Britt Holmberg & Cecilia Kilhamn

Algebra på dubbel tallinje

Författarna visar hur tallinjen kan användas för att visualisera algebraiska uttryck och fungera som en modell för ekvationer och ekvationslösning. Artikeln inleds med hur enkla algebraiska uttryck kan representeras som avstånd på tallinjen i årskurs 5 och avslutas med att visa hur tallinjen kan användas för att lösa ekvationer med negativa tal.

I tre tidigare artiklar har vi beskrivit tallinjen som ett didaktiskt redskap, samt hur tallinjen kan användas som en modell för addition och subtraktion med såväl heltal som bråk. Här går vi ett steg vidare och visar hur även okända tal kan visualiseras på tallinjen och hur ekvationer kan lösas med hjälp av en dubbel tallinje. Tallinjen fungerar därmed som en ingång till algebra.

I boken *Unga matematiker i arbete – algebra* beskriver Catherine Twomey Fosnot och William Jacob hur matematiska modeller som till exempel tallinjen kan betraktas som mentala kartor över samband, och hur dessa kan hjälpa oss att förstå och symbolisera vår värld. Fosnot och Jacobs forskning visar att den dubbla tallinjen kan vara ett kraftfullt hjälpmedel när elever utvecklar kunskaper i algebra.

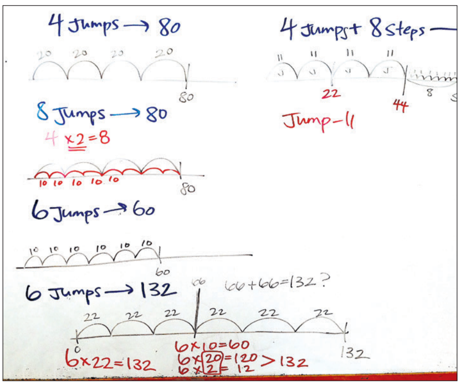
Ett tal kan visualiseras på olika sätt på tallinjen, antingen som en *punkt* eller som ett avstånd. När talet visualiseras som en punkt får talet sitt värde av hur det är placerat i relation till andra tal på tallinjen, där talen 0 och 1 utgör de viktigaste referenspunkterna. När talet visualiseras som ett *avstånd* får det sitt värde i jämförelse med andra avstånd. I den här artikeln ska vi visa hur obekanta tal kan vara både avstånd och punkter, och hur dessa olika representationer av tal kan användas för att utveckla förståelse för algebraiska uttryck och ekvationer.

Okända tal som avstånd på tallinjen

Vi börjar med att beskriva en lektion för att skapa en kontext kring algebraiska uttryck på tallinjen. Lektionen som beskrivs genomfördes när Kara Imm från Mathematics in the City i New York var på besök i Göteborg. Tillsammans med elever i årskurs 5 utforskade Kara olika sätt att representera hopp och steg på en öppen tallinje och gjorde jämförelser genom att utnyttja en dubbel tallinje. Kara genomförde en lektion, som trots att den hölls på engelska fungerade utmärkt med eleverna. Kara var mycket imponerad av svenska elevers kunskaper i engelska – och matematiken är ju universell.

Uppgifterna som vi ska beskriva tog avstamp i en realistisk kontext som eleverna får undersöka och matematisera utifrån. Att kontexten är realistisk innebär att det är en situation som eleverna kan föreställa sig och engagera sig i, snarare än att den är direkt hämtad från verkligheten. Kara bad eleverna tänka på ett djur som kan hoppa. En gemensam förutsättning var att djuret antogs kunna göra hopp och gå steg, och att alla hopp respektive steg som ett visst djur gjorde alltid var lika långa. När alla hade fått kontexten klar för sig och kunde tänka på 'sitt' djur genomförde de tillsammans en serie sammanlänkade uppgifter, en så kallad 'string'.

Uppgifterna fokuserar på det matematiska innehållet och leder fram till ett problem som eleverna sedan ska arbeta med i mindre grupper. I en string är den första uppgiften enkel att lösa och de övriga uppgifterna är sammanlänkade så att svårighetsgraden ökar samtidigt som den matematiska idén som finns inbäddad blir allt tydligare. Kara använde en öppen tallinje för att visualisera elevernas lösningsförslag på tavlan. Allteftersom uppgifterna löstes fylldes tavlan med bilder av tallinjer som eleverna kunde relatera till och senare använda för att lösa huvudproblemet. Tallinjen är till för att ge eleverna en modell att tänka med. En uppgift i taget löstes gemensamt och representationen diskuterades tills alla var överens. Bilden visar tavlan efter att alla fem uppgifterna i serien var lösta.



Detta är en inledande serie sammanlänkade uppgifter. Frågan är varje gång: Hur långa är hoppen?

En groda gör 4 hopp och landar på 80.
En groda gör 8 hopp och landar på 80.
En groda gör 6 hopp och landar på 60.
En groda gör 6 hopp och landar på 132.
En groda gör 4 hopp, går 8 steg och landar på 52.

Den sista uppgiften i serien är mer utmanade genom att både hopp och steg blandas. Eleverna kom fram till att de fyra hoppen måste landa 8 steg före 52, alltså på 44. Om sedan 44 delas in i fyra lika långa hopp måste varje hopp vara 11 steg. Hela tankegången ritades på tallinjen och skrevs också med siffror för att alla elever skulle ha möjlighet att följa uträkningarna under diskussionen.

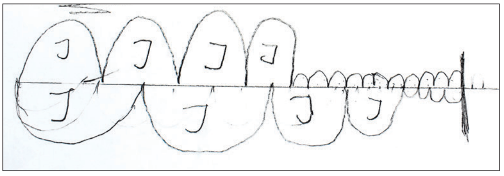
I den beskrivna lektionen representeras det okända talet av ett hopp på tallinjen. Tillsammans med enhetssteg kan därför uttryck som $4x+3$ och $3x-6$ kontextualiseras som hopp och steg och därmed representeras och jämföras.

Grodhoppstävlingen

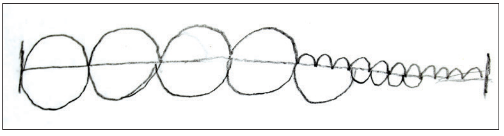
Lektionen fortsatte med ett problem hämtad ur *The California frog-jumping contest* där olika grodor tävlar mot varandra. Problemet handlar om att avgöra vem som vinner och hur långt de hoppar. I Nämnarenartikeln *Grodhopp – algebra i femte klass* har Kirsti Tangen mer i detalj beskrivit hur elever i Norge arbetar med dessa uppgifter.

Det problem Kara gav eleverna handlade om grodan Sunny som hoppade vid två olika tillfällen: ena gången 4 hopp och 11 steg och andra gången 5 hopp och 4 steg. Båda gångerna landade han på samma plats. Elevernas uppgift var att rita hoppen och stegen på tallinjen och bestämma var på tallinjen grodan landade till slut och hur långa hoppen var. Uppgiften och valet av tal syftade till att ge eleverna möjligheter att upptäcka att algebraiska uttryck som ser olika ut ändå kan betraktas som lika om de representerar samma värde. De är ekvivalenta representationer av samma resultat trots att vägen till resultatet är olika. Sunnys hopp kan beskrivas symboliskt med uttrycken $4x + 11$ respektive $5x + 4$, vilka båda landar på samma ställe. Alltså är $4x + 11 = 5x + 4$.

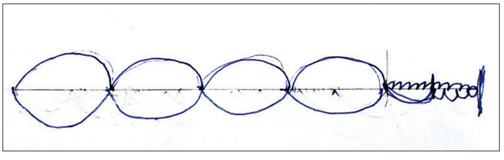
Under arbetet utmanade Kara eleverna att använda sig av och laborera med tallinjen. De ritade och ritade om och utvecklade hela tiden tallinjen som en modell att tänka med. Några elever ritade först två parallella tallinjer men hade problem med att jämföra hoppens längd och antal på de båda tallinjerna. Så småningom såg eleverna att de blev lättare att använda en tallinje och att hoppen och stegen måste ritas lika långa över och under tallinjen. Istället för två tallinjer använde de en dubbel tallinje.



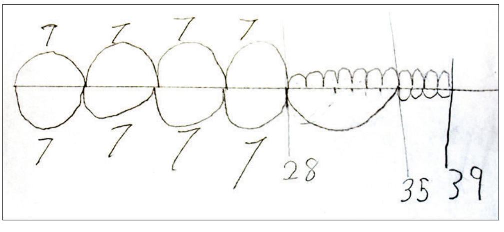
Längden på hoppen är okända men ska vara lika långa enligt ursprungsantagandet. När eleverna hade ritat in alla hopp och steg upptäckte de att de fyra hoppen över linjen och de fyra hoppen under linjen inte behöver räknas eftersom de var lika många.



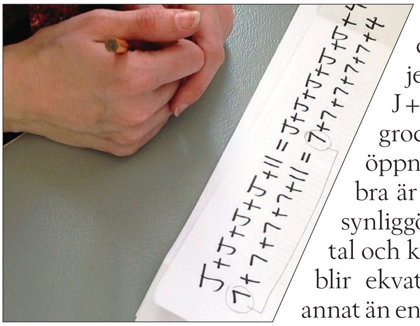
Kvar fanns de 11 stegen på den övre tallinjen och ett hopp och 4 steg på den undre tallinjen. Dessa steg studerades och eleverna såg att stegen över tallinjen kunde delas in i ett hopp och 4 steg vilket gav att varje hopp måste vara lika mycket som 7 steg.



Därefter kunde de sätta ut talen på tallinjen: $7 \cdot 4 = 28$; $28 + 7$ steg hamnar på 35 och med ytterligare 4 steg landar det sista steget på 39.



Nästa steg är att införa bokstavssymboler för de okända talen och jämföra olika algebraiska uttryck. Den dubbla tallinjen har då övergått från att vara en modell av grodans hopp till att vara en modell för att representera och resonera om algebraiska uttryck.

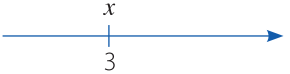


På bilden jämförs två uttryck för grodhoppen där det som tidigare visades över respektive under tallinjen nu är höger och vänster led i likheten. $J+J+J+J+11=J+J+J+J+J+4$, där J är längden på grodans hopp. Fördelen med att använda den dubbla öppna tallinjen som modell i arbetet med inledande algebra är att den hjälper eleverna att upptäcka likheter och synliggör förhållandet mellan hopp och steg, mellan okända tal och konstanter. De får en bild av ekvationen och därmed blir ekvationen meningsfull och ekvationslösningen något annat än en procedur att lära in.

Okända tal som punkter på tallinjen

I Karas lektion var okända tal representerade som avstånd på en tallinje och olika algebraiska uttryck kunde relateras till varandra på en dubbel tallinje. De tal som grodan hamnade på markerades som punkter på tallinjen och dessa var i och för sig också okända till en början. Nu ska vi beskriva en annan serie sammanlänkade uppgifter som fokuserar på okända tal som punkter. Istället för grodhoppen utgör tallinjen i sig en kontext som bygger på att eleverna tidigare arbetat med tallinjens egenskaper. Uppgifterna är hämtade från en minilektion som finns beskriven i boken *Algebra problem strings*.

Syftet med lektionen är att introducera en öppen dubbel tallinje som ett verktyg för att representera algebraiska likheter och för att lösa ekvationer. Introduktionen av den dubbla tallinjen bör ske innan eleverna börjar lösa ekvationer. Lärarens uppgift är att modellera elevernas tankar på tallinjen så att eleverna kan se lösningen av uppgiften. Läraren börjar med att rita en öppen tallinje. Det första tal som sätts ut är $x=3$, där x sätts ovanför och 3 sätts under tallinjen. Tallinjen blir dubbel med algebraiska uttryck ovanför och numeriska under.

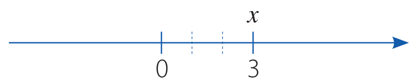


Uttrycken som diskuteras rör sig sedan kring tal runt nollan, som utgör en referenspunkt. Även talen till vänster om 0 introduceras, liksom begreppet motsatt tal. I tur och ordning diskuteras och representeras följande uttryck:

$$\begin{aligned}
x &= 3\\
x &= -2\\
-x &= 5\\
-x &= -4\\
x-4 &= 6\\
x+4 &= -6\\
x-4 &= -10
\end{aligned}$$

Vi beskriver nu hur minilektionen skulle kunna gå till.

Läraren: Om $x = 3$ var finns då 0 på tallinjen?

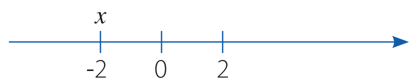


Eleverna får möjlighet att diskutera tillsammans och läraren sätter så småningom ut 0 på rätt plats tre steg till vänster om 3.

Läraren: Om $x = -2$ var finns då 0 på tallinjen?

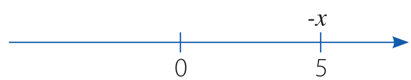
Eleverna får möjlighet att diskutera och läraren sätter sedan ut 0 på rätt plats två steg till höger om -2.

Läraren: Vilket tal är det motsatta talet till -2 och var ligger det?

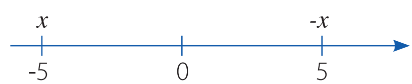


Talet 2 sätts ut på tallinjen.

Läraren: Vad händer om det motsatta talet till x är lika mycket som 5? Var är 0 då? Och var är x?

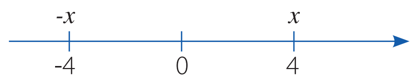


Det här är en knepig fråga eftersom eleverna först måste reda ut vad som menas med ”motsatta talet till x”, sedan att det kan skrivas $-x$, och så se att $-x$ är samma som 5. Gemensamt resonerar eleverna sig fram till att om $x = -5$, då är $-x = 5$.



Läraren: Om det motsatta talet till x är här vid -4, var är då x?

Tillsammans får eleverna befästa att talet 0 utgör en referenspunkt och att tal som är lika långt från 0 på ömse sidor är motsatta tal. Minustecknet i det här sammanhanget betyder inte subtraktion och inte negativt tal utan just motsatt tal.



Läraren: Om jag nu säger att ett tal minus 4 är 6, då vet ni säkert vilket det okända talet är. Vi kan sätta ut $x - 4$ och 6 på var sin sida om tallinjen.

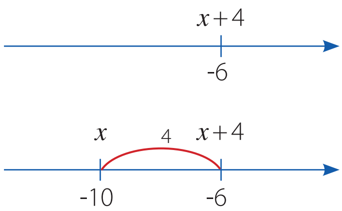
Läraren: Om vi vet att $x - 4$ ligger här, var kan då talet x ligga?

Eleverna får diskutera tills de är eniga om att x måste ligga 4 steg till höger om 6. Det innebär att $x = 10$.

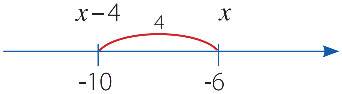
Läraren: Nu kommer utmaningen, om $x + 4 = -6$, vad är då x?

På den här uppgiften är det vanligt att elever föreslår olika svar, exempelvis att $x = 2$, $x = -2$, $x = 10$ eller $x = -10$.

Läraren ritar upp tallinjen och lyfter fram resonemanget som utgår från den.



Läraren: Jobba nu parvis och försök lista ut den här: om $x-4=-10$, vad är då x?



Med tallinjen som tankemodell är det inte svårt för eleverna att senare lösa ekvationer som dem till höger.

Kara menar att lärare som undervisar i algebra inte har som uppgift att presentera färdiga och förutbestämda regler och fakta för eleverna utan att hjälpa dem att utveckla en förståelse för matematiska samband. Lektioner med varierande lektionsstrukturer, frågeställningar, undersökningar, gemensamma diskussioner och korta minilektioner med en serie sammanhängande uppgifter ger eleverna sådana möjligheter.

$$2x = 12$$
$$2x = -12$$
$$-2x = 10$$
$$x/2 = 3$$
$$x/3 = -2$$

Vi har i de här båda lektionsbeskrivningarna visat hur en dubbel tallinje kan användas för att representera okända tal, både som avstånd och som punkter, och fungera som en kontext för att skapa mening i och hantera negativa tal och motsatta tal i samband med ekvationslösning.

LITTERATUR

Fosnot, C. T. & Jacob, B. (2019). *Unga matematiker i arbete – algebra*. Lund: Studentlitteratur.

Holmberg, B. & Kilhamn, C. (2014). *Subtraktion på den tomma tallinjen*. Nämnaren 2014:3.

Holmberg, B. & Kilhamn, C. (2016). *Addition med bråk på tallinjen*. Nämnaren 2016:4.

Jacob, B. & Fosnot, C. T. (2007). *The California frog-jumping contest*. Portsmouth: Heinemann.

Kilhamn, C. (2014). *Tallinjen som ett didaktiskt redskap*. Nämnaren 2014:2.

Tangen, K. (2018). *Grodhopp – algebra i femte klass*. Nämnaren 2018:4.

Weber Harris, P. & Imm, K.L. (2017). *Algebra problem strings*. Dubuque: Kendall Hunt Publishing Company.