmed, helt diskret, vandra iväg till att bli ett nytt ord. På engelska står ordet *discrete* för något avskilt och ordet *discreet* för något finkänsligt och lågmäلت. Rubriken skulle på engelska vara *Discrete numbers are not discreet*, vilket kan översättas till Åtskilda tal är inte försynta.

I matematiken används ordet i sin ursprungliga betydelse. Diskreta tal är tal som inte hänger ihop, medan kontinuerliga tal gör det. Uttryckt med mängdläras språk definieras en diskret mängd som en mängd där ett avstånd har definierats sådan att det för varje element finns ett minsta positivt avstånd till varje annat element. Vad innebär då det?

Jo, ett sätt att förstå det är att tänka att diskreta tal betecknar antal. Räkna vi till exempel antal personer så är det bara hela antal, antingen 1 eller 2 eller 3 osv. Aldrig något däremellan. Det händer att vi låtsas som om diskreta tal är kontinuerliga genom att räkna medeltal. Exempelvis kan vi säga att svenska kvinnor i genomsnitt föder 2,3 barn. Det går inte, barn är diskreta element och förekommer bara som hela. När vi använder medeltal väljer vi att betrakta de diskreta talen som kontinuerliga.

Bilden av diskreta tal som antal fungerar ganska länge men innefattar inte negativa heltal som också är diskreta. Ett annat sätt är att betrakta tallinjen. Om vi enbart tittar på heltalen på tallinjen så utgör de distinkta punkter med ett väldefinierat avstånd emellan (en enhetssträcka). De är alltså skilda från varandra på tallinjen.



En diskret mängd leksaksdjur.

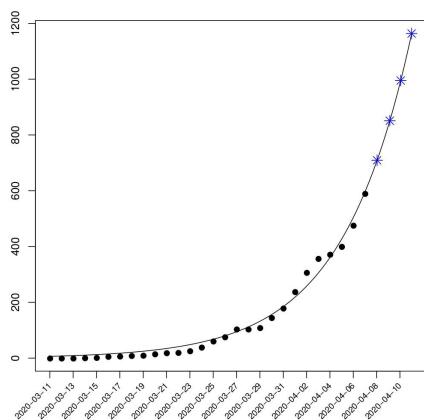


Mängden av kontinuerliga tal motsvaras på tallinjen av alla punkter, även de oändligt många punkterna som ligger mellan heltalen. De är oändligt många och sägs vara sammanhängande, vilket innebär att hur nära varandra du än väljer två tal så kommer det att finnas fler tal mellan dessa.

När elever ska ta klivet från de vardagliga heltalen till den abstrakta matematiska idén om en kontinuerlig talmängd uppvisar de ofta ett visst motstånd. Att det finns oändligt många tal mellan exempelvis 1,0 och 2,0 kan vara svårt att acceptera. Elever tänker ofta på talen däremellan som diskreta och uppräknliga de också. Till exempel kan elever svara att det finns precis nio tal mellan 1,0 och 2,0 – inte oändligt många. Den här revolutionerande förändringen i förståelsen av tal skulle nog kunna göras mycket mer explicit i skolans undervisning. Nu kan det vara så att eleven möter heltal, så plötsligt finns det decimaltal, sen negativa tal och sen möter de pi som sitt första (och ofta enda) icke-rationella tal i skolmatematiken. Vilken möjlighet har eleverna då att förstå olika talmängder och de egenskaper som kännetecknar dem?

Kontinuerlig kommer från latinets *continuus* som betyder sammanhängande. Ordet kontinuerlig används i vardagen om företeelser som varierar över tid utan språngvisa förändringar. Under upplysningstiden betraktades naturen som kontinuerlig. Planeters rörelser beskrevs med kontinuerliga modeller och funktionsbegreppet definierades som en kurva som kunde ritas utan att pennan lyftes, utan avbrott och mellanrum. Under senaste århundradet har vi genom kvantfysiken kommit att betrakta många förlopp i naturen i termer av stegvisa förändringar som bättre låter sig modelleras med diskret matematik. Datavetenskapen har också inneburit ett ökat intresse för diskret matematik. En dator arbetar med två diskreta värden: på/av eller ett/noll. Det finns aldrig något däremellan. En algebraisk struktur med endast två tal kallas för Boolesk.

Det finns även tillfällen då diskreta fenomen modelleras som kontinuerliga förlopp. Den aktuella pandemin är ett sådant exempel. All data som samlas in om smittspridning och insjuknade, tillfrisknade respektive döda utgörs av diskreta värden eftersom det alltid handlar om antal personer. Men för att förstå förändringen över tid betraktar vi datan som kontinuerlig och kan därmed beskriva utveckling med hjälp av funktioner som både kan deriveras och integreras. Modellen ger oss linjära funktioner och exponentialfunktioner som kan ritas som kontinuerliga kurvor. För att knyta tillbaka till spaltens rubrik kan



man säga att så länge vi kan se de diskreta värdena i data så är de inte alls försynta. De visar faster Greta som blivit sjuk, två personer i klassen som är smittade och Kalles farmor som avlidit. Varje individ sticker ut och representerar en speciell, från alla andra åtskild person. Men när vi börjar titta på aggregerade data och behandlar informationen som kontinuerlig, då försvinner individerna in i mängden.

Antal döda i covid-19 i Sverige under en månad, svarta punkter är observerade data och blå stjärnor är prognosticerad data. Kurvan är exponentiell.

Diskret matematik

Diskret matematik är heltalsmatematik, det vill säga en gren av matematiken som omfattar kunskap om diskreta tal och problem som löses med hjälp av diskreta tal. På universitetsnivå finns det kurser i diskret matematik och även på gymnasiet har det tidigare funnits en sådan kurs, men i grundskolans läroplan står inte diskret matematik som ett eget kursinnehåll. Att det inte finns som ett eget centralt innehåll i skolmatematiken innebär dock inte att vi inte ska syssla med det – problem som rör diskreta tal dyker upp överallt. Här följer några exempel på vad som kan ingå i diskret matematik.

Kombinatorik

Alla problem som handlar om på hur många sätt något kan ske eller hur många kombinationer av något som finns är problem inom diskret matematik. Här är två exempel:

Tomtens traktor heter Alfred. Alfreds registreringsnummer börjar med bokstäverna AFD. Hur många olika registreringskyltar kan det finnas som innehåller tre bokstäver ur Alfreds namn? (Ur Nämnares adventskalender 2019)

På hur många olika sätt kan du kombinera en måltid som består av huvudrätt och efterrätt om du har 5 olika huvudrätter och 4 olika efterrätter att välja på?

Talteori

Inom skolmatematiken används inte begreppet talteori, men när vi håller på med att bygga förståelse för till exempel udda och jämna tal, primtal, delbarhet, modularäkning eller talföljder så håller vi på med talteori. Både problem och lösningar hanterar enbart heltal.

Ett talteoretiskt problem handlar inte om att finna en lösning utan om att finna ett logiskt argument för lösningen, ett bevis. Frågan är alltså inte bara *Vad är svaret?* Den egentliga frågan är *Hur kan vi vara säkra på svaret?*

- ◇ Hur många femsiffriga tal har ett udda antal 1:or?
- ◇ Hur många av heltalen från 1 till 100 är delbara med 3?
- ◇ Vilket är nästa tal i följd? Hur vet du det?

2, 4, 6, 8 ...

3, 10, 17, 24 ...

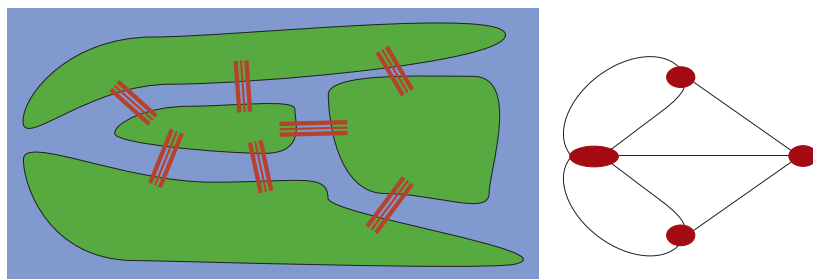
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

1, 4, 9, 16 ...

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50 ...

Grafteori

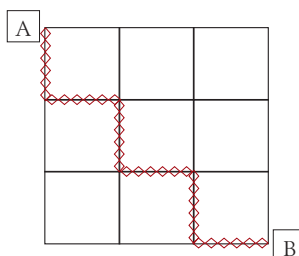
Grafteorin har sitt ursprung i Eulers lösning av det klassiska problemet med Königsbergs broar år 1736. Problemet lär ha formulerats av söndagsflanörer som ville promenera så att de passerade alla broar i Königsberg en gång, men utan att behöva gå över någon av dem två gånger.



Euler löste problemet genom att reducera det till en graf över noder och förbindelser. Med hjälp av den förenklade representationen kunde han sedan visa att om det finns fler än två noder som har ett udda antal förbindelser så finns det ingen lösning. I Königsberg fanns fyra noder, och alla hade ett udda antal förbindelser. Ön i mitten har fem broförbindelser, alla övriga landområde har tre broförbindelser.

Grafproblem är roliga att arbeta med. Här är ett problem som finns i olika varianter:

Du startar i punkt A och ska så snabbt som möjligt ta dig till skatten i punkt B. Du får bara gå på stigarna. Avståndet mellan stigmörkningarna (noderna) kallar vi för steg. Den kortaste vägen från A till B är 6 steg. Hur många olika vägar finns det från A till B som är 6 steg långa? Hur vet du säkert att du hittat alla vägar?



En större utmaning: prova att växla upp till en karta med 4×4 rutor, 5×5 rutor eller $n \times n$ rutor.

LITTERATUR

- Berglund, L. (2007). *I gränstrakterna mellan kontinuerlig och diskret matematik*. Nämnaren 2007:2.
- Domar, T. (1988). *Grafteori – en intressant och rolig del av den diskreta matematiken*. Nämnaren 1988:2.
- Weibul, T. (1989). *Vad är diskret matematik?* Nämnaren 1989:4.