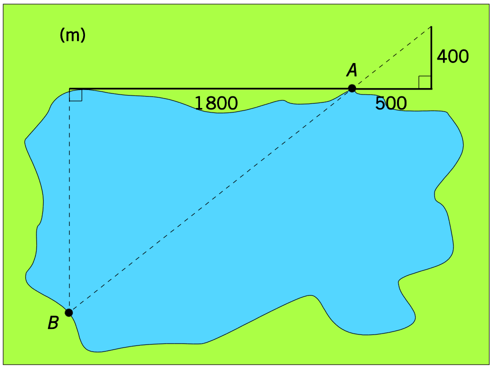
UPPSLAGET

Ett problem med två lösningar – lika rätta men med olika resultat

Det händer ibland att elever överraskar med lösningsmetoder som inte är de som jag som lärare har förväntat mig. Som i höstas när jag var lärare för kurs 2b i vuxenutbildningen. Momentet var geometri och provuppgiften här nedan var tänkt att undersöka elevernas kunskaper om likformighet och Pythagoras sats. Det är en variant på ett klassiskt avståndsproblem.

> Hugo planerar att simma över sjön i figuren nedan, mellan platserna A och B. För att beräkna avståndet AB gör han de mätningar som figuren visar. Hur lång kommer simturen att bli?



De flesta elever som löste uppgiften använde sig av Pythagoras sats på den lilla triangeln, precis som jag föreställt mig och som vi tidigare tagit upp i kursen. Hypotenusan fick de till 640 meter. Sedan använde de sig av likformighet mellan den stora och den lilla triangeln. Det går att använda likformighet först och sedan Pythagoras sats på den större triangeln, men den vägen valde ingen. Hursomhelst gav likformigheten mellan trianglarna

$$\frac{AB}{640} = \frac{1800}{500}$$

med lösningen $AB = 2304$ m.

En elev använde sig något oväntat av en trigonometrisk lösning. Det ingår inte i kursen, men det ska ju som bekant inte hindra den elev som ändå behärskar ett sådant innehåll. Problemet skulle ju lösas. Eleven betraktade den lilla triangelns vinkel vid punkten A som hen kallade x och antecknade

$$\tan x = \frac{400}{500}$$

med det avrundade delresultatet x = 38,7°. Nu över till den stora triangeln. Eftersom vinkeln x i den lilla triangeln har en vertikalvinkel vid punkten A i den stora triangeln så är de lika.

Eleven antecknade nästa steg i sin lösning.

$$\cos x = \frac{1800}{AB}$$

stuvade om i ekvationen till

$$AB = \frac{1800}{\cos 38,7}$$

med lösningen $AB = 2\,278$ m.

Två korrekta lösningar med olika resultat! Skillnaden i resultat är inte stor, men den finns där. Avrundar man till två värdesiffror är de lika, så det är väl inte någon stor sak. Eller är det viktigt? Eleverna som använde sig av den första lösningsmetoden avrundade från Pythagoras sats till tre värdesiffror, och eleven med den andra avrundade sin vinkel till tre värdesiffror. Visst kunde det behövts fler, och en algebraisk lösning hade blivit lika med båda metoderna.

Här finns en numerisk problematik som eleverna sällan ställs inför, bortom det generella rådet att svara med samma antal gällande siffror som det minsta som ges i uppgiften. Avrundningar får olika konsekvenser beroende på vilka operationer som utförs på de avrundade värdena. Först en titt på lösningen med Pythagoras sats och likformighet. Hur stor skillnad i resultat blir det med 1 % längre hypotenusa i den lilla triangeln respektive 1 % kortare? Med

$$\frac{AB}{633,6} = \frac{1800}{500}$$

och

$$\frac{AB}{646,4} = \frac{1800}{500}$$

varierar AB mellan 2 281 m och 2 327 m som motsvarar 2 304 m plus minus en procent.

Om vinken i den andra lösningsmetoden på samma sätt varieras uppåt och nedåt med 1 % får vi

$$AB = \frac{1800}{\cos 37,422}$$

respektive

$$AB = \frac{1800}{\cos 39,087}$$

där AB i den här lösningsmetoden varierar mellan 2 266,5 m och 2 319 m. Medelvärdet är 2 292 m och variationen plus minus 1,01 %. Ungefär. Pyttelite större felmarginaler men fortfarande inga stora skillnader mellan lösningarna.

Men varför är då elevlösningarnas resultat olika? Det är ändå något med att avrunda vinklar. Nedan ett exempel på höjdmätning av två rätvinkliga trianglar där båda har basen 100 m som man kan ta upp med eleverna och som kan visa hur skillnader mellan avrundningar av vinklar vid olika värden får oväntade konsekvenser. Prova att variera vinklarna en grad i båda fallen. Hur stora blir skillnaderna i höjd för respektive triangel? Står sig tumregeln om antal värdesiffror? Den som är intresserad kan fortsätta med undersökningar av avrundningar i potens- och exponentialfunktioner.

Calle Flognman