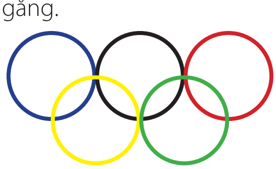
PROBLEM AVDELNINGEN

Problem med geometri

I de problem som presenteras här finns antingen en figur redan i problemformuleringen eller så är det mer eller mindre nödvändigt att rita en figur för att kunna lösa det. Diskutera med eleverna vad som är bra att tänka på då de ritar figurer i detta sammanhang. Hur noga måste de vara? Hur märker de upp exempelvis vinklar så att alla förstår vilken de menar? Och så vidare.

4361 *De olympiska ringarna*

I de nio områdena som skapas av de olympiska ringarna ska talen 1–9 placeras in så att summan av talen i varje ring är lika. Varje tal ska bara användas en gång.



4362 *En delvis röd rektangel*

Hur stor del av rektangelns area täcker de röda områden tillsammans?

4363 *Kortast katet*

Bestäm arean av en rätvinklig triangel, där en vinkel är 60 grader och hypotenusan 10 cm. Hur lång är den kortaste kateten?

4364 *Godtycklig kvadrat*

Rita en godtycklig kvadrat. Konstruera från kvadratens fyra hörn linjer som är parallella med kvadratens diagonaler. Då uppkommer en geometrisk figur.

a) Visa att denna figur är en kvadrat.

b) Vad är förhållandet mellan areorna av dessa båda kvadrater?

4365 *Parallelltrapetsen ABCD*

Rita en parallelltrapets $ABCD$. Välj E på mitten av AD. Förläng AB till F sådan att $AF = DC$ och $EF = CE$. Visa att arean av triangel CBF och trapetsen $ABCD$ är lika.

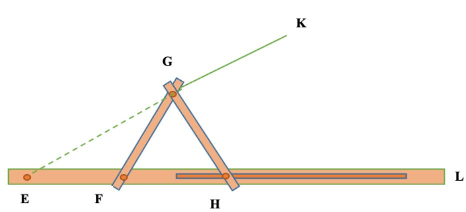
4366 *Tilias aha-upplevelse*

Tilia läser första året på gymnasiet och hon fick lite undervisning i trigonometri av sin äldre kusin Iris. Tilia fick en starkt glädjande aha-upplevelse och sa bestämt att linjens lutning är den samma som tangens till den vinkel som bildas mellan linjen och den positiva delen av x-axeln.

Är du enig med Tilia? Ge en matematisk förklaring till ditt svar oavsett om du är enig med Tilia eller inte.

4367 *Ett vinkelinstrument*

Figuren här nedan liknar ett instrument. $EF = FG = GH$. FG och GH är vridbara i F och G. Punkten H glider i ett spår utefter linje HL.



Visa att vi kan bestämma alla vinklar i figuren om en av vinklarna är känd.

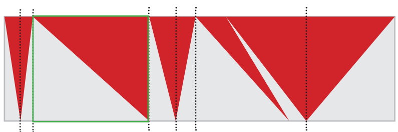
Svar och förslag på lösningar

4361
De tre ringarna i mitten (**Asien**, **Afrika** och **Oceanien**) kommer att innehålla tre tal var. Därmed kan ingen av dessa tre ringarna innehålla 8 eller 9 utan dessa får placeras i de två sidoringarna (**Europa** och **Amerika**). Låt eleverna resonera om varför det kan sägas så bestämt. Sen kan ni testa er fram och få minst två lösningar.

Fall 1: Europa: 9+2 Amerika: 8+3, Afrika 2+5+4, Asien 6+4+1 och Oceanien 1+7+3.

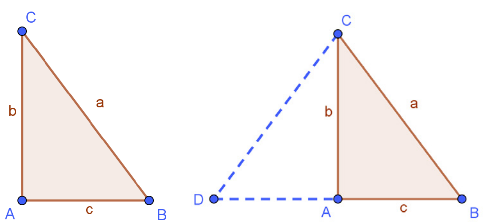
Fall 2: Europa: 8+3, Amerika: 9+2, Afrika 3+7+1, Asien 6+1+4 och Oceanien 4+5+2.

4362 Svar: Hälften av arean
Summan av alla de röda trianglarnas bas är lika med en sida av rektangeln och deras höjd är lika med den andra sidan av rektangeln. Alltså utgör de röda områdena tillsammans hälften av rektangelns area.



Några elever löste kanske problemet genom att rita stödlinjer och resonera utifrån dem.

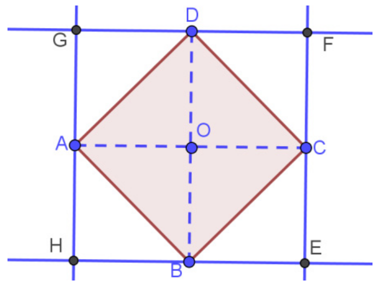
4363 Svar: 5 cm



I triangel *ABC* är vinkel C lika med 30 grader. Spegelbilden av denna triangel på *AC* som speglingslinje, är triangeln *ACD*. Eftersom dessa trianglar är kongruenta upptäcker vi att om hypotenusan *a* kan väljas lika med 10 cm eller generellt x le, så är motstående katet till vinkeln 30 grader, som kortaste sida i denna triangel, generellt lika med $x/2$ och i detta fall 10 cm/2 = 5 cm.

Reflektion: En generell slutsats är att i alla rätvinkliga trianglar av detta slag är motstående sida till vinkeln 30 grader alltid hälften så lång som hypotenusan.

4364

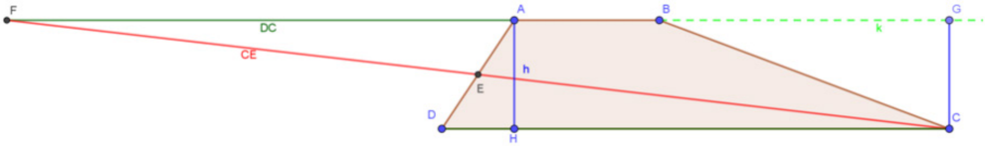


Metod 1. Följande förklaring lämpar sig bäst för elever i grundskolans tidigare år och gäller bara konstruktionen av dessa kvadrater: Eleverna kan se att arean av den rosa kvadraten som de ska rita först består av fyra kongruenta rätvinkliga trianglar medan den stora blåkantade kvadraten består av åtta sådana trianglar. Låt några elever visa hur de har tänkt och ritat. Hur har de tolkat ord som godtycklig, konstruera parallella linjer och förhållande?

Metod 2. Den nya polygonen är i första hand en romb eftersom motstående sidor är parvis parallella och lika långa som kvadratens diagonal (*AC* och *BD*). Om vi visar att en av vinklarna också är 90 grader så är romben en kvadrat.

1. Kvadraten *ABCD*:s diagonaler är vinkelräta mot varandra eftersom varje diagonal delar kvadraten i två kongruenta likbenta rätvinkliga trianglar, sådan att diagonalen också är halveringsstråle.
2. Alltså är var och en av de fyra O-vinklarna 90 grader.
3. På grund av parallellitet är alla vinklarna i de fyra små kvadraterna (O*CEB*, O*DFC*, *ODGA* och *OAHB*) 90 grader och därmed är *EFGH* en kvadrat.
4. Om vi väljer att sidan till kvadraten *ABCD* är x längdenheter (med arean x^2 ae), kan vi med hjälp av Pythagoras sats få sidan i *EFGH* lika med $\sqrt{2}x$ le, och därmed är arean lika med $2x^2$ ae.
5. Alltså är arean av den uppkomna kvadraten dubbel så stor som arean i den ursprungliga kvadraten.

4365



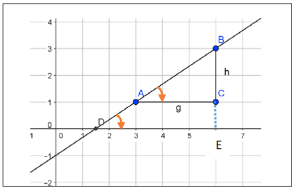
Triangel *CBF*:s area är lika med $\frac{(AB+DC)\cdot h}{2}$ som också är *ABCD*:s area. V.S.B!

4366

För lutningen *k* i en linjär funktion gäller ett av följande tre fall:

1. större än noll (positiv)
2. mindre än noll (negativ)
3. lika med noll (horisontell linje).

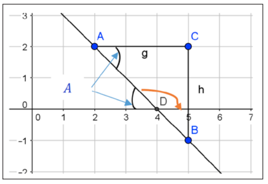
1. $k > 0$



Vinkeln *A* och *D* är lika stora eftersom de båda ligger på linjen samt att *AC* och *x*-axeln är parallella.

$$\textit{linjens lutning} = k = \frac{h}{g} = \frac{BE}{DE} = \tan A = \tan D$$

2. $k < 0$



Här ser vi att vinkel *D* är större än 90 grader och mindre än 180 grader, då är $\tan D < 0$. Vi har $\tan D = \tan(180 - A) = -\tan A$, vilket är lika med $-\frac{h}{g}$ som är lutningen för linjen genom punkterna A och B.

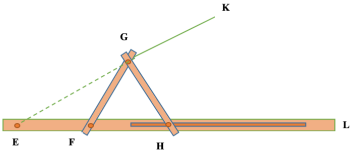
3. $k = 0$

Vinkeln *D* är noll (eller 180) grader eftersom vi vet att $\tan 0 = \tan 180 = 0$.

4367

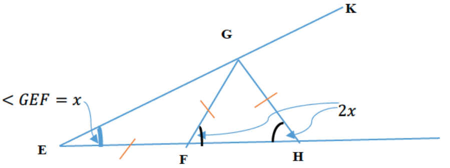
Först en kort historik: En av de omöjliga konstruktionerna med passare och linjal är att dela en given vinkel i tre lika vinklar.

Ett instrument för vinkelns tredelning konstruerades av Blaise Pascal (1623–1662).



I figuren är $EF = FG = GH$. *FG* och *GH* är vridbara i *F* och G. Punkten *H* glider i ett spår utefter linje HL. En godtycklig vinkel som *HGK* delas i tre lika stora delar.

Om vi visar att Pascals instrument är helt korrekt, så har vi även löst problemet.



Om man önskar 1/3 av en vinkel som har positionen *KGH*, placeras verktyget som på bilden.

Välj $\angle GEF = x$. Vi ska visa att $\angle KGH = 3x$. Eftersom $EF = FG$ så får vi $\angle EGF = x$. Vinkel *GFH* är yttervinkel till triangel *GEF* och är därmed lika med $x + x = 2x$.

Vi har också $GH = FG$ och härifrån får vi $\angle GHF = \angle GFH = 2x$.

$\angle KGH$ är yttervinkel till triangel *EGH*. Alltså får vi

$\angle KGH = \angle E + \angle H = x + 2x = 3x$. V.S.B!

Vi ser att alla vinklarna i figuren är som en funktion av *x*. Dvs, har vi en vinkel så kan vi bestämma *x* och därmed alla övriga vinklar.

Se även www.geogebra.org/m/KgmtBJ4y

Russell Hatami