Anders Månsson

Multiplikation med negativa tal

Varför är ”minus gånger plus minus” och ”minus gånger minus plus”? Det är en fråga som elever ibland ställer och som en matematiklärare behöver kunna besvara. Författaren ger en förklaring och funderar också över möjliga alternativa definitioner av multiplikation med negativa tal.

Låt oss börja med att motivera varför ”plus gånger plus är plus” (+ · + = +) och varför ”plus gånger minus är minus” (+ · – = –). Vanligtvis definieras multiplikation som upprepad addition, under förutsättning att multiplikatorn är ett naturligt tal. Är a ett naturligt tal och b ett godtyckligt tal, kan multiplikation definieras på följande vis:

$$a \cdot b \overset{\text{def}}{=} \underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{a\text{ stycken}}$$

Med denna definition gäller exempelvis att

$$3 \cdot 2 = \underbrace{2+2+2}_{3\text{ stycken}} = 6$$

$$3 \cdot (-2) = \underbrace{(-2)+(-2)+(-2)}_{3\text{ stycken}} = -6$$

Detta motiverar varför + · + = + och varför + · – = –. Men hur definieras multiplikation när det första talet är negativt? En möjlighet är att definiera multiplikation med en negativ multiplikator ($a < 0$) som upprepad subtraktion:

$$a \cdot b \overset{\text{def}}{=} \underbrace{-b-b-b-\ldots-b}_{|a|\text{ stycken}}$$

Vid uppräkningen skriver vi nu absolutbeloppet av a, eftersom multiplikatorns negativa egenskap syns i att den upprepade additionen byttes ut mot upprepad subtraktion. Med denna definition gäller exempelvis att

$$(-3) \cdot 2 = \underbrace{-2-2-2}_{3\text{ stycken}} = -6$$

$$(-3) \cdot (-2) = \underbrace{-(-2)-(-2)-(-2)}_{3\text{ stycken}} = 2+2+2 = 6$$

På detta sätt kan vi alltså motivera varför ”minus gånger plus är minus” (**– · + = –**) och varför ”minus gånger minus är plus” (**– · – = +**). Ett problem är att vi då får en definition av multiplikation som ser olika ut beroende på om det första talet är positivt eller negativt:

$$a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{a\text{ stycken}} & \text{om } a \geq 0 \\ \underbrace{-b-b-b-\ldots-b}_{|a|\text{ stycken}} & \text{om } a < 0 \end{cases}$$

Ett annat problem med att definiera multiplikation med upprepad subtraktion är att detta inte är särskilt väl förankrat, varken i samhället eller bland matematiker. Vi vinner alltså inte så mycket på att introducera multiplikation som upprepad subtraktion för att förklara multiplikation med negativa tal.

Räkneregler

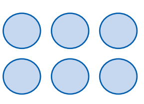
Hur tacklar matematiker frågan? Matematikerna Ian Stewart och David Tall förklarar det indirekt, på följande vis: Du kan definiera $a \cdot b$ som du själv vill, så länge definitionen uppfyller en viss uppsättning fundamentala räkneregler. Räknereglerna är fundamentala eftersom vi kan visa att från en handfull räkneregler kan vi bygga upp matematiken. I denna uppsättning ingår bland annat följande räkneregler:

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{(I)}$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \text{(II)}$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{(III)}$$

Exempelvis säger den första räkneregeln att multiplikation är kommutativt, dvs oberoende av talens ordningsföljd. Det är enkelt att motivera varför den räkneregeln gäller om vi definierar multiplikation som upprepad addition, i alla fall om vi begränsar oss till naturliga tal. Exempelvis kan vi förklara att $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ med hjälp av figur 1.



Figur 1

Å ena sidan består figuren av två rader av bollar med tre bollar i varje rad, dvs totalt $2 \cdot 3$ bollar. Å andra sidan består den av tre kolumner av bollar med två bollar i varje kolumn, dvs totalt $3 \cdot 2$ bollar. Oavsett hur vi ser på det är det samma antal bollar. Det gäller alltså att $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Eftersom det inte är något speciellt med talen 2 och 3, måste samma sak gälla för godtyckliga positiva heltal a och b. Därmed har vi motiverat räkneregel (I). På liknande sätt kan vi motivera de andra fundamentala räknereglerna för naturliga tal.

Vill vi att de fundamentala räknereglerna ska gälla även för negativa tal kan vi visa att det logiskt följer att **– · + = –** och **– · – = +**. Enligt definitionen av multiplikation som upprepad addition har vi att $3 \cdot (-2) = -6$. Om räkneregel

(I) även ska gälla för negativa tal, följer att $(-2)\cdot 3=3\cdot(-2)=-6$, dvs ”minus gånger plus är minus”.

För att förklara varför ”minus gånger minus är plus” kan vi betrakta uttrycket $(-2)\cdot 0$. Ska räkneregel (I) även gälla för negativa tal är $(-2)\cdot 0=0\cdot(-2)$. Enligt definitionen av multiplikation som upprepad addition gäller att $0\cdot(-2)=0$. Alltså gäller att $(-2)\cdot 0=0$. Vidare gäller att $0=3+(-3)$, vilket är ett specialfall av en annan fundamental räkneregel. Kombinerar vi allt detta med räkneregel (III), får vi

$$0=(-2)\cdot 0=(-2)\cdot(3+(-3))=(-2)\cdot 3+(-2)\cdot(-3)=-6+(-2)\cdot(-3)$$

vilket innebär att $(-6)+(-2)\cdot(-3)=0$. Ska detta stämma måste följande gälla: $(-2)\cdot(-3)=6$, dvs ”minus gånger minus är plus”.

Alternativa definitioner

Vi har alltså visat att *om* räknereglerna ska gälla även för negativa tal, följer det att $-\cdot+=-$ och $-\cdot-=+$. Men *varför* vill vi att räknereglerna också ska gälla för negativa tal? Det finns inget som hindrar oss från att i stället definiera multiplikation så att $-\cdot+=+$ och $-\cdot-=-$. En anledning till att vi väljer att inte göra det är för att matematiken då hade blivit mer komplicerad, eftersom vi hade varit tvungna att ha olika räkneregler för positiva och negativa tal. Dessutom hade inte matematiken stämt väl överens med hur den används i matematiska tillämpningar. För att förklara närmare vad vi menar med detta testar vi ett par alternativa definitioner.

Anta att $+\cdot-=-$ men att $-\cdot+=+$. Då har vi definierat multiplikation så att följande gäller:

$$+\cdot+=+\qquad +\cdot-=-\qquad -\cdot+=+\qquad -\cdot-=+$$

Vi utgår från att multiplikation med noll alltid ger noll oavsett ordningsföljd. Eftersom det bara är *tecknen* på multiplikationerna vi har ändrat på, har vi inte tagit med storlekarna på talen i multiplikationerna här. Exempelvis innebär $-\cdot+=+$ att $(-3)\cdot 2=6$. Det är enkelt att visa med exempel att denna ändring av definitionen av multiplikation inte är förenlig med någon av räknereglerna (I), (II) eller (III).

Anta att vi istället ersatt $-\cdot-=+$ med $-\cdot-=-$ och definierat multiplikation på följande vis:

$$+\cdot+=+\qquad +\cdot-=-\qquad -\cdot+=-\qquad -\cdot-=-$$

Det är enkelt att visa att denna ändring är förenlig med räkneregel (I) och (II), men inte med räkneregel (III).

Anta att vi gjort bägge ändringarna så att vi definierat multiplikation på följande vis:

$$+\cdot+=+\qquad +\cdot-=-\qquad -\cdot+=+\qquad -\cdot-=-$$

I detta fall blir definitionen förenlig med räkneregel (II) men inte med (I). Den är förenlig med räkneregel (III) som vi formulerat den tidigare, men däremot inte med följande variant: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

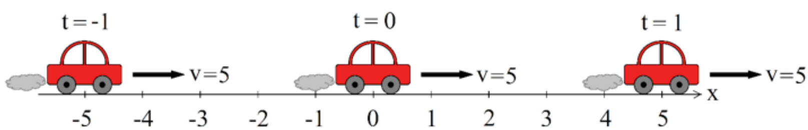
Det är alltså möjligt att definiera multiplikation så att $-\cdot+=+$ och $-\cdot-=-$. Men då kommer inte längre alla fundamentala räkneregler att gälla för alla tal, vilket hade gjort matematiken mer komplicerad. Om ”plus gånger minus är minus”, men ”minus gånger plus vore plus”, hade vi till exempel inte längre kunnat tolka de båda uttrycken $2 \cdot (-100)$ och $(-100) \cdot 2$ som ”en skuld på 100 kr som dubbleras”. Då hade $2 \cdot (-100) = -200$ varit ett negativt tal och $(-100) \cdot 2 = 200$ hade varit ett positivt tal. Vidare skulle det varit svårare att sätta upp och tolka algebraiska uttryck och formler om tecknet på en multiplikation skulle bero på ordningsföljden av talen i en multiplikation. När vi sätter upp algebraiska uttryck och formler vet vi inte alltid vilka tecken de ingående talen ska ha. Men det hade vi behövt veta eller ta hänsyn till om multiplikation inte varit kommutativt. En anledning till att vi vill att multiplikation ska vara kommutativt är för att vi ska slippa den typen av problem.

När matematiken tillämpas

Att matematiken blir enklare är inte den enda anledningen till att vi definierat multiplikation så att de fundamentala räknereglerna ska gälla. En annan viktig anledning är att matematiken då stämmer överens med hur den används i matematiska tillämpningar, till exempel i fysiken. Betrakta exempelvis en bil som rör sig med konstant fart v längs x-axeln (se figur 2). Vi kan bestämma bilens position x vid tiden t med formeln $x = v \cdot t$. Anta att bilens fart är $v = 5$ meter per sekund. Då gäller att

vid tiden $t = -1$ är bilens position $x = 5 \cdot (-1) = -5$
vid tiden $t = 0$ är bilens position $x = 5 \cdot 0 = 0$
vid tiden $t = 1$ är bilens position $x = 5 \cdot 1 = 5$

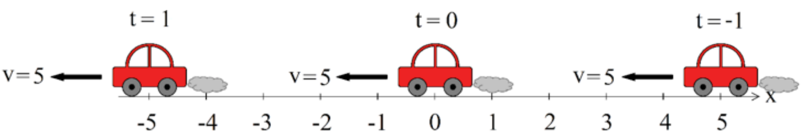
Figur 2



Vilken formel ska vi använda om bilen istället rör sig till vänster (se figur 3)? Om v fortfarande ska vara bilens fart, kan vi använda oss av formeln $x = -(v \cdot t)$. Med denna formel får vi korrekt att

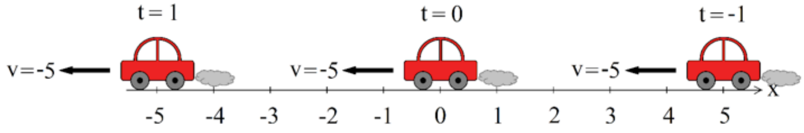
vid tiden $t = -1$ är bilens position $x = -(5 \cdot (-1)) = -(-5) = 5$
vid tiden $t = 0$ är bilens position $x = -(5 \cdot 0) = 0$
vid tiden $t = 1$ är bilens position $x = -(5 \cdot 1) = -5$

Figur 3



Notera att uträkningen $-(-5) = 5$ inte är ett exempel på ”minus gånger minus” utan ”minus av minus”. I formeln $x = -(v \cdot t)$ står minustecknet framför produkten $v \cdot t$. Formeln $x = -(v \cdot t)$ är alltså inte formellt sett identisk med formeln $x = (-v) \cdot t$.

Det är inte så ekonomiskt att behöva använda två olika formler, $x = v \cdot t$ och $x = -(v \cdot t)$, beroende på om bilen rör sig åt höger eller vänster. Det hade varit enklare om vi hade kunnat använda en och samma formel för båda situationerna och det kan vi, men då behöver vi införa begreppet hastighet istället för fart. Hastighet är enkelt uttryckt fart med riktning. Rör sig bilen åt höger med farten 5 m/s är bilens hastighet $v = 5$ m/s. Rör sig bilen åt vänster med farten 5 m/s är bilens hastighet $v = -5$ m/s. Genom att låta v i formeln vara hastighet istället för fart, kan vi använda formeln $x = v \cdot t$ både när bilen rör sig åt höger och vänster. Men i så fall måste vi definiera minus gånger plus som minus och minus gånger minus som plus. För att inse detta, betraktar vi exemplet när bilen rör sig till vänster med hastigheten $v = -5$ m/s (se figur 4).



Figur 4

Vi ser i figur 4 att bilens position vid tiden $t = 1$ är $x = -5$. Sätter vi in detta i formeln $x = v \cdot t$ med hastigheten $v = -5$, får vi $-5 = (-5) \cdot 1$. Om detta ska stämma måste vi definiera $(-5) \cdot 1$ som -5. Eftersom en fysiker räknar med formler på det här viset, behöver en fysiker därför definiera minus gånger plus som minus. På samma sätt kan vi visa att minus gånger minus behöver vara plus. I figur 4 ska bilen ha positionen $x = 5$ när $t = -1$. Formeln $x = v \cdot t$ blir i detta fall $5 = (-5) \cdot (-1)$. För att detta ska stämma måste vi definiera $(-5) \cdot (-1)$ som 5.

Exemplet med bilen och formeln $x = v \cdot t$ är inte unikt. Det går att finna många andra exempel på matematiska tillämpningar, inte minst inom naturvetenskapen, där man använder matematiken på ett sätt som förutsätter de definitioner vi har valt. Det existerar alltså ett samspel mellan vetenskap och matematik. Matematiken är inte något som bara är givet, utan också något som konstrueras. Svaret på frågan varför minus gånger plus är minus och minus gånger minus är plus är alltså att man valt att det ska vara på det viset, för att matematiken ska bli enklare och för att matematiska tillämpningar kräver det. Det finns inget som hindrar oss från att använda andra definioner, om det finns behov av det. Därmed inte sagt att det är nödvändigtvis är exakt denna förklaring man ska ge till en elev. Full förståelse för svaret kräver nämligen en viss matematisk mognad. Däremot är det viktig att läraren vet svaret, så kan denne själv bestämma hur svaret ska utformas beroende på situationen och elevens förutsättningar.

LITTERATUR

Enare, B. (2015). *Lärartankar: Om negativa tal.* Nämnaren 2015:3.

Persson. I.O. (2007). *Om negativa tal.* Nämnaren 2007:2.

Persson. I.O. (2007). *Två tänkbara modeller för undervisning om negativa tal.* Nämnaren 2007:3.

Stewart, I. & Tall, D. (2015). *The foundations of mathematics.* Second edition. Oxford university.