

Bråket om läroboken

En kvantitativ innehållsanalys om tal i
bråkforms utveckling i läroböcker från
högstadiet till gymnasiet

Namn: Johanna Hedlund
Program och ämne: Ämneslärarprogrammet
med inriktning mot arbete i grundskolans
årskurs 7–9: Matematik



Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: L9MA2A
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: HT/2020
Handledare: Jan Stevens
Examinator: Anna Holmlund

Nyckelord: *läromedelsanalys, läroböcker, tal i bråkform, högstadiet, matematik 1a, matematik 1b, matematik 1c, representationer, utveckling*

Fractions in textbooks

A quantitative analysis of fractions in mathematic textbooks and their development from senior level compulsory school to upper secondary school.

Abstract

Textbooks have a dominant impact in teaching mathematics all over the world. But do students who only have textbooks as input of mathematical knowledge develop a deeper understanding of mathematics? The aim of this study is to increase the understanding of fractions and their representations in mathematics textbooks. Furthermore, I intend to discuss whether textbooks can help students develop an understanding of fraction only by using textbooks. Five textbooks for different levels of education (senior level and upper secondary school) were analysed to determine whether textbooks give students the tools to develop a deeper level of understanding of fractions. The results show that the type of representations is consistent through all textbooks and there is little to no proof of development in or between textbooks. And in some cases, textbooks for the higher levels of education deteriorate in terms of development compared to textbooks lower levels. The conclusion is therefore that there is not possibility for students to develop comprehensive knowledge of fractions if their only input of mathematical knowledge comes from textbooks.

Förord

Till att börja med vill jag tacka Ola Helenius på NCM för hjälp med inspiration till detta examenarbete, samt Ulrica Dahlberg som också varit till hjälp under arbetets början. Tack till Johanna Pejlare som hjälpt mig strukturera upp arbetet, till min handledare Jan Stevens och Andreas Kullander som opponerade på detta arbete.

Stort tack till de förlag som har bidragit med fysiska och digitala läromedel och även gett mig tillåtelse att använda deras bilder i arbetet. Dessa förlag är Liber AB, Sanoma Utbildning och Natur & Kultur. Tack också till Simon Wernersson som också bidragit med läroböcker under arbetets gång.

Slutligen vill jag tacka min studiekompis och vän Sofia Ross som har varit bollplank, korrekturläst och kommit med input till uppsatsen. Ett särskilt tack till min sambo Andreas som har tvingat mig ta pauser, varit ett bollplank och är allmänt bra att ha vid min sida.

Johanna Hedlund

Innehållsförteckning

1	Inledning	1
1.1	Syfte.....	1
2	Bakgrund	2
2.1	Tal i bråkform	2
2.1.1	Tal i bråkform i styrdokumentet	3
2.2	Läroböcker och tidigare forskning.....	3
2.3	Teori.....	4
2.3.1	Utveckling & representationer	4
3	Metod.....	7
3.1	Urval	7
3.1.1	Urval av läroböcker för högstadiet.....	7
3.1.2	Urval av läroböcker för matematik 1a, 1b & 1c.....	9
3.2	Analysmetod	10
3.2.1	Analysens tre steg	10
3.2.2	Exempel A: Petras golv.....	12
3.2.3	Exempel B: Förlänga och förkorta med rektanglar 1	13
3.2.4	Exempel C: Förlänga och förkorta med rektanglar 2	14
3.2.5	Exempel D: Multiplikation av tal i bråkform.....	15
3.3	Genomförande	16
3.3.1	Analys och bearbetning	16
3.4	Forskningsetik.....	17
3.5	Trovärdighet	17
4	Resultat.....	18
4.1	Läroböckers vanligaste representationsformer	19
4.2	Informationsavsnittens funktioner	20
4.2.1	Koncept	20
4.2.2	Procedur	21
4.2.3	Samband	23
4.3	Utvecklingen mellan läroböckerna	23
4.3.1	Prio 7 och Prio 9	23
4.3.2	Prio 9 och Matematik 5000 1a	25
4.3.3	Prio 9 och Matematik 5000 1b	26
4.3.4	Prio 9 och Matematik 5000 1c.....	27

5	Diskussion	28
5.1	Resultatdiskussion	28
5.1.1	Går utvecklingen framåt eller bakåt?.....	28
5.1.2	Symboler och den imitativa inläringen.....	29
5.1.3	Elever och läroböcker	30
5.1.4	Didaktiska konsekvenser	31
5.2	Metoddiskussion	31
5.3	Vidare forskning	32
5.4	Slutsats.....	32
	Referenser	34
	Bilaga 1: Sammanställning av studiens tillhandahållna läroböcker	36
	Bilaga 2: Detaljerad sammanställning av resultat	37
	Figur 1. Bruners (1966) representationsformer.....	6
	Figur 2. Modifikation av figur 1.....	6
	Figur 3. Översikt Prio Matematik 7 och 9.....	8
	Figur 4. Översikt Matematik 5000 (Röd, Grön & Blå bok).....	9
	Figur 5. Pilens betydelse	11
	Figur 6. Exempel A (Petras golv).....	12
	Figur 7. Exempel B (förlänga och förkorta tal i bråkform).....	13
	Figur 8. Exempel C (förlänga och förkorta tal i bråkform).....	14
	Figur 9. Exempel C (multiplikation av tal i bråkform)	15
	Figur 10. Informationsavsnitt från Prio matematik 7	19
	Figur 11 Informationsavsnitt från Matematik 5000 1c	22
	Figur 12. Förlänga och förkorta bråk Prio matematik 7 och 9.....	24
	Figur 13. Informationsavsnitt från Prio 9.....	29
	Tabell 1. Urval av läroböcker för årskurs 7 och 9.....	8
	Tabell 2. Urval av analysmaterial för matematik 1a, 1b och 1c.....	9
	Tabell 3. Sammanställning av exempel A, B, C och D.....	11
	Tabell 4. Sammanställda data från de undersökta läroböckerna	18
	Tabell 5. Jämförelse av koncept inom några matematiska områden.....	20
	Tabell 6. Jämförelse av procedur inom några matematiska områden	21
	Tabell 7. Jämförelse av samband för olika matematiska områden	23
	Tabell 8. Återkommande områden i Prio 7 och Prio 9.....	24
	Tabell 9. Återkommande områden i Prio 9 och Matematik 5000 1a	25
	Tabell 10. Återkommande områden i Prio 9 och Matematik 5000 1b	26
	Tabell 11. Återkommande områden i Prio 9 och Matematik 5000 1c	27

1 Inledning

”Men kan vi inte få räkna i boken nu?” var något som jag ofta fick höra under min verksamhetsförlagda utbildning (VFU) och kan exemplifiera den forskning som menar att läroböcker står i centrum för undervisningen (Heikka, 2015; Johansson, 2006; Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012). Detta skulle i ett extremfall kunna innebära att elever bara hämtar sin matematiska kunskap från läroböcker. Det är därför av intresse att veta om detta fall skulle kunna leda till en ökad förståelse av det matematiska innehållet. Alltså, skulle en elev vars enda input är den matematiska läroboken kunna utvecklas? Som (blivande) lärare är det viktigt att förstå hur matematiska områden förklaras och representeras i läroböcker för att ändamålsenligt kunna bedriva undervisning. Det är även viktigt att högstadielärare har en uppfattning om var matematiken tar vid när eleverna lämnar årskurs 9 för att börja gymnasiet.

97 % av svenska lärare förlitar sig på läroböckernas undervisning (Mullis, m.fl., 2012). I Sverige regleras ämnesplaner, kursplaner och kunskapskrav statligt medan läroböcker och läromedel utvecklas utan statlig eller regional kontroll. Lärare i Sverige får dessutom frihet att välja läroböcker utan kontroll från staten och regionen vilket gör att läroböckernas koppling till styrdokumentet blir lärarnas ansvar (Heikka, 2015). Det sätts alltså stort förtroende till lärarnas professionalitet att kunna välja läroböcker som gör att elever får möjlighet att uppnå de statligt styrda kunskapskraven och får möta alla delar av det centrala innehållet. Min VFU-handledare har alltid uppmuntrat mig till att våga undervisa och inte låta läroboken styra mig och istället använda läroboken som ett av många verktyg i min undervisning. Erfarenheten från VFU i kombination med den tidigare nämnda forskningen gör mig intresserad av att undersöka vilka läromedel lärare använder och vad läromedlen förmedlar.

För detta examensarbete har en kvantitativ innehållsanalys genomförts. Det matematiska området som studerats är tal i bråkform då detta även låg i fokus för mitt första examensarbete. Det finns även forskning som visar på att elever inte utvecklar sin förståelse för tal i bråkform mellan årskurs 8 och matematik 1 oavsett vilket gymnasieprogram de läser (Löwing, 2016). Därför var just detta område intressant att fortsätta undersöka i detta examensarbete.

Jag ämnar bygga vidare på befintlig forskning (Ahl & Helenius, 2020; Fan, Zhu, & Miao, 2013) och genomföra en studieöverskridande studie av läroböcker. I detta examensarbete analyseras två läroböcker från högstadiet och en läroboksserie för matematik 1.

1.1 Syfte

Syftet med denna studie är att öka kunskapen om hur tal i bråkform representeras i läroböcker och diskutera vilka förutsättningar läroböcker kan ge för utveckling av elevers kunskap om tal i bråkform. Detta vill jag åstadkomma genom att strukturera och tydliggöra på vilket sätt de olika förekomsterna av tal i bråkform representeras i några läroböcker och vilken funktion dessa förekomster har. Jag syftar därmed till att svara på dessa tre frågeställningar;

- I. Hur representeras tal i bråkform i olika läroböcker för årskurs 7, årskurs 9 och matematik 1a, 1b och 1c?
- II. Vad fyller läroböckers teoridelar och exempel för funktion?
- III. Finns det förutsättningar för att elever ska kunna utveckla matematisk förståelse inom eller mellan årskurser?

2 Bakgrund

Detta kapitel syftar till att lyfta fram tidigare forskning om tal i bråkform och läroböcker. Dessutom redogörs här kortfattat hur tal i bråkform finns beskrivet i de olika styrdokument. Slutligen behandlas en teoretisk bakgrund kring utveckling och representationer som är av intresse för examensarbetet.

2.1 Tal i bråkform

Det matematiska konceptet tal i bråkform är mångfasetterat och förståelsen för tal i bråkform är grunden för många andra matematiska koncept. Bråk kan till exempel beskriva ett tal, en proportion, ett förhållande, en andel, en del av ett antal och en del av en hel (Löwing, 2016). Dessutom kan tal i bråkform representeras på olika sätt, till exempel som geometriska figurer, verklighetsbaserade exempel eller ett tal på tallinjen. Att förstå tal i bråkform är en viktig byggsten för att bland annat förstå procent, decimalform samt är nödvändigt för att kunna räkna algebra (Löwing, 2016). Kunskapen om tal i bråkform fördjupas och breddas alltså gradvis. McIntosh (2008) menar däremot att den traditionella undervisningen inte lyckats ge tid eller möjlighet att utveckla förståelse om vad tal i bråkform är. Ett tal i bråkform ger mycket information som elever inte alltid resonerar kring. Täljaren talar om hur många delar och nämnaren talar om hur stora delarna är. Att visa förståelse för täljaren och nämnarens betydelse är enligt Clarke, Roche och Mitchell (2010) en gynnsam strategi och bidrar till att elever kan jämföra tal i bråkform. Elever som inte använder en gynnsam strategi visar inte på förståelse för att alla delar i ett bråk måste vara lika stora och förstår därför inte täljaren och nämnarens funktion. (Clarke, m.fl., 2010).¹

Att operera med tal i bråkform är något som är ett återkommande problemområde. Flera studier (Kara & Incikabi, 2018²; Löwing, 2016³) visar att elever har lättare för addition än subtraktion med tal i bråkform, framför allt när talen har samma nämnare. Multiplikation av tal i bråkform har en högre lösningsfrekvens jämfört med division av tal i bråkform och av de elever som läser högskoleförberedande och matematikintensiva program är det ungefär en tredjedel som har stora svårigheter med att genomföra beräkningar med tal i bråkform (Löwing, 2016). Samma studie visar även att det inte sker någon utveckling av förståelsen för tal i bråkform mellan årskurs 8 och matematik 1 oavsett om eleverna läser matematik 1a, 1b eller 1c. Att talet ett kan skrivas på oändligt många sätt ($1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$ och så vidare) är enligt McIntosh (2008) något som eleverna inte visar förståelse för. Att enbart uppmuntra elever till att göra tal i bråkform liknämninga för att kunna genomföra operationer eller jämföra tal kan leda till att elever inte förstår vad som sker matematiskt när de förlänger tal i bråkform (McIntosh, 2008).

Det finns många representationer för tal i bråkform, geometriska figurer, verklighetsbaserade exempel och tallinjen är några exempel. Nagy (2017) beskriver att det krävs en variation av representationer av tal i bråkform för att elever ska kunna lära sig operera med dessa och en förenklad och enformig undervisning kan bidra till att elever inte förstår konceptet tal i bråkform. Flera källor (Ball, 1993; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Löwing, 2016; Sveider, 2016) beskriver att de missuppfattningar som elever har kring tal i bråkform till viss

¹ Undersökningen genomfördes i en skola i Australien i årskurs 6, det deltog 323 elever.

² En fallstudie som undersökte förmågan att addera och subtrahera tal i bråkform hos 59 elever i årskurs 6. Studien genomfördes i Turkiet.

³ En didaktisk analys om grundläggande matematiska begrepp baserat på diagnosmaterial som har konstruerats på uppdrag av Skolverket (diamantdiagnoser).

del kommer från mängden representationer men framför allt från bristen på undervisning om de olika representationsformerna för tal i bråkform. För att utveckla förmågan att utföra operationer med tal i bråkform ska kunskapen byggas kumulativt och elever behöver därför möta en variation av representationer (Kara & Incikabi, 2018; Nagy, 2017). När elever i årskurs 4–6 representerar tal i bråkform är det vanligt att de är bildliga eller verbala representationer (Sveider, 2016). Ball (1993) beskriver att elever vanligtvis visar en skuggad halvcirkel för att representera $\frac{1}{2}$. Det är även vanligt att elever använder vardagliga föremål som pizzor, choklad eller frukt eftersom dessa både anses vardagsnära och lättillgängliga, men när tyngdpunkten ligger på de vardagliga sammanhangen riskerar eleverna att förlora förståelsen för den matematiska idén (Sveider, 2016).

2.1.1 Tal i bråkform i styrdokumentet

Tal i bråkform finns i det centrala innehållet men betonas olika för årskurs 7–9 och för matematik 1a, 1b och 1c. I det centrala innehållet för årskurs 7–9 beskrivs att elever i dessa årskurser ska kunna utföra beräkningar med tal i bråkform (Skolverket, 2019). Tal i bråkform förekommer inte bara i taluppfattning utan är även en grund för till exempel sannolikhetslära, statistik, skala och procenträkning. Detta är något som också framkommer i det centrala innehållet. Vid avslutad kurs ska elever i årskurs 9 kunna lösa olika problem i bekanta situationer på ett *i huvudsak* (betyg E) eller *väl* (betyg A) fungerande sätt för att uppnå olika betyg. Dessutom ska elever kunna på ett *i huvudsak fungerande* (betyg E) eller *ändamålsenligt och effektivt* sätt (betyg A) använda olika representationer som för resonemanget framåt (Skolverket, 2019).

För matematik 1a, 1b och 1c beskrivs inte tal i bråkform lika explicit som i det centrala innehållet för årskurs 7–9. Undervisningen i matematik 1a ska innehålla metoder för att göra beräkningar med *reella tal skrivna på olika former* (Skolverket, 2011). För matematik 1b och 1c ska undervisningen behandla begreppet *delbarhet* (Skolverket, 2011). För betyget E ska en elev som avslutar kursen översiktligt kunna beskriva innebörden av centrala begrepp med någon form av representation och använda dessa i bekanta situationer samt kunna hantera några enkla procedurer av standardkaraktär. För betyget A ska eleven kunna med säkerhet använda flera representationer och växla mellan dessa och kunna lösa uppgifter med standardkaraktär på flera effektiva sätt. För betyget E i matematik 1b och 1c ska eleven kunna med viss säkerhet växla mellan olika representationer och översiktligt beskriva samband för centrala begrepp. För betyget A ska elever i dessa kurser utförligt kunna beskriva samband och med säkerhet växla mellan olika representationer (Skolverket, 2011).

2.2 Läroböcker och tidigare forskning

Utvecklingen kring forskning av läroböcker har varit obalanserad på flera olika områden. Bland annat sker analyser av läroböcker främst för de yngre⁴ årskurserna, endast ett fåtal studier har genomförts på högstadienivå och det är ännu färre studier som inkluderar en överlappning mellan två stadier, vilket tyder på att det krävs fortsatt forskning på detta område (Fan, Zhu, & Miao, 2013). De finns två olika typer av studier som genomförs på läroböcker. Den ena är analys av en lärobok eller läroboksserie som fokuserar på hur ett matematiskt område ser ut, den andra typen analyserar och jämför olika länders läroboksserier (Fan, m. fl., 2013). Ahl och Helenius (2020) har föreslagit ett ramverk för den förstnämnda studien. De har analyserat utveckling av förståelse i matematiska läroböcker. Studien klassificerar läroböckers innehåll och visar att läroböcker ger en begränsad förklaring till det

⁴ Eng: *Primary level* (Fan, Zhu, & Miao, 2013)

undersökta matematiska området (kvotkonstruktioner). Dessutom visar studien att representationsformer knappt förändras mellan årskurs 3 och årskurs 9 samt att läroböcker ofta använder symboliska representationer (tal) utan någon förklaring (Ahl & Helenius, 2020).

Det är viktigt att skilja på att *kunna minnas* och att *kunna använda* matematik. Enligt Hiebert krävs det betydligt mindre övning för att kunna minnas procedurer jämfört med att kunna använda procedurer och förstå *varför* procedurerna fungerar (refererad i Jäder 2015). Det är vanligt att rutinmässiga lösningsmetoder som inte kräver förståelse får stor plats i undervisningen och överskuggar det kreativa sättet att tänka kring tal i bråkform (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). De rutinmässiga lösningsmetoderna kan leda till att elever bara lär sig att manipulera symboler och inte förstår matematiken (McIntosh, 2008). Läroböckers organiserade sekvenser bidrar till att strukturera lärande och undervisning och kan därför agera som guide för lärare (Fan, m.fl., 2013). Den imitativa inläringen ("utantillinläringen") utgör däremot ofta grunden för matematikundervisningen och många elever fokuserar främst på att med en given metod komma fram till samma svar som facit (Jäder, 2015). Dessutom anser elever att matematiska uppgifter ska kunna lösas genom imitativa metoder vilket ofta går att göra med hjälp av läroböckernas exempeluppgifter (Lithner, 2008). Jäder (2015) lyfter fram att 79% av uppgifterna i läroböcker⁵ är imitativa procedurer ("utantillmetoder") och bidrar inte till att elever får möjlighet att utveckla andra former av kunskap. Detta leder till att problemlösning, resonemang och konceptuell kunskap får lite utrymme i läroböckerna. Detta kan anses vara ett problem och för att lösa detta behöver läroböcker utvecklas på ett sådant sätt att kunskapskraven kan uppfyllas. Det är dessutom viktigt att lärare reflekterar över läroböcker och använder dem så att de kan svara till styrdokumentet (Jäder, 2015).

2.3 Teori

Det är av stor vikt att det finns en koppling mellan teorin om kunskap och teorin om lärande för att en teori om utveckling⁶ ska kunna skapas (Bruner, 1966). Det är alltså viktigt att studera *hur* människor utvecklar och skapar mening av koncept och inte bara hur människor *processar* information (Bruner, 1966). För att uppnå utveckling inom matematik måste det ske ett skifte från konceptens mening som aktivitetsbundna och ikoniska för att slutligen uppnå en förståelse för relationer i symboliska system (Ahl & Helenius, 2020).

(...) the heart of educational process consists of providing aids and dialogues for translating experience into more powerful systems of notion and ordering. And it is for this reason that I think a theory of development must be linked both to a theory of knowledge and to a theory of instruction, or to be doomed to triviality (Bruner, 1966, s. 21)

2.3.1 Utveckling & representationer

För att förstå utveckling baserar Bruner (1966) sina teorier på Piagets forskning om stimulus och responsteorin (S-R-teorin). S-R-teorin innebär att en stimulus, alltså en form av trigger eller utlösande faktor, ger en specifik respons. Bruner (1966) beskriver att utveckling sker genom *Patterns of Growth*. Patterns of Growth uttrycker att det finns ett behov av en förmedlingsprocess, alltså något eller någon som agerar som en brygga mellan en människa

⁵ Studien gjordes på läroböcker från 12 länder, där Sverige inkluderas.

⁶ Eng: *Theory of knowledge, Theory of instruction och Theory of development* (Bruner, 1966)

och kunskapen. Det är denna brygga som medför att människan kan utvecklas. I detta examensarbete är det läroböckerna som agerar som förmedlare av kunskap till eleverna. Den första punkten i Patterns of Growth beskriver att utveckling karaktäriseras av att responsen blir mer oberoende av stimulus. Vardagligt skulle detta uttryckas som att en människa lär sig tänka efter innan den svarar istället för att direkt reagera. Utveckling sker alltså när elevers respons blir mer oberoende av den input (stimulus) de får för att lösa en uppgift. Den andra punkten beskriver att lärande beror av internaliserandet från tidigare händelser som tillämpas i nya situationer. Utveckling är alltså när en elev kan förutse och beräkna nya situationer med hjälp av tidigare kunskap och erfarenheter. Detta kan en elev göra genom att införliva tidigare erfarenheter i sitt tänkande.

En förmedlare (Bruner 1966) kan använda olika representationer för att ge möjlighet till att utvecklas. Några matematiska representationer är exempelvis diagram, geometriska figurer, algebraiska uttryck och verbala begrepp. Vergnaud (2009) beskriver att utveckling involverar situationer, tankescheman och representationer med symboler. Tidigare har Vergnaud (1998) konstaterat att det är representationer som gör det möjligt att kategorisera alla sorters objekt och det är genom att *använda* de olika kategorierna på flera sätt som utveckling sker. Representationer är både produkten av handling och uppfattning⁷ men också organiseringen⁸ av handling och uppfattning. Representationer *skapar* av matematiska handlingar (aktiviteter) samtidigt som representationer *skapar* matematiska handlingar (Vergnaud 2009). Ord och symboler är viktiga aspekter av representationer eftersom utan dessa skulle vi inte kunna beskriva (alltså representera) våra erfarenheter. Detta gör att Vergnaud (2009) ser representationer som en praktisk resurs för utveckling. Det är komplext att lära sig *använda* och *förstå* representationer. Elever behöver därför stöd för att organisera olika representationer och lära sig använda dessa i sitt lärande (Roos & Trygg, 2018). Det är viktigt att ge elever olika representationer för samma bråk för att utvidga elevers förståelse för tal i bråkform, annars riskerar elever att fastna i enskilda representationer (Ball, 1993; Roos & Trygg, 2018). Läroböcker bör därför ge olika representationer av tal i bråkform och variera dessa.

Om pizzor är den enda bildmässiga representationen som eleverna har erfarenhet av att använda är det inte alldeles självklart hur olika uttryck för femtedelar enklast representeras. Det är inte heller säkert att alla elever förstår översättningar mellan olika representationer, utan de behöver mycket tydlig vägledning mellan olika former av representation, både inom och mellan olika register. (Roos & Trygg, 2018, s. 6 (14))

För att utvecklas måste det ske en förmedlingsprocess (Bruner 1966), denna förmedlingsprocess kan ske genom representationer. En människa kan möta tre representationsformer. Den första är *agerande representationer* vilket innebär representationer av verkliga föremål och verklighetsbaserade erfarenheter. Till exempel är det svårt att lära någon att köra bil enbart med ord, personen måste få interagera med bilen för att kunna lära sig. Den andra är *ikoniska representationer* vilket innebär representationer som är visuella och organiseras efter utseende. Utveckling sker när en människa lär sig tolka bilder och dess betydelser. Den sista är *symboliska representationer* vilket innebär att symbolerna innehåller en viss egenskap (Bruner, 1966). Representationerna ska gå från agerande till ikoniska och slutligen bli symboliska. Studier som använder Bruners definition av utveckling (Ahl & Helenius, 2020; Roos & Trygg, 2018) beskriver att representationerna måste gå från

⁷ Eng: *Action och Perception* (Vergnaud 2009)

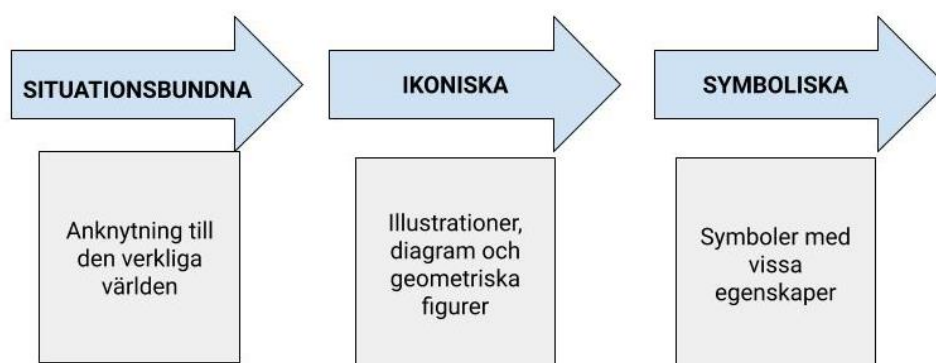
⁸ Eng: *Organized* (Vergnaud 2009)



Figur 1. Bruners (1966) representationsformer

en aktivitetsbaserad nivå till en ikonisk nivå för att slutligen nå en symbolisk och abstrakt nivå för att elever ska utvecklas (figur 1).

Utifrån Bruner (1966) och Vergnaud (1998; 1996) kan en analys av förutsättningar för att utveckla förståelsen för tal i bråkform i läroböckers göras. Då teorierna inte är specifika för matematiska läroböcker har Bruners tre representationsformer och Vergnauds teori om representationer modifierats av Ahl och Helenius (2020) (figur 2). Utveckling sker när förståelsen skiftar från situationsbundna (agerande) representationer till ikoniska representationer för att slutligen förstås i symboliska representationer.



Figur 2. Modifikation av figur 1

3 Metod

I detta kapitel avhandlas examensarbetets metod. Inledningsvis kommer urval av läroböcker och innehåll presenteras och motiveras. I bilaga 1 listas alla läroböcker som tillhandahållits för analysen. Sedan presenteras de tre stegen av den metod som har använts i studien. Detta exemplifieras med fyra exempel. Exempelen är antingen hämtade från någon av de studerade läroböckerna eller påhittade med inspiration från andra läroböcker. Syftet med de fyra exemplen är att tydliggöra metoden på flera olika sätt. Slutligen beskrivs genomförandet, examensarbets trovärdighet och forskningsetik.

3.1 Urval

För analysen har två urval gjorts. Vilka läroböcker och vilka delar av läroböckerna som ska ingå i analyseras. I Sverige finns det inte statistik över vilka läroböcker som är mest använda och de förlag som kontaktades (Liber, Sanoma utbildning och Natur & Kultur) kunde inte ge ut data på antal sålda läroböcker. Eftersom lärare i Sverige kan välja läroböcker utan statlig eller regional kontroll och styrning (Heikka, 2015) motiverar det urvalet att läroböckerna för denna analys kan väljas relativt fritt. De böcker som hade hela kapitel som på något sätt handlade om tal i bråkform valdes ut i ett första urval. Elever som börjar gymnasiet är inte garanterade en bok från samma förlag som de hade i högstadiet. Dessutom är det oftast olika författare för högstadiesböcker och gymnasieböcker på samma förlag. Därför ansågs det inte påverka analysen negativt att välja läroböcker från olika förlag för matematik 1a/ 1b /1c respektive högstadiet.

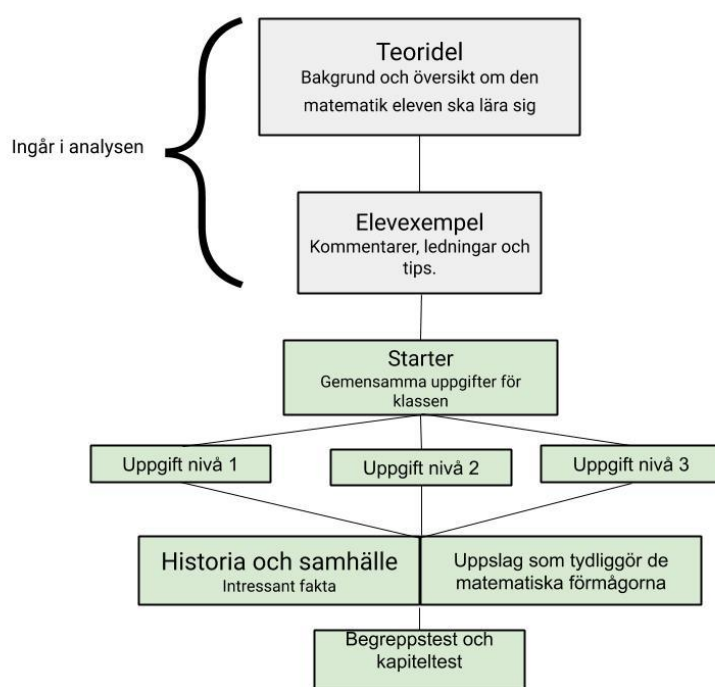
Det innehåll som analyseras är de ställen som bidrar med information och matematiska påståenden inom tal i bråkform. Läroböckerna är uppbyggda i sektioner där en matematisk idé definieras, förklaras och/eller illustreras i ett avgränsat område. Dessa områden innehåller både teori och exempeluppgifter. Dessa avgränsade områden kallas härnäst för informationsavsnitt och tolkas som författarnas sätt att göra matematiska påståenden. Det är i informationsavsnitten som elever kan få vägledning för att lösa problemen i läroboken. I denna analys anses informationsavsnitten vara förmedlaren av kunskap och därför är det dessa som analyserats i läroböckerna och inte de tal som eleverna förväntas kunna lösa.

3.1.1 Urval av läroböcker för högstadiet

För att kunna undersöka utvecklingen i högstadiet gjordes ett urval av två läroböcker för två olika nivåer. Enligt Löwing (2016) sker det inte någon utveckling mellan årskurs 8 och matematik 1. Om ingen utveckling har skett mellan årskurs 8 och matematik 1 borde det därför inte spela någon roll om analysen innefattade en lärobok för årskurs 8 eller årskurs 9. Anledningen till att välja en lärobok för årskurs 9 motiverades av att det är den senaste boken som elever har mött innan de börjar gymnasiet och bör därför vara mer sammanfattande samt borde vara den "svåraste nivån" av högstadiets matematik. Att välja en lärobok för årskurs 7 gjordes av anledningen att få en bredare bild av utvecklingen i högstadiet. I de läroböcker för årskurs 9 som tillhandahölls fanns det vid första anblick inget eget kapitel om tal i bråkform, i vissa läroböcker fanns begränsade delkapitel på några få sidor. Kopplingen till att räkna med tal i bråkform kan finnas i andra kapitel som inte inkluderades i analysen eftersom tal i bråkform är så pass mångfacetterat (Löwing, 2016). Eftersom läroböckerna för matematik 1 och årskurs 7 hade separata kapitel med tal i bråkform fick detta vara en del av urvalet för att få ett så konstant urval som möjligt. Läroböckerna för årskurs 7 hade ett eget kapitel om tal i bråkform. Att välja läroböcker från samma serie gjordes av antagandet att det finns en

utveckling mellan böckerna eftersom de bygger på varandra. Det som varierar är då den tilltänka årskursen och antagligen svårighetsgraden ("nivå") i läroböckerna istället för att variera författare och förlag. Två serier tillhandahölls för flera årskurser, Prio matematik (Sanoma utbildning) samt Mondo (Gleerups). Prio matematik 9 hade ett större delkapitel och fler sidor med tal i bråkform jämfört med Mondo 9. Därför valdes slutligen Prio matematik 7 och Prio matematik 9, vilket sammanfattas i tabell 1.

Prio Matematik är uppbyggd av teorisor, exempelrutor och uppgifter som eleverna ska räkna (figur 3). Uppgifterna är indelade i tre olika nivåer (svårighetsgrader) och det finns inga nya informationsavsnitt under de olika nivåerna. Informationsavsnitten ska alltså ge förutsättningar och vägledning för att kunna lösa uppgifter på alla nivåer.



Figur 3. Översikt Prio Matematik 7 och 9

Lärobok	Kapitel	Sidor	Antal sidor till grund för analys	Antal informationsavsnitt	Antal teoridelar	Antal exempel
Prio matematik 7 ⁹	4. Bråk och procent	120–167	16	37	18	19
Prio matematik 9 ¹⁰	1.1 Bråk 1.2 Addition och subtraktion av bråk 1.3 Multiplikation av bråk 1.4 Division av bråk 4.1 Taluppfattning och tals användning	8–23, 146–147	10	28	9	19

Tabell 1. Urval av analysmaterial för årskurs 7 och 9

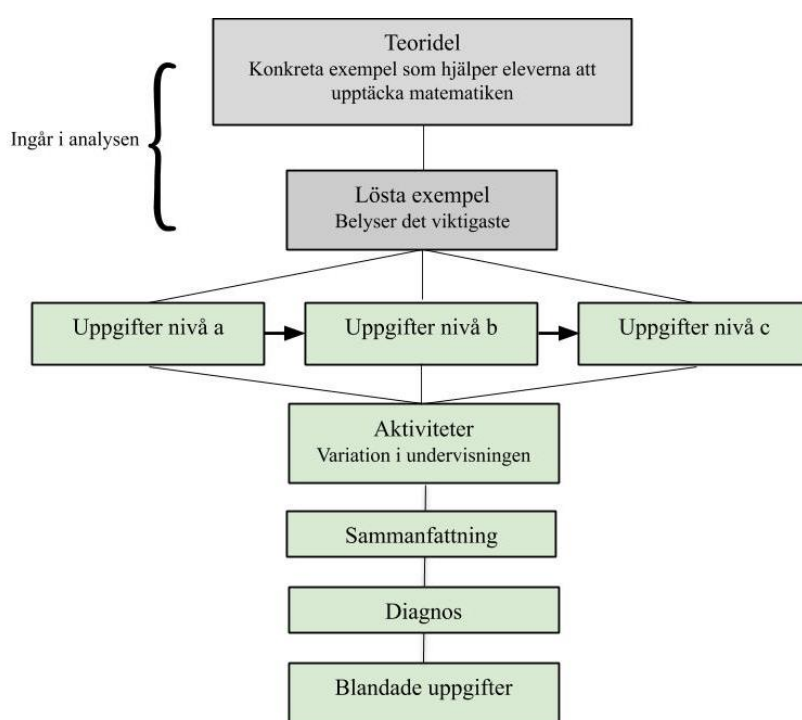
⁹ (Cederqvist, Larsson, Gustafsson, & Szabo, 2012)

¹⁰ (Cederqvist, Larsson, & Gustafsson, 2014)

3.1.2 Urval av läroböcker för matematik 1a, 1b & 1c

I läroböckerna för matematik 1a, 1b och 1c återfanns separata kapitel för tal i bråkform. Två läroboksserier erhöles (se bilaga 1). Båda serierna hade likvärdiga rubriksättningar för kapitel och ungefär lika många sidor att analysera. Syftet med examensarbetet är att undersöka tal i bråkform i en läroboksserie för att analysera utveckling därför ansågs det inte nödvändigt att välja flera serier. Serien Matematik 5000 (Natur & Kultur) återfanns i en nyare upplaga jämfört med M-serien (Liber) och valdes av denna anledning ut för analysen, vilket sammanfattas i tabell 2.

Matematik 5000 är uppbyggd av teoridelar, lösta exempel och uppgifter (figur 2). Uppgifterna är indelade i tre olika nivåer ("svårighetsgrader") och det finns inga nya informationsavsnitt under de olika nivåerna. Informationsavsnitten ska, likt Prio matematik, ge förutsättningar för att kunna lösa uppgifter på alla nivåer.



Figur 4. Översikt Matematik 5000 (Röd, Grön & Blå bok)

Lärobok	Kapitel	Sidor	Antal sidor till grund för analys	Antal informationsavsnitt	Antal teoridelar	Antal exempel
Matematik 5000 1a Röd bok ¹¹	1.3 Tal i bråkform	30–39	6	17	7	10
Matematik 5000 1b Grön bok ¹²	1.3 Tal i bråkform	32–43	8	23	9	14
Matematik 5000 1c Blå bok ¹³	1.2 Bråkbegreppet, Räkna med bråk	20–26	4	16	6	10

Tabell 2. Urval av analysmaterial för matematik 1a, 1b och 1c

¹¹ (Alfredsson L. , Bråting, Erixon, & Heikne, 2014a)

¹² (Alfredsson L. , Bråting, Erixon, & Heikne, 2015)

¹³ (Alfredsson L. , Bråting, Erixon, & Heikne, 2014b)

3.2 Analysmetod

Då syftet med detta examensarbete är att öka kunskapen om hur tal i bråkform representeras i läroböcker, vilken funktion de olika informationsavsnitten har samt diskutera om det finns en utveckling inom eller mellan läroböckerna är en kvantitativ innehållsanalys ett lämpligt tillvägagångssätt. *Innehållsanalys* är någon form av undersökning av ett innehåll, *kvantitativ* innebär att undersökningen baseras på jämförbara uppgifter (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson, Towns, & Wängnerud, 2017). Denna typ av analys lämpar sig för att svara på frågor om hur frekvent olika typer av innehåll förekommer. Detta skapar förutsättningar för att kunna diskutera utveckling inom och mellan läroböcker. I detta examensarbete är informationsavsnitten själva innehållet. I analysen kommer informationsavsnitten först att tolkas för att sedan kunna kategoriseras. Trots detta betraktas detta inte som en kvalitativ analys då en tolkning är nödvändigt för att kunna kategorisera innehållet.

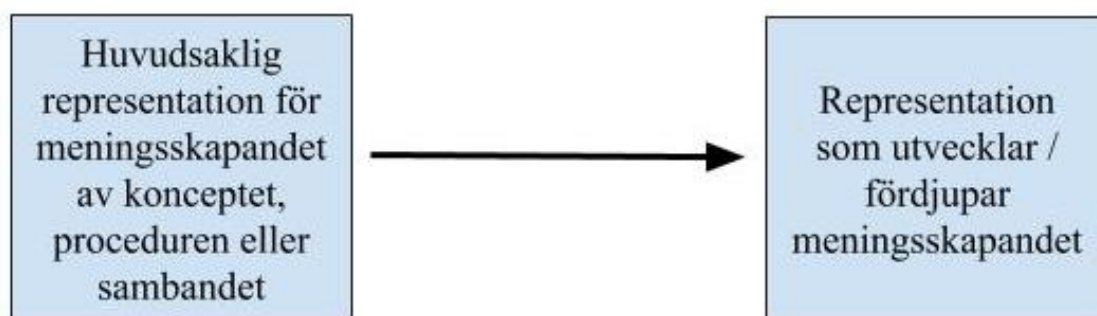
Ahl och Helenius (2020) har gjort ett ramverk för läromedelsanalys som har använts på läroböcker för årskurs 3 till årskurs 9 och det är denna metod som analysen kommer att utgå ifrån. Eftersom Ahl och Helenius (2020) har undersökt kvotkonstruktioner i läromedel från Sverige anses detta vara ett lämpligt ramverk då analysen behandlar ett liknande matematiskt område (tal i bråkform) och utförs på liknade läroböcker. Metoden är alltså redan beprövad av forskare.

3.2.1 Analysens tre steg

Eftersom både representationsformer och informationsavsnittens funktioner kommer analyseras är datainsamlingen tvådimensionell. Varje informationsavsnitt tolkas och kategoriseras efter vilken funktion som det har. Det finns tre funktioner. Den första är ett *koncept* (ett koncept eller matematiskt område får mening och/eller förklaras), den andra är en *procedur* (en procedur/metod/tillvägagångssätt presenteras och/eller förklaras) och den tredje funktionen är att skapa *samband* (samband eller kopplingarna mellan olika matematiska koncept eller områden undersöks, förklaras och/eller beskrivs). Därefter kategoriseras representationer(na) för varje funktion i informationsavsnittet. Det finns tre kategorier som i analysen har olika symboler. Den första är $\odot$ = *situationsbaserade* representationer, den andra är $\heartsuit$ = *ikoniska* representation, den tredje är π = *symboliska* representationer. Datainsamlingen kan sammanfattas i följande trestegsmetod;

- I. Urval av informationsavsnitt i läroböckerna.
- II. Kategorisering av *funktionen* för exempelrutorna som koncept, procedur eller samband. Ett informationsavsnitt kan ha flera funktioner.
- III. Kategorisering av *representationerna* för varje informationsavsnitt som situationsbundna ($\odot$), ikoniska ($\heartsuit$) eller symboliska (π). Ett informationsavsnitt kan ha flera representationer.

Steg I är urvalet och har genomförts i tabell 1 och 2. Informationsavsnitten kan med hjälp av *en* sorts representation skapa mening för ett matematiskt område och kan sedan med hjälp av *en annan* representation utveckla meningsskapandet. I analysen kommer detta visas med hjälp av en pil ($\rightarrow$), se figur 5.



Figur 5. Pilens betydelse

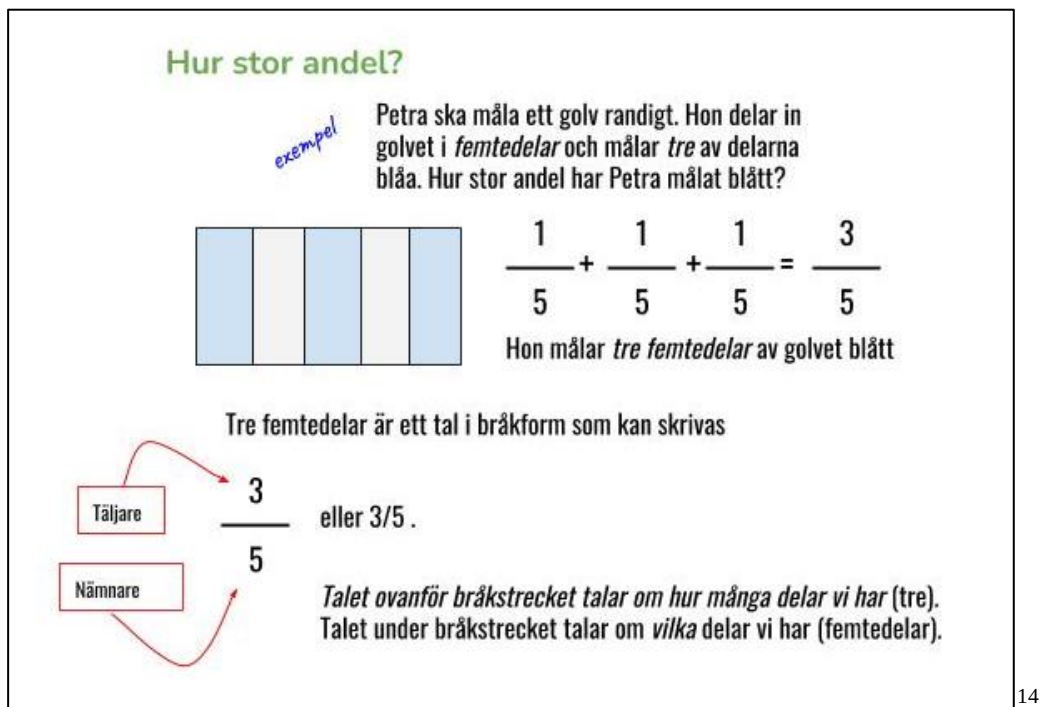
Informationsavsnittens funktioner värderar inte huruvida de bidrar till utveckling utan beskriver endast att det finns olika sätt att göra matematiska anspråk och förklara matematiska idéer. Det finns alltså ingen hierarki i kategoriseringen av funktioner tillskillnad från representationer då de, enligt Bruner (1966) måste ske i en viss ordning (figur 1 och 2). Däremot kan det anses självklart att ett koncept först måste introduceras innan det kan få ett samband med ett annat koncept. Slutligen sammanställs datainsamlingen i en tabell. Ett exempel på en sådan tabell är tabell 3 som baseras på kommande exempel (avsnitt 3.2.2 till och med 3.2.5). Tabellen färgkodades så att varje kategorisering av representationer får en färg.

	Matematiskt område	Koncept	Procedur	Samband
Exempel A	Andel	$\text{😊♥} \rightarrow \pi$		
Exempel B	Förlänga	$\text{♥} \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
Exempel B	Förkorta		$\rightarrow \pi$	
Exempel C	Förlänga och förkorta	$\pi \rightarrow \text{♥}$	$\pi \rightarrow \text{♥}.$	
Exempel D	Multiplikation med bråk		$\text{♥} \rightarrow \pi$	$\text{♥} \rightarrow \pi$

Tabell 3. Sammanställning av exempel A, B, C och D

3.2.2 Exempel A: Petras golv

Exempel A (figur 6) är ett påhittat exempel med inspiration från Matematik 5000 1b (Grön bok).



14

Figur 6. Exempel A (Petras golv)

Först kategoriseras informationsavsnittets *funktion* (steg II). Funktionen i figur 6 är att ge mening till det matematiska området *andel*, eftersom det med kursiv stil betonas vad femtedelar och tre (femtedelar) innebär. Detta förtydligas ytterligare med hjälp av de två sista meningarna ("talet ovanför bråkstrecket talar om..."). Funktionen kategoriseras därför som *koncept*. I nästa steg (steg III) kategoriseras *representationerna*. I figur 6 ges konceptet andel mening genom (1) *situationen* (☺) "Petras golv" och (2) den geometriska bilden av golvet som tolkas som en *ikon* (♥). Informationsavsnittet förklarar och fördjupar denna representation av andelar med hjälp av räkneexemplet $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, alltså med *symboliska* (π) representationer. Figur 6 kategoriseras alltså till ☺ ♥ → π, vilket innebär att informationsavsnittet ger mening med hjälp av en situation och ikon och utvecklar detta med symboler. Detta färgkodas ljusgrönt (se tabell 3).

¹⁴ Inspirationen till figur 6 är tagen från matematik 5000 kurs 1b, Grön bok (Alfredsson, Bråting, Erixon, & Heikne, 2015, s. 32)

3.2.3 Exempel B: Förlänga och förkorta med rektanglar 1

Exempel B (figur 7)¹⁵ är hämtad från Matematik 5000 1a (Röd bok).

Förlängning och förkortning

Exempel 1 Emma färglägger $\frac{3}{4}$ av en rektangel.

Adam färglägger $\frac{6}{8}$ av en lika stor rektangel.

Med hjälp av bilderna ser du att Emma och Adam har färglagt *lika stor del* av rektangeln.

Bräken $\frac{3}{4}$ och $\frac{6}{8}$ anger alltså *samma* tal (har samma värde).

Hur omvandlar man $\frac{3}{4}$ till $\frac{6}{8}$?

förlänga Man *förlänger* ett bråk genom att multiplicera täljare och nämnare med samma tal. Det förändrar inte bråkets värde.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} \quad \frac{3}{4} \text{ och } \frac{6}{8} \text{ har samma värde.}$$

Förlänger med 2.

förkorta Man *förkortar* ett bråk genom att dividera täljare och nämnare med samma tal. Detta förändrar inte heller bråkets värde.

$$\frac{6}{8} = \frac{6/2}{8/2} = \frac{3}{4}$$

Förkortar med 2.

enklaste form Ett bråk som är förkortat så långt som möjligt, t.ex. $\frac{3}{4}$, är skrivet i *enklaste form*. Det betyder att bräket inte kan förkortas mer.

förhållande Bråktal används för att ange ett *förhållande* mellan två tal.

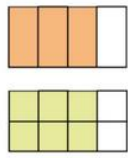
Exempel 2 I en skolklass med 30 elever finns 12 pojkar och 18 flickor. Förhållandet mellan antalet pojkar och flickor skrivs i enklaste form.

$$\frac{\text{antalet pojkar}}{\text{antalet flickor}} = \frac{12}{18} = \frac{12/6}{18/6} = \frac{2}{3}$$

Förhållandet $\frac{2}{3}$ skrivs ofta som 2 : 3.

Man säger: "två till tre".

Med andra ord kan man säga att "det går två pojkar på tre flickor".



34
1.3 TAL I BRÅKFORM

16

Figur 7. Exempel B (förlänga och förkorta tal i bråkform)

Först kategoriseras informationsavsnittets *funktion* (steg II). Det finns två funktioner i figur 7. (1) det matematiska området att *förlänga ett tal i bråkform* får mening genom beskrivningen att två olika bråk kan ha samma värde. Detta kategoriseras som ett *koncept*. (2) *procedurerna* (metoderna) för att *förlänga och förkorta ett tal i bråkform* presenteras. Figur 7 separerar förlängning och förkortning som två olika koncept och inget resonemang förs för att koppla ihop dessa, därför kategoriseras informationsavsnittet inte som ett samband. I Steg III kategoriseras *representationerna* både för konceptet förlänga tal i bråkform och för procedurerna förlänga och förkorta tal i bråkform. Konceptet förlänga tal i bråkform får mening genom att Emma och Adam färglägger lika stora delar av identiska rektanglar. Att färglägga något skulle kunna tolkas som situationsbunden representation men i detta exempel är det en rektangel, därmed står ett matematiskt objekt som står i huvudfokus. Det är alltså inte något som är anknytt till den verkliga världen (jämför med exempel A / figur 6). Det är

¹⁵ Det finns flera delar i figur 7, exempel B tar hänsyn till det som i figuren beskrivs som exempel 1 och kommer förklara metoden fram till och med underrubriken förkorta.

¹⁶ Figur 7 är hämtad från Matematik 5000 1a (Röd bok) (Alfredsson L., Bråting, Erixon, & Heikne, 2014a, s. 34)

rektanglarna, alltså en *ikon* (♥) som skapar mening till att förlänga tal i bråkform. Detta utvecklas med hjälp av talen $\frac{3}{4}$ och $\frac{6}{8}$, alltså *symboler* (π). I Figur 7 kategoriseras alltså konceptet till ♥ → π , vilket innebär att informationsavsnittet utgår från ikonerna och utvecklar ikonerna till symboler. Detta färgkodar ljusblått. Steg III upprepas för procedurerna att förlänga och förkorta tal i bråkform. Procedurerna representeras endast med de matematiska *symbolerna* (π) $\times 2$ och $/ 2$ som är markerade i rött. I figur 7 finns det alltså inget som ger mening till procedurerna bara en symbolisk representation. Procedurerna i figur 7 kategoriseras därför till → π , vilket innebär att informationsavsnittet inte ger något meningsskapande till proceduren det ger endast en symbolisk representation. Detta färgkodar ljusrött (se tabell 3).

3.2.4 Exempel C: Förlänga och förkorta med rektanglar 2

Exempel C (figur 8) ¹⁷är hämtad från Matematik 5000 1b (Grön bok).

Förlängning och förkortning

Exempel 1 Det är viktigt att förstå att flera olika bråk kan beskriva samma sak. Vi kan därför förlänga eller förkorta ett bråk utan att ändra dess värde.

Vi förlänger med 2.

förlänga/
förkorta

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Täljare och nämnare multipliceras med 2.

Vi förkortar med 2.

$$\frac{2}{6} = \frac{2 / 2}{6 / 2} = \frac{1}{3}$$

Täljare och nämnare divideras med 2.

enklaste form

förhållande

Ett bråk som inte kan förkortas mer är skrivet i *enklaste form*.
Bråktalet används både för att ange en andel och för att beskriva ett *förhållande* mellan två tal.

Exempel 2 I en skolklass med 30 elever finns 12 pojkar och 18 flickor. Förhållandet mellan antalet pojkar och flickor skrivs i enklaste form.

antalet pojkar = $\frac{12}{18} = \frac{12/6}{18/6} = \frac{2}{3}$
antalet flickor

Förhållandet $\frac{2}{3}$ skrivs ofta som 2:3. Man säger: "två till tre".

Med andra ord kan man säga att "det går två pojkar på tre flickor".

1313 Bestäm utan räknare vilket bråk som är störst, $\frac{5}{6}$ eller $\frac{6}{8}$.

Vi förlänger till samma nämnare (24) för att kunna jämföra talen.

$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$ och $\frac{6}{8} = \frac{6 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{18}{24}$

Svar: $\frac{20}{24}$ är mer än $\frac{18}{24}$, alltså är $\frac{5}{6}$ större än $\frac{6}{8}$.

1.3 TAL I BRÅKFORM
35

Figur 8. Exempel C (förlänga och förkorta tal i bråkform)

Först kategoriseras informationsavsnittets *funktion* (steg II). Det finns två funktioner i figur 8. (1) att *förkorta och förlänga ett tal i bråkform* får mening genom beskrivningen att förlängning och förkortning av tal i bråkform inte förändrar talets värde. Detta kategoriseras som *koncept*. (2) Vidare visas tillvägagångssättet för samma matematiska område. Detta kategoriseras som *procedur*. Trots pilarna längs rektanglarna anses inte informationsavsnittet visa på ett samband då förkortning och förlängning av tal i bråkform presenteras som ett

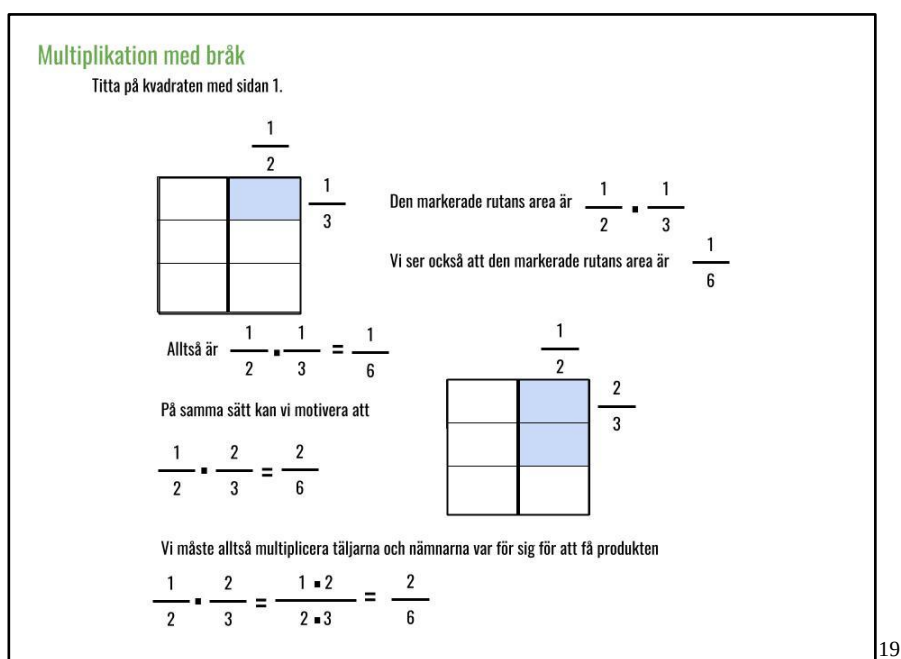
¹⁷ Det finns flera delar i figur 8, exempel C tar hänsyn till det som i figuren beskrivs som exempel 1 och kommer förklara metoden fram till och med underrubriken förlänga/förkorta

¹⁸ Figur 8 är hämtad från Matematik 5000 1b (Grön bok) (Alfredsson L., Bråting, Erixon, & Heikne, 2015, s. 35)

koncept och inte två olika koncept som kan kopplas samman. I steg III kategoriseras *representationerna* för både konceptet och proceduren. Konceptet förlänga och förkorta får mening med hjälp av räkneexemplen $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$ och $\frac{2}{6} = \frac{2/2}{6/2} = \frac{1}{3}$ som utvecklas och förklaras med de två rektanglarna. I motsats till exempel B (figur 7) baseras meningsskapandet för det matematiska området på *symboler* (π) och fördjupas med *ikoner* ($\heartsuit$). Figur 8 kategoriseras alltså $\pi \rightarrow \heartsuit$, vilket innebär att informationsavsnittet utgår från matematiska symboler och utvecklar detta med ikoner. Detta färgkodas turkost. *Representationerna* för procedurerna (steg III) att förlänga och förkorta tal i bråkform förklaras med de röda talen och symbolerna ($\times 2$ och $/ 2$). I det här exemplet (figur 8) förklaras proceduren med både ett meningsskapande med hjälp av de matematiska symbolerna och detta fördjupas med hjälp av rektanglarna. Till skillnad från figur 7 finns det alltså både ett meningsskapande för det matematiska området. Figur 8 kategoriseras alltså $\pi \rightarrow \heartsuit$, vilket innebär att informationsavsnittet utgår från symboler och utvecklar det matematiska området med ikoner. Detta färgkodas turkost.

3.2.5 Exempel D: Multiplikation av tal i bråkform

Exempel D (figur 9) är ett påhittat exempel med inspiration är från Matematik 1c.



Figur 9. Exempel C (multiplikation av tal i bråkform)

Först kategoriseras informationsavsnittets *funktion* (steg II). Det finns två funktioner i figur 9. (1) metoden för att *multipliera tal i bråkform* förklaras. Detta görs med hjälp av två exempel och förtydligas med hjälp av den sista meningen ("vi måste alltså multiplicera..."). Denna funktion kategoriseras alltså som *procedur*. (2) två matematiska områden, *multiplikation av tal i bråkform* och *area*, kopplas samman. Detta görs med hjälp av observationen att eftersom $\frac{1}{6}$ av kvadraten är färglagd måste detta också vara den lilla rektangelns area. Denna funktion kategoriseras som *samband*. I steg III kategoriseras *representationerna*. I figur 9 får både proceduren och sambandet mening med hjälp av kvadraten. Det är alltså en *ikon* ($\heartsuit$) som

¹⁹ Inspiration till figur 9 är tagen från läroboken Matematik 1c (Sjunnesson, Holmström, & Smedhamare, 2011, s. 27)

utgör hur proceduren att multiplicera tal i bråkform genomförs respektive ger mening till sambandet, informationsavsnittet förklarar och utvecklar detta i sin tur med hjälp av räkneexempel, alltså med hjälp av *symboler* (π). Både proceduren och sambandet kategoriseras alltså ♥→ π vilket innebär att informationsavsnittet utgår från ikonerna och utvecklar ikonerna till symboler. Detta färgkodas ljusblått

3.3 Genomförande

Genom privata kontakter och kontakter på NCM tillhandahölls läroböcker från olika förlag. Tre förlag (Liber Ab, Natur & Kultur och Sanoma Utbildning) kontaktades via mejl och bidrog med ytterligare läroböcker. När alla läroböckerna var insamlade gjordes ett första urval genom att se vilka rubriker eller kapitel som fanns i böckerna som skulle kunna vara av intresse samt hur många sidor dessa kapitel var. Alla böcker som tillhandahållits redovisas i bilaga 1.

I början av datainsamling kontaktades Ola Helenius för att diskutera och erhålla en djupare förståelse för den valda metoden då han genomfört samma metod i Ahl och Helenius (2020), för att öka analysens reliabilitet. Datainsamlingen genomfördes bok för bok och vid osäkerhet jämfördes två böcker av samma förlag med varandra. Datainsamlingen genomfördes två gånger för varje bok med en veckas mellanrum för att säkerställa tolkningens reliabilitet av informationsdelarna.

3.3.1 Analys och bearbetning

Utveckling definieras utifrån den teoretiska bakgrunden som att representationsformerna förändras från det situationsbundna till det ikoniska för att slutligen bli mer formella, abstrakta och symboliska (Bruner 1966). För att kunna analysera utveckling behövde datan analyseras. Tolkning och kategorisering av informationsavsnitten sammanställdes läroboksvis i Excell (bilaga 2). Till skillnad från Ahl och Helenius (2020) har datan färgkodats. Färgkodningen syftar till att underlätta observationen av eventuella mönster inom och mellan läroböckerna. För att tydliggöra resultatet sammanfattades kategoriseringen av representationerna i en korstabell (tabell 4) där representationerna redovisas i fallande ordning för hur vanligt förekommande den var för varje lärobok.

För att få djupare förståelse för hur de olika funktionerna användes och för att kunna observera eventuell utveckling inom varje funktion sammanställdes tre tabeller som jämför olika kategoriseringar mellan läroböckerna. Dessa tabeller sammanställdes med avseende på den lärobok som hade (procentuellt) minst antal kategoriseringar för varje funktion. Anledningen till att välja den bok med minst antal av en viss funktion gjordes för att se om det var något område som återkom i alla läroböcker och se om det skedde en utveckling mellan dem.

När det gällde att skapa förståelse för utveckling mellan läroböckerna sammanställdes ytterligare fyra tabeller där Prio matematik 7 jämfördes med Prio matematik 9 och Prio matematik 9 med Matematik 5000 1a (Röd bok), 1b (Grön bok) och 1c (Blå bok). Tabellerna sammanställdes med avseende på vilka matematiska områden som var gemensamma för de olika läroböckerna. Eftersom elever på gymnasiet inte kan läsa både matematik 1a, 1b och 1c sammanställdes inga tabeller mellan dessa kurser eftersom en utveckling mellan de olika böckerna inte skulle påverka elever.

3.4 Forskningsetik

Studien har genomförts enligt (Vetenskapsrådet, 2020) riktlinjer. Denna studies datamaterial är offentligt publicerat och därför påverkas inte någon enskild person av analysen. Vetenskapsrådets individsskydds krav är därför inte aktuella för studien. Studien har följt informationskravet genom att beskriva syftet med studien vid kontakt med förlag i frågan om att bidra med läroböcker.

3.5 Trovärdighet

Analysens reliabilitet stärks av den systematiska och upprepade datainsamlingen av informationsdelarna. Den tvådimensionella metoden har baserats på teori, tidigare forskning som har genomförts på liknande material. Kritik kan riktas i att jag själv tolkade informationsdelarna vilket kan sänka reliabiliteten. Trots samtal med Ola Helenius, som har genomfört en liknande studie kan det inte garantera att en annan student, elev, lärare eller forskare skulle ha tolkat informationsavsnitten på samma sätt. Datan har sammanställts manuellt vilket också kan leda till reliabilitetsproblem, dock anser jag att färgkodningen underlättade för att säkerställa att all data har räknats in på rätt plats. Reliabiliteten stärks dessutom av att metoden är beprövad i tidigare forskning.

Validiteten kan anses hög då bara läroböckernas information faktiskt undersöktes. Syftet var att öka kunskapen om representationsformer i läroböcker och diskutera om de ger förutsättningar för elevers utveckling inom tal i bråkform. Ingen interaktion mellan lärobok och lärare eller lärobok och elev har studerats. Resultatet gör inte anspråk för att dra generella slutsatser för alla läroböcker, inte heller för hur elevers förståelse *faktiskt* utvecklas. Däremot undersöktes bara avgränsade kapitel vilket sänker validiteten något eftersom tal i bråkform är ett mångfasetterat begrepp och skulle kunna återkomma i andra kapitel som inte undersöktes.

4 Resultat

En sammanställning av informationsdelarnas vanligaste funktioner och representationer visas i tabell 4. Detaljerad data finns i bilaga 2.

Prio matematik 7				
Representationer	Koncept	Procedur	Samband	Total
$\rightarrow \pi$	4	12	7	23
$\heartsuit \rightarrow \pi$	9	4	1	14
$\text{😊} \rightarrow \pi$	1	7	0	8
$\text{😊} \heartsuit \rightarrow \pi$	1	4	0	5
$\text{😊} \pi \rightarrow \heartsuit$	0	1	0	1
$\text{😊} \rightarrow \heartsuit$	0	0	0	0
Total	15	28	8	51
Prio matematik 9				
Representationer	Koncept	Procedur	Samband	Total
$\rightarrow \pi$	3	21	4	28
$\heartsuit \rightarrow \pi$	1	2	0	3
$\text{😊} \rightarrow \pi$	2	2	0	4
$\text{😊} \heartsuit \rightarrow \pi$	2	0	0	2
$\text{😊} \rightarrow \heartsuit$	0	0	0	0
Total	8	25	4	37
Matematik 5000 1a (Röd bok)				
Representationer	Koncept	Procedur	Samband	Total
$\rightarrow \pi$	1	8	2	11
$\heartsuit \rightarrow \pi$	1	4	1	6
$\text{😊} \rightarrow \pi$	0	3	0	3
$\text{😊} \pi \rightarrow \heartsuit$	1	1	0	2
$\text{😊} \rightarrow \heartsuit$	1	0	0	1
Total	4	16	3	23
Matematik 5000 1b (Grön bok)				
Representationer	Koncept	Procedur	Samband	Total
$\rightarrow \pi$	2	7	5	14
$\heartsuit \rightarrow \pi$	3	9	0	12
$\text{😊} \rightarrow \pi$	1	4	0	5
$\text{😊} \pi \rightarrow \heartsuit$	1	0	0	1
$\text{😊} \rightarrow \heartsuit$	2	0	0	2
$\pi \rightarrow \heartsuit$	1	1	0	2
Total	10	21	5	36
Matematik 5000 1c (Blå bok)				
Representationer	Koncept	Procedur	Samband	Total
$\rightarrow \pi$	3	9	7	19
$\heartsuit \rightarrow \pi$	2	1	0	3
$\text{😊} \rightarrow \pi$	0	2	0	2
$\text{😊} \rightarrow \heartsuit$	0	0	0	0
Total	5	12	7	24

Tabell 4. Sammanställda data från de undersökta läroböckerna

I resultatet kommer först läroböckernas vanligaste representationsformer att presenteras. Sedan redovisas informationsavsnittens olika funktioner (koncept, procedur och samband) för några matematiska områden. Slutligen presenteras utvecklingen mellan läroböckerna för högstadiet och mellan läroboken för årskurs 9 och matematik 1a, 1b respektive 1c.

4.1 Läroböckers vanligaste representationsformer

Det fanns tre kategoriseringar av representationer som visade sig vara vanliga i alla fem läroböcker. Det kan även belysas att dessa tre kategoriseringar kommer i samma ordning sett till hur vanliga de var i alla läroböcker.

1. $\rightarrow \pi$. Vilket innebär att det endast fanns en symbolisk representation som inte grundas i ett meningsskapande.
2. $\heartsuit \rightarrow \pi$. Vilket innebär att informationsavsnittets meningsskapande utgår från ikoniska representationer och utvecklas med hjälp av symboliska representationer.
3. $\text{😊} \rightarrow \pi$. Vilket innebär att informationsavsnittets meningsskapande utgår från situationsnära representationer med anknytning till den verkliga världen och utvecklas sedan med hjälp av symboliska representationer.

Det var vanligast att symboliskt representera ett matematiskt område utan att grunda symbolerna i ett meningsskapande. Symbolerna byggde alltså inte vidare på något tidigare meningsskapande, i alla fall inte inom samma informationsavsnitt. I alla läroböcker förekom kategoriseringen $\rightarrow \pi$ framför allt i funktionen *procedurer*. Figur 10 är ett exempel på en sådan kategorisering. Proceduren att förkorta talet $\frac{45}{60}$ representeras endast med de rödmarkerade talen och texten bredvid. Det finns alltså inget meningsskapande eller förklaring för proceduren.

→

Exempel Förkorta $\frac{45}{60}$ så långt som möjligt.

Lösning

Både 45 och 60 är delbara med 5.

$$\frac{45}{60} = \frac{45/5}{60/5} = \frac{9}{12}$$

Förkorta med 5.

Både 9 och 12 är delbara med 3, alltså går det att förkorta ytterligare.

$$\frac{9}{12} = \frac{9/3}{12/3} = \frac{3}{4}$$

Förkorta med 3.

Svar: Den enklaste formen av bråket är $\frac{3}{4}$.

Figur 10. Informationsavsnitt från Prio matematik 7

Inom samma matematiska område var det få kategoriseringar som gick från situationsbundna representationer (😊) vidare till ikoniska representationer ($\heartsuit$) för att sedan landa i symboliska representationer (π). I matematik 5000 1a (Röd bok) och 1b (Grön bok)²¹ följdes kategoriseringen $\text{😊} \rightarrow \heartsuit$ upp av $\heartsuit \rightarrow \pi$ en gång per bok. Detta var inom samma matematiska område (addition av tal i bråkform) men inte inom samma funktion. Kategoriseringen $\text{😊} \rightarrow \heartsuit$ förekom i koncept och $\heartsuit \rightarrow \pi$ i procedur (se bilaga 2). Däremot kategoriserades $\text{😊} \heartsuit \rightarrow \pi$

²⁰ Figur 10 är hämtad från Prio matematik 7 (Cederqvist, Larsson, Gustafsson, & Szabo, 2012, s. 130)

²¹ För att underlätta läsningen kommer läroböckerna Matematik 5000 i fortsättningen bara att notera vilken kurs den avser (1a, 1b eller 1c). Lärobokens fullständiga namn, alltså vilken färg boken har kommer inte att skrivas ut. Detta gäller för hela kapitel 4 och 5.

totalt sju gånger. Denna notering kan tyda på ett det finns en viss utveckling då meningsskapandet grundade sig både i situationer och ikoner för att sedan utvecklas till symboler. Kategoriseringen $\text{😊} \heartsuit \rightarrow \pi$ var vanligare för procedurer i Prio matematik 7 och för koncept i Prio matematik 9²². Sett till vilket matematiskt område dessa infann sig på var det olika för både Prio 7 och 9 (se bilaga 2).

I tabell 4 går det även att observera att antalet olika kategoriseringar minskar när den tänkta nivån på matematiken ökar. I Prio 7 hittades fem olika kategorier medan det i Prio 9 hittades fyra. I matematik 5000 1a och 1b hittades fem respektive sex olika kategorier jämfört med matematik 5000 1c där det förekom tre olika kategorier.

4.2 Informationsavsnittens funktioner

I alla läroböcker kategoriserades ungefär hälften av alla funktioner som *procedurer*. Prio 7 (28 av 51), Prio 9 (25 av 37), Matematik 5000 1a (16 av 23), Matematik 5000 1b (31 av 36), Matematik 5000 1c (12 av 23) (se tabell 4). Näst vanligast var *koncept* i alla böcker förutom i Matematik 5000 1c där näst vanligast var samband. Matematik 5000 1b var den bok som hade flest olika kategorier av representationer inom koncept.

För att jämföra de olika funktionerna presenteras här tre separata tabeller (tabell 5, 6 och 7). För funktionerna *koncept* och *procedur* redovisas ett urval av de matematiska områdena baserat på den lärobok som hade procentuellt mist antal kategoriseringar för den undersökta funktionen. Detta gör att det finns fler matematiska områden som inte redovisas i tabellerna men återfinns i bilaga 2 För funktionen *samband* redovisas alla matematiska områden då denna funktion hade jämförelsevis få noteringar (tabell 7).

4.2.1 Koncept

Koncept förekom fler gånger i Prio 7 och Matematik 5000 jämfört med de övriga läroböckerna. Prio 7 hade dock en övervägande del (9 av 15) representationer av kategorin $\heartsuit \rightarrow \pi$ jämfört med Matematik 5000 1b där representationerna för koncepten kategoriserades på flera olika sätt (tabell 4). Koncept förekom minst antal (4 av 23) gånger i Matematik 5000 1a. Dessa koncept förekom för de matematiska områdena *andel*, *förlängning*, *förhållande* och *addition av bråk*. Tabell 5 visar hur koncepten för dessa fyra matematiska områden kategoriserats i de olika läroböckerna.

Årskurs / Kurs	7	9	1a	1b	1c
Andel	$\heartsuit \rightarrow \pi$		$\text{😊} \pi \rightarrow \heartsuit$	$\text{😊} \pi \rightarrow \heartsuit$	
Förlängning	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\text{😊} \heartsuit \rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \heartsuit$	$\heartsuit \rightarrow \pi$
Förhållande			$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
Addition av bråk		$\rightarrow \pi$	$\text{😊} \rightarrow \heartsuit$	$\text{😊} \rightarrow \heartsuit$	$\rightarrow \pi$

Tabell 5. Jämförelse av koncept inom några matematiska områden

Matematik 5000 1a och 1b har näst intill identiska noteringar förutom för området förlängning (se figur 7 och 8). En annan observation var att procedur för förlängning noterades på samma sätt i Prio 7 och Matematik 5000 1c. Av tabell 5 går det också att se att

²² För att underlätta läsningen kommer läroböckerna Prio matematik 7 och 9 i fortsättningen bara notera vilken årskurs den avser och utelämna *matematik* från bokens titel. I fortsättningen kommer det alltså stå Prio 7 respektive 9. Detta gäller för hela kapitel 4 och 5.

det enda matematiska området som återkom i alla läroböcker som koncept var att förlänga tal i bråkform. Vidare kan Prio 9 och Matematik 5000 1c jämföras då addition av bråk kategoriserats på samma sätt. Dessutom ger Prio 7 inget koncept för addition av bråk. Utifrån denna analys är första gången addition tas upp som koncept endast representerat med symboler ($\rightarrow \pi$) och har därmed inget meningsskapande. Representationer som byggde på ett meningsskapande inom detta matematiska område fanns i Matematik 5000 1a och 1b.

4.2.2 Procedur

Procedur förekom oftast i Matematik 5000 1a och Prio 9 och mer sällan i Matematik 5000 1c. Gemensamt för läroböckerna var att procedurerna ofta hade representationer av kategorin $\rightarrow \pi$, förutom Matematik 5000 1b där $\heartsuit \rightarrow \pi$ var den vanligaste kategorin (tabell 4). I Matematik 5000 1a och Prio matematik 7 fanns flera olika kategorier av representationer jämfört med de andra läroböckerna. Procedur förekom procentuellt sett minst antal gånger (12 av 24) i Matematik 5000 1c. Dessa procedurer förekom i de matematiska områdena som redovisas i tabell 6.

Årskurs / Kurs	7	9	1a	1b	1c
Förlänga	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \heartsuit$	$\heartsuit \rightarrow \pi$
Förkorta	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \heartsuit$	$\heartsuit \rightarrow \pi$
Förhållande			$\smiley \rightarrow \pi$	$\smiley \rightarrow \pi$	$\smiley \rightarrow \pi$
Taluppfattning					$\rightarrow \pi$
Jämföra bråk	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Addition av bråk	$\smiley \heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Subtraktion av bråk	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Multiplikation av bråk	$\smiley \pi \rightarrow \heartsuit$ $\smiley \rightarrow \pi$ $\smiley \heartsuit \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$ $\smiley \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\smiley \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\smiley \rightarrow \pi$ $\heartsuit \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Division med av bråk		$\rightarrow \pi$		$\heartsuit \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$

Tabell 6. Jämförelse av procedur inom några matematiska områden

Förlänga och förkorta tal i bråkform kategoriserades $\rightarrow \pi$, för de lägre nivåerna. Det innebär alltså med en symbolisk representation som inte grundats i meningsskapande av det matematiska området. Däremot fanns det ett meningsskapande som utvecklas antingen till ikoner eller symboler i läroböckerna för de högre nivåerna. I matematik 5000 1b ”backar” utvecklingen då meningsskapandet grundar sig i symboler och förklaras av ikoner, detta är det motsatta som identifierades i Matematik 5000 1c. Även om funktionerna inte värderas som utveckling bör det pålysas att har *konceptet* att förlänga tal i bråkform kategoriserats med olika representationer (tabell 5) som alla har byggt på någon form av meningsskapande.

Tabell 6 visar också att det var flera matematiska områden vars procedurer återfanns i alla läroböcker. Exempelvis fanns tre av fyra operationer representerade i alla läroböcker. Dessutom går det att observera att Prio 7 och Matematik 5000 1b har flera olika kategorier av representationer för operationer av tal i bråkform, framför allt för multiplikation av tal i

bråkform, till skillnad från Matematik 5000 1c vars enda representationer för operationer av tal i bråkform är med symboler ($\rightarrow \pi$).

Förhållande var ett område som bara återfanns i läroböckerna för matematik 1. Utvecklingen hoppar då över den ikoniska representationen och går direkt från situation till symboler eftersom dessa procedurer kategoriserats $\odot \rightarrow \pi$. Det fanns alltså ingen ikonisk representation för proceduren att beräkna förhållande. Självklart kan förhållande ha funnits i andra delar av Prio 7 och 9 som på grund av urvalet inte analyserats. I figur 11 återfinns ett avsnitt som kallas 1202. Detta informationsavsnitt omfattar det matematiska området taluppfattning som redovisas i tabell 6. Eleverna uppmanas att skriva ett tal som är hälften så stort som $\frac{1}{6}$. Informationsavsnittet kategoriserades till procedur eftersom en metod visas, det finns ingen information om division eller multiplikation med det inverterade talet, det finns alltså inget samband eller koncept. Området hade också kunnat namnges förlänga tal i bråkform eller division av tal i bråkform men eftersom informationsavsnittet innefattade en förståelse för hur ett tal i bråkform halveras samt vad hälften av ett tal är kategoriserades detta område som taluppfattning.

Exempel 2 I en skolklass med 30 elever finns 12 pojkar och 18 flickor. Förhållandet mellan antalet pojkar och flickor skrivs i enklaste form.

$$\frac{\text{antalet pojkar}}{\text{antalet flickor}} = \frac{12}{18} = \frac{12/6}{18/6} = \frac{2}{3}$$

Förhållandet $\frac{2}{3}$ skrivs ofta som 2:3. Man säger: "två till tre".

Med andra ord kan man säga att "det går två pojkar på tre flickor".

1201 Det finns kvicksilveratomer som betecknas Hg-200. I kärnan på en sådan atom finns 200 partiklar: 80 protoner och 120 neutroner. Beskriv andelen protoner med ett bråk i enklaste form.

$$\frac{80}{200} = \frac{80/10}{200/10} = \frac{8}{20} = \frac{8/4}{20/4} = \frac{2}{5}$$

Svar: $\frac{2}{5}$ av partiklarna är protoner.

1202 Skriv ett bråk som är hälften så stort som $\frac{1}{6}$.

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 2} = \frac{1}{12}$$

Svar: Hälften av $\frac{1}{6}$ är $\frac{1}{12}$.

1203 a) Bestäm utan räknare vilket bråk som är störst, $\frac{3}{7}$ eller $\frac{2}{5}$.
b) Ange ett bråk som ligger mellan $\frac{3}{7}$ och $\frac{2}{5}$.

a) Vi förlänger till samma nämnare (35) för att kunna jämföra talen.

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35} \quad \text{och} \quad \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$$

$$\frac{14}{35} < \frac{15}{35} \quad \text{dvs} \quad \frac{2}{5} < \frac{3}{7}$$

b) Vi förlänger bråken i a) med 2 vilket ger $\frac{14}{35} = \frac{28}{70}$ och $\frac{15}{35} = \frac{30}{70}$

Svar: $\frac{29}{70}$

Figur 11 Informationsavsnitt från Matematik 5000 1c

²³ Figur 12 är hämtad från Matematik 5000 1c (Alfredsson L., Bråting, Erixon, & Heikne, 2014b, s. 21)

4.2.3 Samband

Samband förekom procentuellt flest gånger i matematik 5000 1c och minst gånger i Prio 9. Gemensamt för alla läroböcker var att i princip alla samband kategoriserades med representationen $\rightarrow \pi$. Eftersom samband förekom få gånger jämfört med koncept och procedurer redovisas alla matematiska områden som hade ett samband i tabell 7. Till skillnad från de andra funktionerna kan det noteras att flera olika matematiska områden som hade samband. Det enda återkommande området som hade samband var multiplikation av tal i bråkform. Samband mellan tal i bråkform och tallinjen (taluppfattning) förekom endast i Prio 7.

Årskurs/kurs	7	9	1a	1b	1c
Blandad form	♥ $\rightarrow \pi$				
Addition av bråk					$\rightarrow \pi$
Tal i bråkform på tallinjen	$\rightarrow \pi$				
Multiplikation av bråk	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Division av bråk				$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Förändring i procent	$\rightarrow \pi$	Procent har ett eget kapitel i Prio 9 och Matematik 5000 1a, 1b & 1c			
Procent, decimalform och bråkform	$\rightarrow \pi$				
Beräkna procent med huvudräkning	$\rightarrow \pi$				
Förenkla bråk		$\rightarrow \pi$			
Inverterade tal		$\rightarrow \pi$		$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Andel			$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
Jämföra bråk			♥ $\rightarrow \pi$		$\rightarrow \pi$
Rationella tal					$\rightarrow \pi$

Tabell 7. Jämförelse av samband för olika matematiska områden

4.3 Utvecklingen mellan läroböckerna

I detta avsnitt presenteras utveckling med utgångspunkt i återkommande matematiska områden mellan de olika läroböckerna. I serien matematik 5000 var det två matematiska områden som inte fanns i Prio 9 nämligen *andel* och *förhållande*. Dessa matematiska områden skulle kunna finnas i ett annat kapitel i Prio 9 som inte har ingått i analysen. En annan upptäckt var att det var fler matematiska områden som återkom från Prio 9 i Matematik 5000 1c och 1b jämfört med matematik 5000 1a.

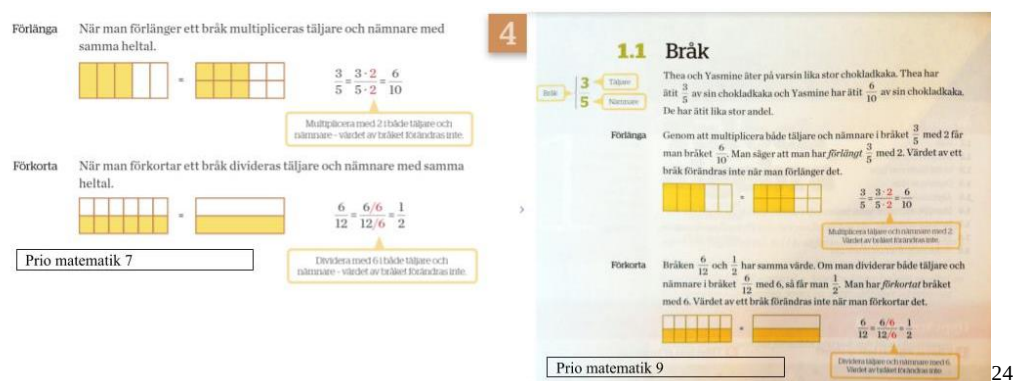
4.3.1 Prio 7 och Prio 9

Mellan Prio 7 och Prio 9 förändrades framför allt kategoriseringen av representationerna för koncept och procedur. Det var vanligare att procedurer endast hade en symbolisk representation ($\rightarrow \pi$) i Prio 9. Addition av bråk och bråk på blandad form var två områden där en utveckling kunde identifieras inom proceduren. I Prio 7 gick proceduren för addition av tal i bråkform från en situationsbaserad och ikonisk representation till en symbolisk representation (☺ ♥ $\rightarrow \pi$). I Prio 9 fortsatte proceduren att var symbolisk representerad men läroboken visade inte längre på ett meningsskapande för den symboliska representationen ($\rightarrow \pi$).

Matematiskt område		Koncept	Procedur	Samband		Koncept	Procedur	Samband
Addition av bråk	Prio 7		☺ ♥ → π		Prio 9		→ π	
Blandad form		☺ ♥ → π	♥ → π	♥ → π			→ π	
Förkorta bråk		♥ → π	→ π			♥ → π	→ π	
Förlänga bråk		♥ → π	→ π			☺ ♥ → π	→ π	
Jämföra tal i bråkform samma nämnare		♥ → π					→ π	
Jämföra tal i bråkform samma täljare		♥ → π					→ π	
Jämföra tal i bråkform olika nämnare och täljare		♥ → π	→ π				→ π	
Subtraktion av bråk olika nämnare			→ π				→ π	
Enklaste form		→ π				→ π		
Förlänga bråk		♥ → π	→ π			☺ ♥ → π	→ π	→ π
Multiplikation av bråk (med heltal)			☺ → π ☺ ♥ → π	→ π		☺ → π	→ π ☺ → π	→ π
Multiplikation av två bråk		→ π	☺ ♥ → π ☺ π → ♥	→ π		☺ → π	♥ → π	→ π

Tabell 8. Återkommande områden i Prio 7 och Prio 9

Informationsavsnitten för det matematiska området förlänga och förkorta bråk hade exakt samma ikoner och symboler (tal) i Prio 7 och 9 (figur 12) men i Prio 9 fanns det även ett situationsbaserat meningsskapande till skillnad från Prio 7 där meningsskapandet endast var ikoniskt.



Figur 12. Förlänga och förkorta bråk Prio matematik 7 och 9

Några matematiska områden som fanns i Prio 7 men inte i Prio 9 är *tal i bråkform på tallinjen* samt de områden som behandlar procent begreppet och andel. Däremot finns ett eget procentkapitel i Prio 9 som inte ingått i analysen.

²⁴ Figur 11. Till vänster Prio matematik 7 (Cederqvist, Larsson, Gustafsson, & Szabo, 2012, s. 129). Till höger Prio matematik 9 (Cederqvist, Larsson, & Gustafsson, 2014, s. 8)

4.3.2 Prio 9 och Matematik 5000 1a

En skillnad mellan Prio 9 och Matematik 5000 1a som kan observeras i tabell 9 är att tre procedurer för olika matematiska områden (*addition av bråk med samma nämnare*, *blandad form* och *multiplikation av bråk med heltal*) har endast representerats med symboler i Prio 9 och går tillbaka till ett meningsskapande med ikoner och situationer i Matematik 5000 1a.

Procedurerna för samma område har i Prio 7 kategoriserat $\text{😊} \heartsuit \rightarrow \pi$ och $\rightarrow \pi$ (bilaga 2).

Att subtrahera tal i bråkform återfanns i båda läroböckerna men i Prio 9 handlade subtraktionens om olika nämnare medan det i Matematik 5000 1a var med samma nämnare (se bilaga 2). Liknande resultat kan betraktas i addition av tal i bråkform. Tabell 9 visar även att det inte sker någon utveckling mellan Prio 9 och matematik 5000 1a utan snarare en tillbakagång framför allt med avseende på procedurer.

Matematiskt innehåll		Koncept	Procedur	Samband		Koncept	Procedur	Samband
Addition av bråk med samma nämnare	Prio 9		$\rightarrow \pi$		Matematik 5000 1a	$\text{😊} \rightarrow \heartsuit$	$\heartsuit \rightarrow \pi$	
Blandad form			$\rightarrow \pi$				$\heartsuit \rightarrow \pi$	
Förkorta		$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$				$\rightarrow \pi$	
Förlänga		$\text{😊} \heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$			$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
Jämföra bråk			$\rightarrow \pi$				$\rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$
Multiplikation med bråk med heltal		$\text{😊} \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$			$\rightarrow \pi$ $\text{😊} \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$

Tabell 9. Återkommande områden i Prio 9 och Matematik 5000 1a

Några matematiska områden som fanns i Prio 9 men inte i Matematik 5000 1a var *division med bråk* och *inverterade tal*. Detta innebär att elever som väljer yrkesprogram inte får förutsättningarna för att fortsätta utveckla förmågan för alla räknesätt med tal i bråkform, om den enda inputen skulle vara matematik 5000 1a.

4.3.3 Prio 9 och Matematik 5000 1b

Utvecklingen mellan Prio 9 och Matematik 5000 1b (tabell 10) liknar resultat i avsnitt 4.3.2, det är alltså en tillbakagång av representationsformerna, framför allt inom procedurerna. Många procedurer hade enbart en symbolisk representation i Prio 9 medan Matematik 5000 1b ger ett ikoniskt meningsskapande för den symboliska representationen ($\heartsuit \rightarrow \pi$) inom samma matematiska område. Några matematiska områden som fanns i Prio 9 men inte i Matematik 5000 1b var *den enklaste formen* och *förenkla*. Dessa områden kan dock förekomma i beräkningar med bråk i Matematik 5000 1b (se bilaga 2). Precis som i Matematik 5000 1a hittades områdena *andel* och *förhållande* endast i Matematik 5000 1b men inte i Prio 9.

Matematiskt innehåll		Koncept	Procedur	Samband		Koncept	Procedur	Samband
Addition av bråk olika nämnare	Prio 9		$\rightarrow \pi$		Matematik 5000 1b		$\rightarrow \pi$	
Addition av bråk samma nämnare							$\heartsuit \rightarrow \pi$	
Beräkningar med bråk (Subtraktion och addition)		$\rightarrow \pi$				$\text{smiley} \rightarrow \heartsuit$	$\heartsuit \rightarrow \pi$	
Blandad form			$\rightarrow \pi$				$\heartsuit \rightarrow \pi$	
Division av bråk		$\text{smiley} \heartsuit \rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$ $\text{smiley} \rightarrow \pi$			$\text{smiley} \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$ $\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Förkorta		$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$			$\pi \rightarrow \heartsuit$	$\pi \rightarrow \heartsuit$	
Inverterat tal		$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		$\rightarrow \pi$		$\rightarrow \pi$
Jämföra bråk			$\rightarrow \pi$				$\rightarrow \pi$	
Multiplikation med bråk med heltal		$\text{smiley} \rightarrow \pi$	$\text{smiley} \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$ $\text{smiley} \rightarrow \pi$	
Multiplikation av flera bråk		$\text{smiley} \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$ $\heartsuit \rightarrow \pi$			$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Subtraktion av bråk (olika nämnare)			$\rightarrow \pi$				$\heartsuit \rightarrow \pi$	
Subtraktion av bråk (samma nämnare)			$\rightarrow \pi$				$\rightarrow \pi$	

Tabell 10. Återkommande områden i Prio 9 och Matematik 5000 1b

4.3.4 Prio 9 och Matematik 5000 1c

Det har redan i tabell 4 konstaterats att den vanligaste kategoriseringen av representationsformer var den som endast var symbolisk ($\rightarrow \pi$). I Matematik 5000 1c blev totalt 19 av 23 informationsavsnitt kategoriserade $\rightarrow \pi$. Detta gör även att tabell 11 visar på en enförmig bild av representationer. Det fanns ett återkommande område där det, likt de övriga läroböckerna i matematik 5000-serien, hittades en tillbakagång av utvecklingen. Detta var för det matematiska området *att förkorta och förlänga bråk*. Alla matematiska områden i tabell 11 har representerats med symboler, och det finns några områden och funktioner som även ger meningsskapande till dessa.

Matematiskt innehåll		Koncept	Procedur	Samband		Koncept	Procedur	Samband
Addition av bråk (Olika nämnare)	Prio 9		$\rightarrow \pi$		Matematik 5000 1c		$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Addition av bråk (samma nämnare)			$\rightarrow \pi$				$\rightarrow \pi$	
Addition och subtraktion av bråk		$\rightarrow \pi$				$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
Division av bråk		 ♥ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$ ♥ $\rightarrow \pi$  $\rightarrow \pi$				$\rightarrow \pi$	
Förkorta och förlänga		♥ $\rightarrow \pi$  ♥ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$			♥ $\rightarrow \pi$	♥ $\rightarrow \pi$	
Inverterat tal		$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		$\rightarrow \pi$		$\rightarrow \pi$
Jämföra bråk			$\rightarrow \pi$				$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Multiplikation av bråk med heltal		 $\rightarrow \pi$	 $\rightarrow \pi$ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$			$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$
Multiplikation av flera bråk		 $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$ ♥ $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$			$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$

Tabell 11. Återkommande områden i Prio 9 och Matematik 5000 1c

5 Diskussion

I detta kapitel diskuteras studiens resultat djupare för att belysa frågan om läroböckernas informationsrutor ger förutsättningar för elever att utvecklas. Här lyfts även aspekter som knyter an till kunskapskraven och didaktiska konsekvenser. Vidare kommer den valda metoden och urvalet att diskuteras och förslag på vidare forskning presenteras. Slutligen sammanfattas examensarbetet i en slutsats med ett kortfattat svar på frågeställningarna.

5.1 Resultatdiskussion

Ger läroböcker förutsättningar för att elever ska kunna utvecklas inom det matematiska området tal i bråkform? Det korta och enkla svaret är nej. Eftersom jag inte kunnat identifiera en tydlig utveckling inom eller mellan läroböckernas informationsrutor drar jag slutsatsen att eleverna inte ges tillräckliga förutsättningar att utvecklas. Med andra ord, eftersom läroböckerna visar en mycket liten utveckling tolkar jag det som att det finns en risk att eleverna inte heller utvecklas. Dessutom kunde flera fall av tillbakagång identifieras mellan Prio 9 och Matematik 5000 1a och 1b.

5.1.1 Går utvecklingen framåt eller bakåt?

Det var ovanligt att informationsavsnitten följde de tre stegen för utveckling; situation till ikon och ikon till symbol. Jag kan, likt Ahl och Helenius (2020), inte hitta ett tydligt skifte i kategoriseringen, varken inom läroböckerna för högstadiet eller i övergången till matematik 1a, 1b och 1c. En annan aspekt som är värd att lyftas är det går att observera en tillbakagång av utvecklingen mellan Prio 9 och Matematik 5000 1a och 1b. Tabellerna 9 och 10 visar att det inte sker någon tydlig utveckling mellan Prio 9 och matematik 5000 1a respektive matematik 5000 1b. Det sker snarare en tillbakagång då framför allt procedurer och samband som endast representerats med symboler ($\rightarrow \pi$) i Prio 9 får ett meningsskapande baserat på ikoner i matematik 5000 1a och 1b. Matematiken i dessa läroböcker kan alltså ses som ett förenklande av matematiken som återfanns i Prio 9. Det skulle däremot kunna argumenteras för att det finns en utveckling mellan Prio 9 och Matematik 5000 1c (tabell 11) då den symboliska representationen tar stor plats i matematik 5000 1c. Det gör den också i Prio 9 vilket gör att jag vill argumentera för att det inte sker någon utveckling mellan dessa läroböcker eftersom representationsformen i stort sett är oförändrad.

Enligt Bruner (1966) måste representationerna ske i en viss ordning (figur 1) för att förmedlingsprocessen ska leda till utveckling. Alltså borde analysen av de matematiska områdena och funktionerna först kategoriseras $\textcircled{a} \rightarrow \heartsuit$ och sedan $\heartsuit \rightarrow \pi$, antingen inom läroböckerna eller mellan årskurserna. Analysen visade inte på denna ordning. Det önskvärda resultatet att först identifiera situationsbundet meningsskapande som representerades med ikoner ($\textcircled{a} \rightarrow \heartsuit$) som i ett senare skede hade ett ikoniskt meningsskapande som representerades med symboler ($\heartsuit \rightarrow \pi$) framkom bara inom ett matematiskt område (addition av tal i bråkform) men inte för samma funktion (tabellerna 9 & 10). Kategorin $\textcircled{a} \rightarrow \heartsuit$ hittades varken i Prio 7, Prio 9 eller Matematik 5000 1c (tabell 4). Den kategorisering som kan liknas med den önskade utvecklingen är $\textcircled{a} \heartsuit \rightarrow \pi$ identifierades bara ett fåtal gånger i Prio 7 och Prio 9, men inte i någon lärobok i Matematik 5000-serien. Till viss del kan kategorin $\textcircled{a} \rightarrow \pi$ tolkas som utveckling om samma matematiska område eller funktion tidigare hade kategoriserats $\textcircled{a} \rightarrow \heartsuit$. Detta kunde inte identifieras mellan några läroböcker (tabellerna 8, 9, 10 & 11). Kategorin $\textcircled{a} \pi \rightarrow \heartsuit$ har tolkats som att utvecklingen backar tillbaka från symboler till ikoner eftersom meningsskapandet byggde på symboler och

”utvecklades” med hjälp av ikoner. Denna kategorisering hittades i Matematik 5000 1a och 1b. Detta går emot Bruner (1966) som beskriver att utveckling har skett när kunskapen kan uttryckas med hjälp av symboler istället för ikoner.

Eftersom analysen inte har inkluderat läroböcker för de tidigare årskurserna kan jag inte dra någon slutsats huruvida kategorin $\text{😊} \rightarrow \heartsuit$ var vanligare för dessa årskurser och om det därför finns en utveckling till Prio 7 och Prio 9 där $\heartsuit \rightarrow \pi$ var den näst vanligaste kategoriseringen. Ahl och Helenius (2020) har visserligen undersökt kvotkonstruktioner men kunde inte heller hitta kategorin $\text{😊} \rightarrow \heartsuit$ i sin studie som inkluderade de tidigare årskurserna.

Det är även värt att lyfta fram den tredje vanligaste kategorin $\text{😊} \rightarrow \pi$. Detta innebär att ett helt steg i den avgörande förmedlingsprocessen (Bruner, 1966) förbigås vilket skulle kunna göra det svårare för elever att utvecklas. Denna kategori var vanlig för procedurer (tabell 4) och innebär alltså att informationsavsnittet ger mening till ett matematiskt område med hjälp av en situation och utvecklar detta genom att visa hur situationen kan beräknas med tal (figur 13). Däremot sker inget meningsskapande med hjälp av representationer vilket enligt Bruner (1966) måste ske innan en situation kan översättas med symboler. Det kan även finnas en risk att elever inte får förståelse för de matematiska idéerna om tyngdpunkten ligger på vardagsnära företeelser (Sveider, 2016). Om det hade funnits ikoner som ett mellansteg i de procedurer som kategoriserats $\text{😊} \rightarrow \pi$ skulle kanske bättre förutsättningar för att förstå matematiska idéer finnas.

Exempel Pär simmar $\frac{3}{4}$ timme varje gång han tränar. En månad simmade han 9 gånger. Hur länge simmade Pär sammanlagt den månaden?

Lösning $9 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 3}{4} = \frac{27}{4}$ Heltalet multipliceras med täljaren.

$\frac{27}{4} = 6 \frac{3}{4}$ Det är enklare att se ungefär hur stort svaret är om du skriver i blandad form.

Svar: Pär simmade sammanlagt $6 \frac{3}{4}$ timmar.

$6 \frac{3}{4}$ timmar = 6 timmar och 45 minuter.

Figur 13. Informationsavsnitt från Prio 9

5.1.2 Symboler och den imitativa inläringen

Läroböckerna var begränsade i sina representationer vilket gör att elever inte får möta en variation av representationer. Kara och Incikabi (2018) beskriver att variationen av representationer är en viktig aspekt för att elever ska kunna undvika missuppfattningar om tal i bråkform. Liknande Ahl och Helenius (2020) har jag fått resultatet att en vanlig företeelse i läroböcker är att informationsavsnitten endast gav en symbolisk representation för olika koncept, procedurer och samband. Den vanligaste kategoriseringen av representationerna var $\rightarrow \pi$, alltså endast en symbolisk representation där informationsavsnittet inte gav någon bakgrund eller förklaring om symbolerna. I matematik 500 1c var denna representation i tydlig majoritet då 19 av 24 informationsavsnitt kategoriserades $\rightarrow \pi$. Det förväntas alltså att

²⁵ Figur 12 är hämtad från Prio matematik 9 (Cederqvist, Larsson, & Gustafsson, 2014, s. 16)

elever redan har fått meningsskapande och förståelse för symbolerna innan de möter denna lärobok. Så var inte fallet när Matematik 5000 1c ställdes emot Prio 9 (tabell 11). Löwing (2016) beskriver att bland elever som läser matematikintensiva program (alltså läser matematik 1c) finns få elever som kan genomföra division av två tal i bråkform. Att representationerna i matematik 5000 1c bara var symboliska utan meningsskapande och eleverna inte har fått med sig något att bygga denna kunskap på från Prio 9 skulle kunna vara en bidragande faktor till Löwings (2016) statistik. Flera av de återkommande områdena i matematik 5000 1c hade bara en symbolisk representation ($\rightarrow \pi$) även i Prio 9, framför allt för procedurer och samband. När Prio 9 ställdes mot Matematik 1a och 1b kunde inte heller en utveckling identifieras, det visade snarare att kategoriseringen går tillbaka från symboler till ikoner, vilket kan tyda på att utvecklingen backar (tabellerna 9 & 10).

Även om det skulle finnas en mängd representationer i läroböckerna menar forskning att det krävs undervisning kring representationsformerna för att elever inte ska bilda missuppfattningar om tal i bråkform (Ball, 1993; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Löwing, 2016; Sveider, 2016). Meningsskapandet saknades ofta i informationsavsnitten eftersom symboler i stor utsträckning inte grundade sig i en annan representation. Det fanns alltså inget som gav mening till hur symbolerna kunde representera de matematiska idéerna. Detta kan tolkas som att undervisningen om representationer saknas i läroböckerna.

Kategoriseringen $\rightarrow \pi$ kan också liknas vid den typ av imitativa inläring som Lithner (2008) menar är en anledning till att elever bara vill komma fram till rätt svar med hjälp av en given metod. Det kan anses vara mer effektivt och platssparande att bara använda symboler istället för ikoner (bilder) i läroböcker. Dessutom bör matematiken bli mer symbolisk och sofistikerad för de högre nivåerna vilket motiverar att symboliska representationer är i majoritet för läroböcker för högre nivåer. Jag menar däremot att det är problematiskt att de symboliska representationerna sällan grundar sig i ett meningsskapande, inte ens för de lägre nivåerna. $\rightarrow \pi$ var allra vanligast vid procedurer och enligt Lithner (2008) tar elever för givet att de kommande uppgifterna i läroböckerna ska gå att lösa med de givna metoderna som informationsavsnitten ger. Att informationsavsnitten framförallt fyller funktionen att visa på procedurer kanske inte är så förvånande eftersom avsnitten ska förbereda eleverna för att lösa de kommande uppgifterna inom det (nya) matematiska området. Informationsavsnitten visar alltså lösningsmetoder och ett imitativt görande i matematiken men ger ingen förklaring till görandet. Enligt Jäder (2015) är 79 % av uppgifterna imitativa och kan lösas med hjälp av exempeluppgifter. Vad händer när eleverna ska lösa de resterande 21 %? Att lära sig utantill och kunna använda olika metoder är självklart en viktig del av matematiken men procedurella och konceptuella kunskaper kräver också *förståelse* för matematiken. Att kunna lösa 79 % av uppgifterna i en lärobok kanske räcker för att uppfylla betyget E och till viss del även betyget A i årskurs 9 (Skolverket, 2019). Detsamma gäller för betyget E i matematik 1a, 1b och 1c. Dock krävs förmågan att lösa problem i mer komplexa situationer för att en elev ska kunna uppnå ett högre betyg i matematik 1b och 1c (Skolverket, 2011).

5.1.3 Elever och läroböcker

Där läroboken är dominant i undervisningen riskerar imitativ inläring att också bli dominant. Om detta också bidrar till förståelse kan examensarbetet inte avgöra då ingen analys av hur elever tar till sig och använder läroböckerna har genomförts. Hur elever responderar till läroböckernas informationsavsnitt kan alltså inte besvaras med detta examensarbete. Däremot kan detta examensarbete visa att representationerna i de undersökta läroböckerna förändras väldigt lite, alltså förändras i inte sättet som kunskapen förmedlas. Vidare ger inte läroböckerna förutsättningar för att elever ska kunna byta mellan olika representationsformer

eftersom böckerna i sig är enformiga och ofta saknar meningsskapande. Även detta liknar det resultat Ahl och Helenius (2020) presenterat. Att kunna växla mellan olika representationsformer är ett kunskapskrav för högre betyg i både årskurs 9 (Skolverket, 2019) och matematik 1a, 1b och 1c (Skolverket, 2011). Elever som vill uppnå ett högre betyg än E får alltså inte förutsättningar för detta med hjälp av läroböckernas informationsavsnitt.

5.1.4 Didaktiska konsekvenser

Lärare måste vara medvetna om vilka förutsättningar läroböcker ger och använda sin professionalitet i bedömning om läroböckernas lämplighet, fördelar och brister. Eftersom läroböcker står utanför statlig kontroll sätter det större tillit till att lärare använder läroböcker på ett sådant sätt att elever kan uppfylla alla kunskapskrav. Resultatet visar att förutsättningarna för att elever ska kunna utvecklas med hjälp av läroböckerna inte är tillräckligt goda då läroböckerna inte visar på en tydlig utveckling. I vissa fall kan det anses att läroböckerna backar i utvecklingen. Det krävs alltså någonting mer än en lärobok eller läroboksserie för att elever ska utveckla sin förståelse för tal i bråkform, både konceptuellt, procedurellt och för att lära sig se samband. Dessutom saknar läroböckerna undervisning om representationsformer. Detta kräver att lärare undervisar om representationerna och ger eleverna fler representationer än de som finns i läroboken. Om ett informationsavsnitt har ett situationsbaserat exempel så räcker det inte med att visa med symboler (tal) för att eleverna ska kunna utveckla en förståelse, det måste även finnas ikoner. Om då läroboken saknar ikoner måste läraren komplettera undervisningen med detta. Likaså om läroboken endast visar på en representation utan ett meningsskapande är det lärarens uppdrag att ge eleverna det meningsskapandet som saknas.

Eftersom procedurer är en vanlig funktion i läroböckerna kan lärare behöva ge eleverna sambanden och koncepten. Ingen lärobok tog tydligt upp vad som sker *matematiskt* när man förlänger ett tal. Att talet i själva verket multipliceras med ett var inget som tydligt framkom i läroböckerna. Det kunde däremot finnas implicita samband som att *talets värde inte förändras* när det förlängs. Frågan om eleverna försåt *sambandet* mellan att multiplicera ett tal i bråkform med samma tal i täljaren och nämnaren och talet ett kvarstår därför.

Vidare kan det diskuteras vad som händer med elever som ”ligger före klassen” och får jobba själva i boken. Dessa elever skulle kunna vara exempel på det nämnda extremfallet, att läroboken är deras största eller enda input för den matematiska kunskapen. Lärare har en skyldighet att även ge dessa elever förutsättningar att utvecklas och utifrån detta examensarbete kan jag konstatera att bara ge en lärobok för en annan årskurs inte nödvändigtvis ger förutsättningarna för att utvecklas, i alla fall inom tal i bråkform.

5.2 Metoddiskussion

En fråga som är värd att lyfta utifrån den valda metoden är kanske framför allt valet av läroböcker som analysenheter. Jag har konsekvent valt att kalla analysenheterna för *läroböcker* istället för *läromedel* då termen läromedel kan innefatta flera olika resurser som kan användas för undervisning. I de flesta läromedel ingår lärarhandledningar, extra övningsböcker samt digitala hjälpmedel. Att bara analysera läroböcker kan ha gett en skev bild då läroböckerna bara är en del av den tänkta undervisningen och kan bli lösryckta ur sitt sammanhang. Detta urval gjordes för att begränsa arbetets omfång så att det skulle få plats inom ramen för ett examensarbete. Dessutom kan valet att endast analysera läroböcker motiveras med hjälp av statistiken från Mullis med flera (2012) som visar på att det är

läroböcker som styr lärares undervisning, något som även bekräftas av Heikka (2015). Därför var det av intresse att studera just läroböckerna och inte tillhörande extramaterial.

Det kan även vara bra att uppmärksamma att den definition av utveckling som använts inte är den enda definitionen som finns. En annan teoretisk bakgrund och syn på utveckling hade kunnat ge ett annat resultat. I metoden har de tre funktionerna (koncept, procedur och samband) inte betraktats som utveckling. Utveckling har studerats utifrån representationerna inom de olika funktionerna. Ett annat perspektiv hade kanske kunnat inkludera funktionerna i utvecklingen. Koncept, procedur och samband skulle i ett annat perspektiv tydligare kunna bygga på varandra och diskutera utveckling utifrån informationsavsnittens funktioner istället för enbart representationer.

Den metod som använts kan anses vara statistiskt och ge ett onyanserat resultat. Resultatet kan därför ses som väldigt svart-vitt. En kvalitativ innehållsstudie hade istället kunnat ge ett mer nyanserat resultat och fått med gråskalorna i analysenheterna, något som den valda metoden inte kan göra. Även om metoden betraktas som en statisk metod kan ändå resultatet visa på att förståelsen för läroböcker behöver fördjupas. Examensarbetet har bidragit till den kumulativa kunskapsmassan eftersom metoden redan är prövad på andra läroböcker, jag har alltså kunnat fördjupa och till viss del utvecklat den studie som Ahl och Helenius (2020) gjort. Dessutom har examensarbetet bidragit till att öka förståelsen för vad som sker mellan olika stadier, något som har saknats enligt Fan med flera, (2013)

5.3 Vidare forskning

Detta examensarbete har endast undersökt två av många läroboksserier och det hade varit intressant att se om andra läroböcker hade gett liknande resultat. Det finns också ett behov av att studera läroböckerna djupare än vad som gjorts i denna analys och inkludera fler områden som grundar sig i tal i bråkform, exempelvis procent och sannolikhetslära. Som tidigare nämnts saknas det forskning på gränsöverskridande utveckling och studier som jämför läroböcker från olika länder så detta hade också varit intressant att studera vidare. Det finns även ett behov att studera andra matematiska områden än just tal i bråkform.

Eftersom läroböcker väljs och produceras utan statlig kontroll hade det också varit intressant att studera läroböcker i ljuset av det centrala innehållet och kunskapskraven. Framförallt eftersom utvecklingen av läroböckerna till vis del backar hade det varit intressant att studera om även den utveckling som antas finnas styrdokumentet backar. Det hade även varit intressant att se om de antaganden jag har gjort om att läroböckerna inte ger förutsättningar för elever att utvecklas faktiskt stämmer med verkligheten och göra studier med datainsamling på elevers förståelse och kunskapsutveckling i förhållande till läroböcker.

5.4 Slutsats

Jag har med detta examensarbete syftat till att öka kunskapen om hur tal i bråkform representeras i läroböcker och vill slutligen kortfattat besvara frågeställningarna.

- I. *Hur representeras tal i bråkform i olika läroböcker för årskurs 7, årskurs 9 och matematik 1a, 1b och 1c?* Det finns tre representationsformer som dominerar de undersökta läroböckerna. Dessa tre är de samma för alla läroböcker. Den absolut vanligaste representationen är med symboler (tal) utan någon form av förklaring eller meningsskapande till det matematiska området. Denna representation var dessutom

allra vanligast i de ”svårare” läroböckerna (Prio 9 och Matematik 5000 1c).

- II. *Vad fyller läroböckers teoridelar och exempel för funktion?* Den vanligaste funktionen är att förklara en procedur, alltså att visa på en metod. Informationsavsnitten (teoridelar och exempeluppgifter) syftar alltså till att ge elever en lösningsmetod som de kan applicera på kommande uppgifter. Det vanligaste sättet att förklara en procedur var, precis som den vanligaste representationen bara genom symboler utan förklaring eller meningsskapande till det matematiska innehållet.
- III. *Finns det förutsättningar för att elever ska kunna utveckla matematisk förståelse i eller mellan läroböcker?* Det enkla svaret är nej, jag kan inte identifiera att läroböckerna utvecklas tillräckligt mycket och drar alltså slutsatsen att elever inte heller utvecklas med hjälp av läroböckerna. I själva verket backar utvecklingen mellan årskurs 9 och matematik 1a och 1b och elever som studerar matematik 1c har inte fått förutsättningarna som krävs för att kunna använda de enformigt och symbolbaserade representationerna som dominerar Matematik 1c.

I resultatet diskuteras läroböcker och med detta menas de examensarbetets undersökta läroböcker. Eftersom studien bara studerat en bok för varje ”nivå” kan inte slutsatser för alla läroböcker som finns på marknaden dras. Däremot liknar resultatet tidigare forskning (Ahl & Helenius, 2020; Jäder, 2015) vilket leder till att jag kan anta att sannolikheten för att mitt resultat hade fått ett likande utfall även om jag undersökt andra läroböcker.

Matematiken är en vetenskap som har utvecklats under flera århundraden som elever idag ska lära sig på bara några år. Läroböckerna är organiserade och kan bidra till att strukturera den omfattande undervisningen och lärandet. Den kan även hjälpa lärare att spara ”dyr” planeringstid. Men det är viktigt som lärare att komma ihåg att läroböcker inte kan bidra med *all* undervisning och planering. Att producera en fulländad och ”perfekt” lärobok är nog näst intill omöjligt. Min handledare sa ofta till mig på min VFU ”*våga undervisa*” och det är kanske just det som behövs? Läroboken är ett av många verktyg som vi lärare kan ha i vår verktygslåda men jag tror det är viktigt att inte låta ett verktyg dominera undervisningen.

Referenser

- Ahl, L. M., & Helenius, O. (2020). A framework for analyzing progress in concept knowledge in mathematics textbooks. (*accepted*) NORMA20. Oslo: 2-5 juni 2020.
- Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2014a). *Matematik 5000 Kurs 1a Röd Lärobok Digital*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2014b). *Matematik 5000 Kurs 1c Blå Lärobok Digital*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2015). *Matematik 5000 Kurs 1b Grön Lärobok Digital*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Ball, D. (1993). Halves, Pieces, and Twoths: Constructing and Unsing Representational Contexts in Teaching Fractions. i T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of reasearch* (ss. 157-195). Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instructions*. Cambridge: Harvard University Press.
- Cederqvist, K., Larsson, S., & Gustafsson, P. (2014). *Prio matematik 9 (1. Uppl.)*. Stockholm: Sanoma Utbildning.
- Cederqvist, K., Larsson, S., Gustafsson, P., & Szabo, A. (2012). *Prio Matematik. 7 Grundbok. (1. uppl.) digital bok*. Stockholm: Sanoma utbildning.
- Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, ss. 64(3), 293-316 DOI: 10.1007/s10649-006-9036-2.
- Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2010). Tio sätt att göra bråk levande. *Nämnamnaren*, 2, 37-44.
- Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H., Towns, A., & Wängnerud, L. (2017). *Metodpraktikan: konsten att studera samhälle, individ och marknad. (Femte upplagan)*. Stockholm: Wolters Kluwer.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status. *ZDM Mathematics Education* , 45:633–646 DOI 10.1007/s11858-013-0539-x.
- Heikka, L. (2015). Matematiklärares målkommunikation: en jämförelse av elevernas uppfattningar, lärares beskrivningar och den realiserade undervisningen. *Lic. Avh* . Luleå: Luleå Tekniska Universitet.
- Johansson, M. (2006). Teaching Mathematics with Textbooks: A Classroom and Curricular Perspective. *Doctoral thesis*. Luleå: Luleå tekniska universitet.
- Jäder, J. (2015). Elevers möjligheter till lärande av matematiska resonemang. *Lic. Avh*. Linköping: Linköpings Universitet DOI: 10.3384/lic.diva-118094.
- Kara, F., & Incikabi, L. (2018). Sixth Grade Students' Skills of Using Multiple Representations in Addition and Subtraction Operations in Fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(4). 463-474 IDOI: 10.26822/iejee.2018438137.
- Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics* , 67.3; 255-76 DOI: 10.1007/s10649-007-9104-2.
- Löwing, M. (2016). Diamant - Diagnoser i matematik: Ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys. *Diss*. Göteborg: Göteborgs universitet.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok. (1. uppl.)*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning (NCM), Göteborgs universitet.

- Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- Nagy, C. (2017). Fler bråk i matematikundervisningen: En aktionsforskningsstudie där lärare lär om progression . *Lic.-Avh.* Göteborg: Göteborgs Universitet.
- Roos, H., & Trygg, L. (2018). Begrepp och representationer åk 7-9. *Modul: Matematik och specialpedagogik. Del 2: Begrepp och representationer*. Stockholm: Skolverket.
- Sjunnesson, J., Holmström, M., & Smedhamare, E. (2011). *Matematik 1c 1:a upplagan*. Stockholm: Liber AB.
- Skolverket. (2011). Matematik. [Ämnesplan]. Hämtad 2020-11-04 från <https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92>.
- Skolverket. (2019). Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2019. Stockholm: Skolverket.
- Sveider, C. (2016). Lärare och elevers användande av laborativt material i bråkundervisning i skolår 4-6: Vad görs möjligt för eleverna att erfara . *Lic. Avh.* Linköping: Linköpings universitet DOI: 10.3384/lic.diva-125924.
- Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167–181 DOI: 10.1016/S0364-0213(99)80057-3.
- Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, 52(2), 83-94 DOI: 10.1159/000202727.
- Vetenskapsrådet. (2020). *vr.se*. Hämtat från Hämtad 2020-11-11: <https://www.vr.se/uppdrag/etik/etik-i-forskningen.html>

Bilaga 1: Sammanställning av studiens tillhandahållna läroböcker

Titel	Författare	År	Förlag	Ingår i analysen	Tillhandahålls genom
Prio matematik 7	Cederqvist. K, Larsson. S, Gustafsson. P, Szabo. A	2012	Sanoma utbildning	Ja	Sanoma utbildning
Prio Matematik 9	Cederqvist. K, Larsson. S, Gustafsson. P	2014	Sanoma utbildning	Ja	Sanoma Utbildning
Matematik 5000 (1a blå bok)	Alfredsson, L, Erixon. P, Heikne. H	2011	Natur & Kultur	Ja	Natur & Kultur
Matematik 5000 (1b grön bok)	Alfredsson, L, Bråting. K, Erixon. P, Heikne. H	2011	Natur & Kultur	Ja	Natur & Kultur
Matematik 5000 (1c blå bok)	Alfredsson, L, Bråting. K, Erixon. P, Heikne. H	2011	Natur& Kultur	Ja	Natur & kultur
Formula 9	Mårtensson. G, Sjöström. B, Svensson, P	2014	Gleerups	Nej	Simon Wernersson
Matematik Z	Undvall. L, Johnson. K, Welén. C	2019	Liber	Nej	Liber
Matematikboken Z	Undvall. L, Johnson. K, Welén. C	2013	Liber	Nej	Simon Wernersson
Matte Direkt 9	Carlsson. S, Hake. K.B, Öberg. B	2018	Sanoma utbildning	Nej	Sanoma Utbildning
Matte Direkt 9	Carlsson. S, Hake. K.B, Öberg. B	2011	Sanoma Utbildning	Nej	Simon Wernersson
Mondo 7	Gustafson, L., Nyhlén Johansson, O., Persson, J	2017	Gleerups	Nej	Simon Wernersson
Mondo 8	Gustafson, L., Nyhlén Johansson, O., Persson, J	2017	Gleerups	Nej	Simon Wernersson
Mondo 9	Gustafson. L, Nyhlén Johansson. O, Persson. J	2017	Gleerups	Nej	Simon Wernersson
Matematik 1a	Holmström. M, Sjunnesson. J, Smedhamare. E	2011	Liber	Nej	Ulrica Dahlberg
Matematik 1b	Holmström. M, Sjunnesson. J, Smedhamare. E	2011	Liber	Nej	Ulrica Dahlberg
Matematik 1c	Sjunnesson. J, Holmström. M, Smedhamare. E	2011	Liber	Nej	Ulrica Dahlberg

Bilaga 2: Detaljerad sammanställning av resultat

Resultat sorterat efter årskurs eller matematikkurs som läroböckerna var ämnade till.

Årskurs	Matematiskt innehåll	Koncept	Procedur	Samband	kommentar
7	Bråkform*	 $\rightarrow \pi$			
	Andel*	$\heartsuit \rightarrow \pi$			
	Blandad form*	 $\heartsuit \rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$	
	Tal i bråkform på tallinjen	$\heartsuit \rightarrow \pi$		$\rightarrow \pi$	
	Skriva på bråkform		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Skriva på bråkform		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Jämföra tal i bråkform samma nämnare*	$\heartsuit \rightarrow \pi$			
	Jämföra tal i bråkform samma täljare*	$\heartsuit \rightarrow \pi$			
	Jämföra tal i bråkform olika nämnare och täljare *	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		
	Bråktal större eller mindre än 1		$\rightarrow \pi$		
	Likvärdiga bråk *	$\heartsuit \rightarrow \pi$			
	Förlänga bråk *	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		
	Förkorta bråk *	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		
	Enklaste form *	$\rightarrow \pi$			
	Förkorta och förlänga bråk		$\rightarrow \pi$		
	Förkokta bråk		$\rightarrow \pi$		
	Addition och subtraktion av bråk*		 $\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Gemensam nämnare	$\heartsuit \rightarrow \pi$			
	Addition av bråk		 $\heartsuit \rightarrow \pi$		Samma nämnare
	Subtraktion av bråk		$\rightarrow \pi$		Olika nämnare
	Addition av bråk		$\rightarrow \pi$		Olika nämnare
	Multiplikation med bråk*		 $\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	Med heltal
	Multiplikation med bråk*	$\rightarrow \pi$	 $\pi \rightarrow \heartsuit$	$\rightarrow \pi$	Med bråk
	Multiplikation med bråk		 $\rightarrow \pi$		Med heltal
	Multiplikation med bråk		 $\heartsuit \rightarrow \pi$		Med heltal
	Multiplikation med bråk	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		Med bråk
	Andel*	$\rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
	Bråk i procentform		$\rightarrow \pi$		
	Decimaltal i procentform		$\rightarrow \pi$		
	Beräkna procent	 $\rightarrow \pi$			
	Förändring i procent*	 $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		Ökning
	Förändring i procent	 $\rightarrow \pi$			Minskning
	Procent, decimalform och bråkform*			$\rightarrow \pi$	
	Beräkna procent med huvudräkning		 $\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
	Beräkna ökning		 $\rightarrow \pi$		
	Beräkna det hela*		 $\rightarrow \pi$		
	Beräkna det hela		$\rightarrow \pi$		
9	Förlänga*	 $\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		
	Förkorta*	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		
	Enklaste form*	$\rightarrow \pi$			
	Blandad form *		$\rightarrow \pi$		
	Förenkla bråk		$\rightarrow \pi$		
	Jämföra bråk		$\rightarrow \pi$		Samma täljare
	Jämföra bråk		$\rightarrow \pi$		Samma nämnare
	Jämföra bråk		$\rightarrow \pi$		Olika täljare och nämnare

	Matematiskt område	Koncept	Procedur	Samband	Kommentar
9	Beräkningar med bråk*	$\rightarrow \pi$			Addition och subtraktion
	Addition med bråk		$\rightarrow \pi$		Samma nämnare
	Addition med bråk		$\rightarrow \pi$		Olika täljare och nämnare
	Subtraktion med bråk		$\rightarrow \pi$		Olika nämnare
	Förenkla bråk		$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	Bråk med variabler
	Multiplikation med bråk*	$\odot \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
	Multiplikation med bråk*	$\odot \rightarrow \pi$	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	Multiplikation med två bråk
	Multiplikation med bråk		$\odot \rightarrow \pi$		Multiplikation med heltal
	Multiplikation med bråk		$\rightarrow \pi$		Två bråk multiplicerade med varandra
	Förenkla bråk		$\rightarrow \pi$		
	Division med bråk*	$\odot \heartsuit \rightarrow \pi$			
	Inverterat tal*	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	
	Division med bråk		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Division med bråk		$\odot \rightarrow \pi$		
	Jämföra bråk		$\rightarrow \pi$		
	Addition med bråk		$\rightarrow \pi$		Samma nämnare
	Subtraktion med bråk		$\rightarrow \pi$		Olika nämnare
	Subtraktion med bråk		$\rightarrow \pi$		Blandad form
	Multiplikation med bråk		$\rightarrow \pi$		Olika nämnare
	Division med bråk		$\rightarrow \pi$		
1a	Andel*	$\odot \pi \rightarrow \heartsuit$	$\odot \pi \rightarrow \heartsuit$	$\rightarrow \pi$	
	Jämföra bråk			$\heartsuit \rightarrow \pi$	
	Andel		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Förlängning*	$\heartsuit \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$		
	Förkortning*		$\rightarrow \pi$		
	Förhållande*	$\rightarrow \pi$	$\odot \rightarrow \pi$		
	Förläng		$\rightarrow \pi$		
	Förkorta		$\rightarrow \pi$		
	Förhållande		$\odot \rightarrow \pi$		
	Jämföra bråk genom förlängning		$\rightarrow \pi$		
	Addition av bråk*	$\odot \rightarrow \heartsuit$	$\heartsuit \rightarrow \pi$		Samma nämnare
	Multiplikation av bråk*		$\rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	Med heltal
	Multiplikation av bråk*		$\odot \rightarrow \pi$		Med heltal
	Subtraktion av bråk		$\rightarrow \pi$		Samma nämnare
	Bråkform till blandad form		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Blandad form till bråkform		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Multiplikation av bråk		$\rightarrow \pi$		Med heltal
1b	Andel*	$\odot \pi \rightarrow \heartsuit$		$\rightarrow \pi$	
	Andel		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Förlängning och förkortning *	$\pi \rightarrow \heartsuit$	$\pi \rightarrow \heartsuit$		Jämför med 1a.
	Förhållande*	$\rightarrow \pi$	$\odot \rightarrow \pi$		
	Jämföra bråk genom förlängning		$\rightarrow \pi$		
	Förhållande		$\odot \rightarrow \pi$		
	Addition av bråk*		$\heartsuit \rightarrow \pi$		Samma nämnare
	Addition av bråk*	$\odot \rightarrow \heartsuit$	$\heartsuit \rightarrow \pi$		Olika nämnare
	Räkna med bråk, addition och subtraktion	$\odot \rightarrow \heartsuit$	$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Subtraktion av bråk		$\heartsuit \rightarrow \pi$		Samma nämnare
	Bråkform till blandad form		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Blandad form till bråkform		$\heartsuit \rightarrow \pi$		
	Addition av bråk		$\rightarrow \pi$		Olika nämnare
	Subtraktion av bråk		$\rightarrow \pi$		Olika nämnare
	Andel		$\odot \rightarrow \pi$	$\rightarrow \pi$	

	Matematiskt område	Koncept	Procedur	Samband	Kommentar
1b	Multiplikation av bråk*	♥ → π	😊 → π		Med heltal
	Multiplikation av bråk*	♥ → π	♥ → π	→ π	Med bråk
	Multiplikation av två bråk	♥ → π	→ π		
	Multiplikation av bråk		→ π		Med heltal
	Multiplikation av två bråk		→ π		Med bråk
	Division av bråk*	😊 → π	♥ → π		
	Inverterat tal*	→ π		→ π	
	Division		→ π	→ π	Både med bråk och heltal
1c	Rationella tal*	♥ → π		→ π	
	Förlängning och förkortning*	♥ → π	♥ → π		
	Förhållande		😊 → π		
	Förhållande		😊 → π		
	Taluppfattning		→ π		
	Jämföra bråk		→ π	→ π	
	Bråk och taluppfattning		→ π		Anges bara räkneregler
	Addition och subtraktion med bråk*	→ π	→ π		
	Multiplikation*			→ π	
	Inverterat tal *	→ π		→ π	
	Division med två bråk*	→ π		→ π	Förklarar varför det går att multiplicera med inversen
	Addition och subtraktion med bråk		→ π		Samma nämnare
	Addition och subtraktion med bråk		→ π	→ π	Olika nämnare
	Multiplikation av bråk		→ π	→ π	Med heltal
	Multiplikation av bråk		→ π		Med bråk
	Division med bråk		→ π		

* Material hämtat från teoridel