

Tankar från marginalen

Marginalen som nämns i rubriken ska föra tankarna till *Fermats stora sats*. Här tar artikelförfattaren oss med på ett resonemang genom ett liknande men något enklare samband.

Historien om hur Fermat på 1630-talet i en marginalanteckning angav att han hade ett vackert bevis för en utsaga, men att marginalen tyvärr var för smal för att rymma beviset, är berömd. Utsagan var den som numera är känd som *Fermats stora sats*. Den säger att ekvationen $a^n = b^n + c^n$ saknar heltalslösningar för $n > 2$.

Mycket intressant, men tyvärr, det ligger utanför ramen för denna tidskrift att bevisa denna sats – även denna marginal är för smal. Ett liknande men lite enklare samband kan dock erbjudas. Att en ekvation saknar lösningar är en smula otillfredsställande, så istället tittar vi på en ekvation med oändligt många heltalslösningar:

$$a^n = b^2 - c^2$$

Vi inleder med ett specialfall:

$$a^3 = b^2 - c^2$$

En heltalskub kan alltid skrivas som en differens av två kvadrater. Senare ska vi också betrakta den mer avancerade ekvationen med en summa i högerledet.

Att prova sig fram och ställa en hypotes

Det är bra med uppgifter som kan lösas på olika nivåer. Vissa elever tar fram räknaren och letar en stund. Kanske finner de följande samband:

$$7^3 = 28^2 - 21^2$$

och möjligen får man här ge lite vägledning:

$$7^3 = (7 \cdot 4)^2 - (7 \cdot 3)^2$$

Sista hindret för att upptäcka eventuella strukturer är att andra faktorn i var term behöver skrivas om:

$$7^3 = \left(\frac{7 \cdot 8}{2}\right)^2 - \left(\frac{7 \cdot 6}{2}\right)^2$$

Här skimtar ett mönster och det är därmed dags för en hypotes. Kanske får man följande förslag på hur talen b och c är konstruerade:

$$b = \frac{a(a+1)}{2} \quad c = \frac{a(a-1)}{2}$$

Det naturliga steget blir därpå att försöka bevisa hypotesen:

$$\text{HL} = b^2 - c^2 = \left[\frac{a(a+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{a(a-1)}{2} \right]^2 = \frac{4a^3}{4} = a^3 = \text{VL}$$

För exempelvis talet 1000 som är en heltalskub, ger vårt nyfunna samband:

$$10^3 = \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 - \left(\frac{10 \cdot 9}{2} \right)^2 = (5 \cdot 11)^2 - (5 \cdot 9)^2 = 55^2 - 45^2$$

Här kan man passa på att nämna konjugatregeln:

$$55^2 - 45^2 = (55 - 45)(55 + 45) = 10 \cdot 100 = 1000$$

En följdfråga är: Kan vi vara säkra på att talen $b = a(a+1)/2$ och $c = a(a-1)/2$ alltid är heltal när de båda innehåller en faktor 2 i nämnaren?

Angreppssättet varierar

Andra vill kanske inte formulera en hypotes, utan hellre bara räkna på. Ett sätt är att skriva kuben på formen $a^3 = aa^2$. Vi ser då att:

$$aa^2 = b^2 - c^2 = (b-c)(b+c) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = b-c \\ a^2 = b+c \end{cases}$$

Identifikation
av faktorer

Ledvis addition respektive subtraktion ger samma uttryckt för b och c som ovan:

$$b = \frac{a^2 + a}{2} = \frac{a(a+1)}{2} \qquad c = \frac{a^2 - a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$$

Eleverna har därmed påvisat *existensen* av en kvadratdifferens, och då återstår att visa *entydigheten*. Denna del av problemet kanske passar andra elever och för dem följer här några rader.

Mer allmänt samband

Om man tar ett tal i kubik och primtalsfaktorerar, så ser man att talet kan skrivas som en produkt av två faktorer på mer än ett sätt, till exempel:

$$\begin{aligned} 6^3 = (2 \cdot 3)^3 &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 216 = 2 \cdot 108 = 3 \cdot 72 = 4 \cdot 54 \\ &= 6 \cdot 36 = 9 \cdot 24 = 8 \cdot 27 = 12 \cdot 18 \end{aligned}$$

Vi anar att detta blir flertydigt och skriver därför a^3 som en produkt av två allmänna faktorer n och k :

$$nk = a^3 = b^2 - c^2 = (b-c)(b+c)$$

Med samma identifikation av faktorer som tidigare ger det:

$$b = \frac{k+n}{2} \qquad c = \frac{k-n}{2}$$

Några elevuppgifter:

- ♦ Visa först att antingen är både k och n jämna tal eller så är båda udda, för annars blir varken b eller c heltal. Ange därefter alla de kvadratdifferenser som finns dolda i 6^3 .
- ♦ Hur blir det om a är ett primtal?

Mot högre höjder

Utifrån kubekvationen går man sen vidare upp till fjärdepotenserna osv. Man inser snart att man lika gärna kan ta sig an det allmänna fallet en gång för alla:

$$a^n = b^2 - c^2$$

Vi gör här en av flera tänkbara faktoriseringar av potensen:

$$aa^{n-1} = a^n = b^2 - c^2 = (b-c)(b+c)$$

Samma gamla identifikation ger:

$$b = \frac{a(a^{n-2}+1)}{2} \quad c = \frac{a(a^{n-2}-1)}{2}$$

Ett exempel: $7^5 = 1204^2 - 1197^2$

Att $a^n = a^2 a^{n-2}$ osv, visar att inte heller detta är entydigt. Ger man sig på den generella faktoriseringen, $a^k a^{n-k}$, finner man samtliga differenser. Värt att här notera är att vi hela tiden har utgått från potensen. Det motsatta gäller inte – en kvadratdifferens kan inte alltid skrivas på formen a^n . Låt oss därför titta lite närmare på talen som sådana.

Gå inte över ån efter vatten

Att ett udda tal alltid kan skrivas som en kvadratdifferens kan man finna utan att gå denna omväg runt potenserna. Man delar upp talet i två termer så att dessa får en enhets skillnad, vilket alltid är möjligt:

$$35 = 18 + 17$$

Att multiplicera ett tal med 1 förändrar inte talets värde, $35 = (18 + 17) \cdot 1$. Från konjugatregeln följer nu de udda talens kvadrater:

$$35 = (18 + 17)(18 - 17) = 18^2 - 17^2$$

eller om man hellre vill: $18 + 17 = 18^2 - 17^2$ som också alltid stämmer så klart.

Hälften av alla jämna tal

Kan det vara så att *alla* heltal kan skrivas som en kvadratdifferens? Nej, men alla udda tal och "hälften" av alla jämna. Vi har konstaterat att k och n måste antingen vara jämna båda två, eller udda båda två. Då kan inte ett heltal innehålla *en* tvåa, för då blir bara en av k eller n jämnt. Så om vi multiplicerar udda med 2, får vi alla tal som *inte* kan skrivas som en kvadratdifferens:

$$2(2m+1) = 4m+2 \quad \Rightarrow \quad 2, 6, 10, 14, \dots$$

Då återstår resten, det vill säga alla udda tal och alla tal delbara med 4:

De udda talen	Fyrans tabell
...	...
$13 = 7^2 - 6^2$	$20 = 6^2 - 4^2$
$15 = 8^2 - 7^2$	$24 = 7^2 - 5^2$
↓	↓
∞	∞

På sidan 52 fann vi att talet 1000 kan skrivas med två kvadrater. Nu vet vi att även 999 går bra, likaså 1001 och 1003 och 1004 men inte 1002. Efter att ha vandrat runt och botaniserat ett tag bland potenser och annat, har vi funnit, ungefär som Pippi, att det mesta fanns där vid grindstolpen hela tiden.

Över till summan

Då konjugatregeln inte kommer oss till hjälp vid en summa, kan man kanske tro att problemet är oöverstigligt. Men så är inte fallet. Vi inleder med en kub och förenklar i första vändan genom att sätta $b = a$ så att vi får: $a^3 = a^2 + c^2$.

Med räknaren i hand kan man sitta och prova en stund och kanske finner man att åtminstone *en* kub kan skrivas som en kvadratsumma: $10^3 = 10^2 + 30^2$. För att mer allmänt se hur talet c är konstruerat, löser vi ut c ur ekvationen:

$$c^2 = a^3 - a^2 \quad \Rightarrow \quad c = a\sqrt{a-1}$$

Det framgår att c blir ett heltal om $a-1$ är ett kvadrattal. Vi gör en tabell:

$a-1$	a	$c = a\sqrt{a-1}$	$a^3 = a^2 + c^2$
...			
25	26	130	$26^3 = 26^2 + 130^2$
49	50	350	$50^3 = 50^2 + 350^2$
...			

Innan vi tar oss vidare på huvudspåret med de två kvadraterna i högerledet, ser vi från detta specialfall en annan väg att följa: $a^n = a^{n-1} + c^2$. Samma hantering som ovan ger: $5^{13} = 5^{12} + 31250^2$

Återanvändning

För att lösa den mest intressanta delen i denna förenklade version av Fermats stora sats, $a^n = b^2 + c^2$, börjar vi med att betrakta följande samband:

$$(m^2 + k^2)(x^2 + y^2) = (my + kx)^2 + (mx - ky)^2 \quad (*)$$

Detta är en trevlig identitet då den har en produkt till vänster och en kvadratsumma till höger. Detta pekar fram mot en iterativ lösning på vårt problem. Vi väljer fritt några värden på m och k med $m > k$. Dessa förblir sedan konstanta.

$$m=3 \quad k=2 \quad 3^2 + 2^2 = 13$$

Nu väljer vi samma värden även på x och y så att vi får två faktorer som är 13.

$$13^2 = (3^2 + 2^2)(3^2 + 2^2) = (3 \cdot 2 + 2 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 = 12^2 + 5^2$$

↑
Enligt (*)

Eftersom $13^2 = 12^2 + 5^2$ sätter vi nu in $x=12$ och $y=5$ i vår ekvation (*).

$$13^3 = (3^2 + 2^2)(12^2 + 5^2) = (3 \cdot 5 + 2 \cdot 12)^2 + (3 \cdot 12 - 2 \cdot 5)^2 = 39^2 + 26^2$$

Nu sätter vi in $x=39$ och $y=26$. Och på denna väg fortsätter vi – iterativt – genom att stoppa in de nya x - och y -värdena allteftersom de kommer:

$$13^4 = 156^2 + 65^2$$

$$13^5 = 507^2 + 338^2$$

↓
∞

Nackdelen med detta är det monotona sifferräkandet. Därför försöker vi nu formalisera denna *algoritm*, så att datorn kan utföra beräkningarna.

En gammal trotjänare duger

Följande program är skrivet i en T-83:a. Det kan naturligtvis förbättras både i sin kod och vad gäller finesser. Det väsentliga i programmet är utnyttjandet av högerledet i (*), och så while-satsen som ser till att maskinen tuggar runt i (*) så länge som man önskar.

Användaren ska här välja två heltal M och K , där $M > K$ för att slippa negativa värden. Dessa utgör delar i vårt tal a enligt $a = M^2 + K^2$. I körningen nedan har användaren valt: $M=7$ $K=2$ $N=11$.

```

PROGRAM: KVADSUM
: Input "ANGE ETT HELLTAL: ", M
: Input "ANGE ETT HELLTAL: ", K
: Input "ANGE EXPONENT: ", N
:
: M → X
: K → Y
: 2 → T
:
: While T ≤ N
:   MY + KX → B
:   MX - KY → C
:   Disp B
:   Disp C
:   Disp ""
:   B → X
:   C → Y
:   T + 1 → T
: End
        
```

Precis som med pennan nyss, får X och Y samma värde som M och K.

En intern variabel T får startvärdet 2.

Så länge T inte är större än N, utförs dessa två beräkningar om och om igen. Värdena lagras i B och C och skrivs ut efter varje loop.

X och Y får tillbaka uppdaterade värden.

T ökas på med 1 så att loopen tar ett steg framåt.

HL i (*) levererar {

Det som syns i fönstret är slutet på tio stycken talpar med följande tolkning:

$$53^{10} = 220933468^2 + 355071645^2$$

$$53^{11} = 2927368451^2 + 836390986^2$$

Till sist ett trevligt specialfall: om man väljer att sätta $N=2$ får man för olika värden på M och K en känd klassiker utan några luckor varken bland de primitiva eller deras multiplar.