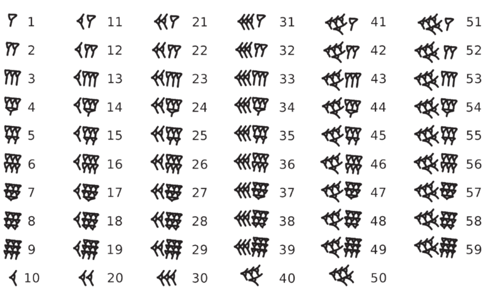
Problem med olika baser

Med tio siffror kan vi skapa oändligt många tal. Men om vi bara har två siffror, 0 och 1, hur många tal kan vi då skapa? Kan vi ha fler än tio siffror i ett talsystem? Hur omvandlar vi mellan två olika talsystem? Fungerar vanlig aritmetik även i andra talsystem än decimalsystemet? Frågorna är vanliga när elever arbetar med positionssystem och talbaser. En lärarstudenten har löst följande problem tillsammans med högstadieelever.

4348 *Det sexagesimala talsystemet*

Det sexagesimala talsystemet är ett talsystem med bas sextio som utvecklades och användes av Babylonierna 2000–1600 f Kr. Följande bild visar hur man översätter mellan babyloniska tecken och tal i det decimala systemet.



Vilket tal i decimalsystemet motsvarar följande babyloniska tecken?

4349 *Addition med binära tal*

I det binära systemet, med basen 2, är inte additionen $1+1=2$ utan $1+1=10$. Anledningen är samma som när man adderar $5+5$ i det decimala systemet, talpositionen är full och vi behöver därför ”låna” en enhet från den högre positionen, nämligen tiotalspositionen.

Beräkna $1110_{\text{TVÅ}}+111_{\text{TVÅ}}$

4350 *Multiplikation med binära tal*

Ett viktigt mönster som vi tidigare har lärt oss är hur man multiplicerar med 1, 10, 100 etc, exempelvis $32\cdot 1=32$, $32\cdot 10=320$, $32\cdot 100=3\,200$. Samma mönster ser vi i övriga talbaser, som i det binära talsystemet: $10\cdot 1=10$, $10\cdot 10=100$, $10\cdot 100=1\,000$. Detta mönster har betydelse vid multiplikation med två binära tal.

Beräkna $101\cdot 11$ i talbasen 2.

4351 *Kommatecknet i binära tal*

Om vi separerar siffror i talet 11,11 i det decimala talsystemet, har vi ett tiotal, ett ental, ett tiondelstal och ett hundradelstal.

Omvandla $11{,}11_{\text{TVÅ}}$ till motsvarande tal i talbasen 10.

4352 *I vilken bas?*

Att $1+1=10$ har vi nämnt i en tidigare uppgift och beräkningen är riktig i talbasen 2, men

… i vilken bas är beräkningen $15+16=32$ riktig?

… i vilken bas är beräkningen $123+132=321$ riktig?

4353 *Vissa speciella beräkningar*

Det finns beräkningar som blir lika fast de beräknas i olika baser. I problem 4352 såg vi exempel på sådana beräkningar. Till exempel är beräkningen $11\cdot 10=110$ sann i både bas 2 och bas 10.

Kan du hitta en annan beräkning som inte är en multiplikation och som är riktig i två olika talbaser?

Svar och förslag på lösningar

4348 Rätt svar: 4235
Omvandla tre tecken till tal: 1 10 35

Nu måste vi ta hänsyn till att de här talen skrevs i talbasen 60. Detta innebär att de tre positionerna (från vänster till höger) motsvarar 3600-tal, 60-tal och 1-tal.

Omvandla till det motsvarande talet i det decimala systemet: $1 \cdot 3600 + 10 \cdot 60 + 35 = 4235$.

4349 Rätt svar: $10101_{\text{TVÅ}}$

Addera 1-talen: $0 + 1 = 1$
Addera 2-talen: $10 + 10 = 100$
Addera 4-talen: $100 + 100 = 1000$
Addera 8-talen: $1000 + 0 = 1000$
Addera resultat i alla positioner
$1000 + 1000 + 100 + 1 = 10000 + 100 + 1 = 10101$.

4350 Rätt svar: $1111_{\text{TVÅ}}$

$101 \cdot 11 = 101 \cdot (10 + 1) = 101 \cdot 10 + 101 \cdot 1$

Med hjälp av mönstret kan vi direkt beräkna multiplikationerna med 10 och 1 och skriva beräkningen $1010 + 101$.

Använd proceduren i problem 4349, så har vi resultatet $1010 + 101 = 1111$.

4351 Rätt svar: 3,75
Talet $11{,}11_{\text{TVÅ}}$ består av fyra positioner, nämligen (från vänster till höger) 2-tal, 1-tal, ½-tal och ¼-tal. Omvandla till decimalsystemet:

$1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} = 3{,}75$

4352 Rätt svar: bas 9 respektive bas 4
Antag att x är basen som vi använder. x är ett heltal, $x > 1$, och siffrorna är mindre än x.

Beräkningen $15 + 16 = 32$ i bas x betyder att
$1 \cdot x^1 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot x^1 + 6 \cdot 1 = 3 \cdot x^1 + 2$
$2x + 11 = 3x + 2$
Lös denna förstagradsekvation, $x=9$.

Beräkningen $123 + 132 = 321$ i bas x betyder
$1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^1 + 3 + 1 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2 = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$
$x^2 + 2x + 3 + x^2 + 3x + 2 = 3x^2 + 2x + 1$
Lös denna andragradsekvation,
$x = -1$ eller $x = 4$
För att dubbelkolla med villkoren, sätt $x = 4$.

4353 Rätt svar: Exempelvis $\sqrt{100} = 10$
Ett av många exempel är roten ur 100, $\sqrt{100} = 10$. Beräkningen är riktig i båda bas 2 och bas 10.

Công Võ

Gundrun Malmers stipendium

Arbetar du inom förskola, grundskola, gymnasium eller vuxenutbildning? Vill du bedriva forskningsbaserade projekt som bidrar till matematikundervisningens utveckling? Då kan du söka stipendium ur Gudrun Malmers stiftelse. Du ansöker om stipendium genom att presentera din projektidé för stiftelsen. I första hand prioriterar Gudrun Malmers stiftelse projekt som försöker stimulera elevcentrerat arbetssätt och där andra anslag inte kan fås.

I år behandlas ansökningar vid två tillfällen. Sista ansökningsdagen är 16 mars 2020 respektive 2 november 2020.

Frågor om Gudrun Malmers stiftelse och stipendierna kan ställas till
Peter Bengtsson: peter.bengtsson@mah.se