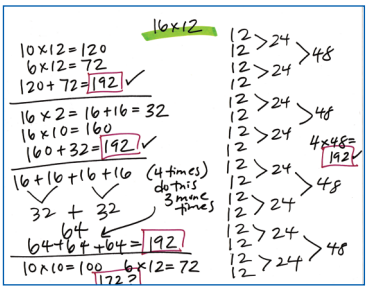
Kara Louise Imm

# Varför modeller spelar roll

I samband med inbjudan till Matematikbiennalen 2018 bad vi Kara Louise Imm om en artikel till Nämnaren. Tidigare har flera av lärarutbildarna på Pedagogen i Göteborg varit i New York, blivit inspirerade av *Mathematics in the City* och berättat om det i några artiklar. Benämningar på modeller och material är inte ordagrant översatta utan snarlika benämningar som känns mer relevanta i en svensk kontext används.

Kerri undervisar i årskurs 4 på en skola i New York City. När jag kommer in i klassrummet är hon i full färd med en övning som handlar om tal och tals användning. Hon vinkar in mig och säger: *Kom in, vi håller just på att avsluta problemet 16·12.*

## Matematik utan modeller




Kerris elever är mycket aktiva när hon samlar upp ”alla olika sätt” som de löser problemet på. När eleverna delar med sig av hur de tänker gör hon en symbolisk översättning av deras idéer. Tavlan längst fram i klassrummet är full av elevernas strategier: upprepad addition, dubbleringar och halveringar som exempelvis omskrivning av problemet till 8·24, delprodukter som 10·12 och 6·12, och till och med ett halvfärdigt försök att använda tiotals- och entalsfaktorer i 10·10 och 6·2. Hon avslutar arbetet med problemet genom att säga till sina elever: *Wow, vi gjorde det igen. Så många sätt det finns att lösa det här problemet på. Bra jobbat allihop!*

Senare på dagen får Kerri och jag möjlighet att prata om den här övningen.

– Mina elever älskar att lösa de här problemen på så många sätt som möjligt, förklarar hon, men jag är inte alltid säker på när och hur jag ska avsluta övningen.

– Det beror på ditt syfte, säger jag, och hon vill veta mer.

– Är ditt mål att se hur många olika sätt som dina elever kan lösa problemet på, frågar jag, eller är du intresserad av att tillsammans med dem utforska hur de olika strategierna hänger ihop? Försöker du uppmuntra eleverna att prata med varandra och återberätta, förklara och försvara varandras strategier? Förstår de varför vissa strategier ”fungerar” och är effektiva och varför andra inte är det?

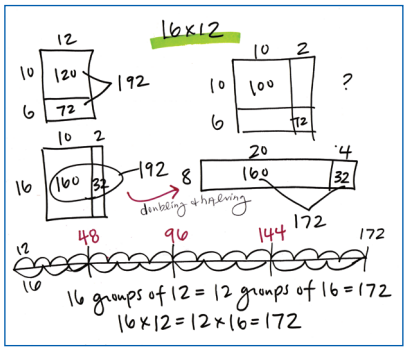
Kerri tänker en liten stund och inser att hon vill få fram så många smarta sätt som möjligt att lösa ett problem på. Men nu börjar hon förstå att bara samla ihop ett antal strategier, utan att diskutera samband mellan strategierna och just de tal som ingår i problemet, *inte* kommer att stödja elevernas möjligheter

Översättning till svenska: Peter Nyström

att förstå de underliggande principerna för multiplikation. Hon inser att eleverna troligtvis inte kommer att anamma nya strategier om de inte bjuds in att studera sina kamraters strategier, börja förstå dem och så småningom avgöra om de kan vara användbara i andra sammanhang. Kerri funderar:

– Hur kan jag få mina elever att se varför en strategi fungerar och hur den kan hänga ihop med, eller inte hänga ihop med, andra strategier? Jag har provat det flera gånger och eleverna ser det bara inte.

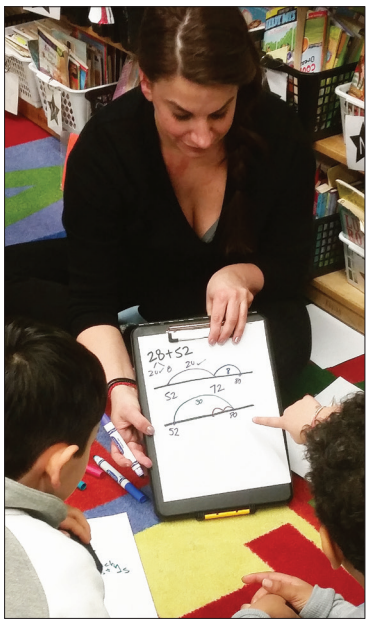
Jag menar att Kerri behöver modeller, inte bara för matematiska uttryck som $16 \cdot 12 = 192$, och detta är rätta stunden att hjälpa henne använda dem för att ge mening åt de strategier som hennes elever föreslår. Tillsammans går vi tillbaka till de strategier som eleverna har använt och börjar ”göra en bild” av dem i en öppen punktmatris (som block och rutor) eller på en tom tallinje. Vi arbetar oss igenom alla strategierna till dess vi båda är övertygade om att vi fått en klar bild över elevernas sätt att tänka. Därefter jämför vi den sammanställning av elevsvaren som hon gjort på tavlan i klassrummet med den sammanställning vi tillsammans arbetat fram. Sammanställningen på tavlan är fokuserad på procedurer, den numeriska representationen av vad eleverna har sagt, medan vår gemensamma är fokuserad på modeller.




– Det här är fantastiskt, väldigt användbart, konstaterar Kerri, men jag tror ändå inte att mina elever kommer att använda modellerna själva.

– Det kommer de troligen inte att göra, säger jag, men om din introduktion av modeller är genomtänkt, om du använder dem så snart det är möjligt, erbjuder sammanhang där modeller framträder naturligt och om du uppmuntrar elever att utforska hur de fungerar, då är chansen god att dina elever så småningom börjar tänka med hjälp av modellerna.

## Hur lär sig unga elever att tänka med modeller?

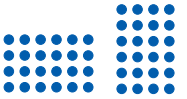



Kerris fråga om hur elever tänker med modeller är avgörande, men den kräver att vi sätter in samtalet i ett större sammanhang om undervisning och lärande i matematik. Mina kollegor Cathy Fosnot och Maarten Dolk, som 1995 grundade *Mathematics in the City*, introducerade en specifik uppsättning idéer för att tänka kring utveckling av modeller. De hämtade dem från Freudenthalinstitutet i Nederländerna och den filosofi för matematikundervisning som kallas *Realistic Mathematics Education*, RME.

För vissa handlar matematikundervisning om att överföra idéer från läraren till eleverna; att få elever att plocka upp lärarens strategier, procedurer eller idéer är helt enkelt en fråga om att berätta och förklara med tillräcklig precision och repetition. Men det är inte så eleverna erhåller ett stabilt kunnande. De måste själva *konstruera* strategier, bärande idéer och modeller som hjälper dem att förstå och lösa problem. Modellerna kan uppfattas som mentala kartor eller bilder av samband och innefattar den tomma tallinjen, öppna

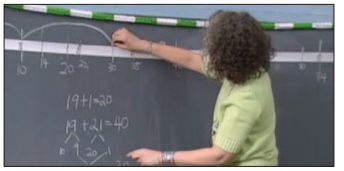
eller slutna punktmatriser, blockmodeller och proportionstabeller. I början ritar eleverna bilder av vad som händer i en situation, vanligen fokuserat på det som händer i förhållande till ett objekt – fåglar som flyger iväg, farfar som ger bort kakor – vilket är deras egen typ av modeller. Senare kan dessa representationer utvecklas till mer generaliserade representationer av situationen – med hjälp av kuber eller andra föremål, skisser etc för att beskriva det som händer. Lärare har två avgörande roller: dels att ge elever de rika matematiska sammanhang där modeller antyds, och dels att representera elevers beräkningsstrategier med hjälp av modellerna. Så småningom införlivar eleverna dessa modeller och rör sig från modeller *av* tänkande till modeller *för* tänkande, så som Cathy Fosnot och Maarten Dolk beskriver.

Punktmatriser



Proportionstabell

| Grön | Röd |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |
| 5 | 15 |
| 10 | *x* |

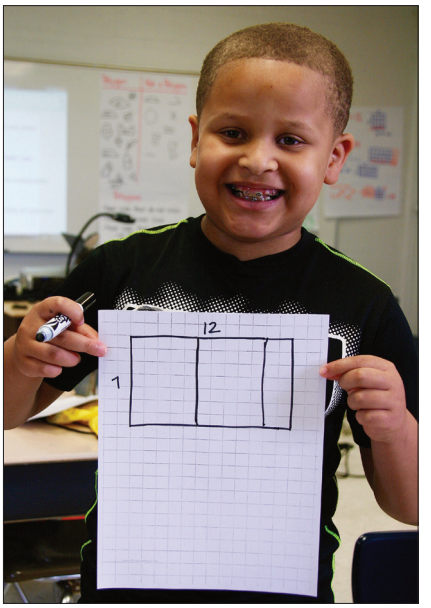


*Utveckling av modeller: modell av en situation, modell* av *tänkande, modell* för *tänkande.*

## Hur en modell kunde stödja Tyrone

Första gången jag träffade Tyrone gick han i årskurs 3 i St Louis, Missouri och höll på att försöka förstå sig på multiplikation. Han hade automatiserat delar av multiplikationstabellen, men stora delar krävde fortfarande mycket tänkande. En morgon bad jag honom nämna ett problem som han ännu inte visste hur han skulle lösa. Han valde $7 \cdot 12$.

Jag undrade om han kunde berätta en historia som kunde hjälpa oss att förstå problemet. Han kom inte på någon historia att berätta, så jag föreslog att vi skulle föreställa oss en liten biograf med fåtöljer i sju rader, från bioduken längst fram till popcornmaskinen längst bak, och med tolv fåtöljer i varje rad. Högst strategiskt hade jag centimeterrutat papper i närheten, och så snart han kunde återberätta idén om $7 \cdot 12$ fåtöljer i biografen bad jag honom rita en bild.




När han hade representerat biografen som ett block på det rutade pappret var hans omedelbara strategi att räkna alla fåtöljerna, dvs alla de små rutorna. Jag föreslog att vi istället skulle dela upp biografen i några sektioner där vi redan visste antalet fåtöljer. Han följde den idén och skapade ett $7 \cdot 5$-block, ytterligare ett $7 \cdot 5$-block och ett $7 \cdot 2$-block inuti biografen. Han kunde redan dessa multiplikationsfakta och använde dem för att komma fram till produkten $7 \cdot 12 = 35 + 35 + 14 = 84$.

Både sammanhanget med biografen och modellen med block på det rutade pappret gjorde det möjligt för honom att komma fram till ett svar som han inte redan ”ägde”. *Kan det här att fungera för andra?* frågade han glatt. *Bra fråga*, svarade jag, *visa strategin för din mamma ikväll och prova en annan multiplikation tillsammans med henne. Vi kan ses i morgon och se vad ni kom fram till.*

## Modeller för matematisk gemenskap

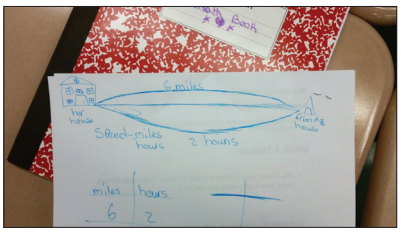
Melissa, som är hjälplärare i en förskola i New York City, samlar en liten grupp av sina elever för att försöka lösa ett ”knepigt” problem. Hon sätter in eleverna i vad uppgiften handlar om: *Mina vänner, vi ska lösa ett matteproblem. Men vi behöver inte öppna våra skrivböcker just nu – så låt böckerna vara stängda! Jag såg att ni har arbetat jättebra med modeller för att förstå problem och idag ska jag ge er ett ännu knepigare problem att lösa.* Hon berättar historien om sin egen samling av bubbelringar: *Melissa har fyra bubbelringar,* berättar hon för barnen, *och hennes morfar ger henne några till. Sedan har hon tolv bubbelringar. Hur många gav morfar till henne?*

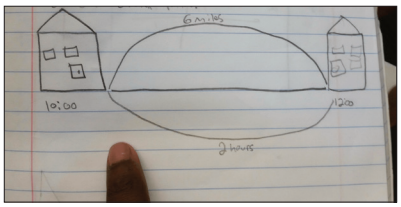
Därefter får hennes elever möjlighet att arbeta i sina skrivböcker och göra modeller av situationen som ett första steg i problemlösningen. När de fått tillräcklig tid att arbeta individuellt kallar hon samman gruppen och en elev uppmanas att visa och förklara sin modell samtidigt som de andra försöker förstå den. Detta drag är strategiskt. Melissa vet att modeller är det sätt på vilket matematiker kommunicerar sitt tänkande till andra. Hon vet också att det är ett avgörande steg i utvecklingen att, precis som matematiker gör, låta eleverna studera varandras modeller. Det är mycket lite betoning av ”rätt” svar, eller faktiskt inte alls fokus på svaret. Hon vet att modellering och meningsskapande är viktigt matematiskt arbete, så hon fokuserar primärt på elevernas modeller.

*En bubbelring.*

## Elever som ”bara inte kan”

I ett klassrum med elever från årskurs 6 i Brooklyn, där nästan 30 % av eleverna uppfattas ha inlärningssvårigheter och de flesta bedöms ligga flera årskurser efter sina jämnåriga, pågår arbete med problem som handlar om proportioner. Jag noterar att en viss grupp elever arbetar med helt andra problem än resten av klassen. Jag frågar läraren hur det kan komma sig och han förklarar: *De här problemen är inte lämpliga för mina elever med inlärningssvårigheter. De klarar dem helt enkelt inte. Jag vill att de ska få känna att de lyckas först.* Som medhjälpare i klassrummet, ett stöd till både eleverna och deras lärare, ber jag att få försöka hjälpa eleverna att klara de problem som övriga i klassen arbetar med. Efter viss tvekan går läraren med på det.




Jag läser ett problem högt för eleverna. Efter varje mening stannar vi upp för att modellera situationen. *Matematiker återberättar historien i bilder och modeller,* säger jag. *Vi har inte bråttom. Vi ska försöka lista ut vad som händer här.* När jag tittar i deras skrivböcker ser jag de vackra modeller som håller på att ta form – i synnerhet dubbla tomma tallinjer och tabeller med tal med samma förhållande. Vi fortsätter att ta till oss problemet, en mening i taget, samtidigt som vi justerar våra modeller.

Till sist ställer jag själva frågan till eleverna och de går tillbaka till sina modeller för att försöka lösa problemet. Deras lärare är litet förstummad: *Jag trodde inte att de kunde hantera ett problem av det här slaget*, förklarar han, *men jag ser att de är hjälpta av att processen görs långsamt och av att de börjar tänka i modeller.*

## Vad säger detta till oss lärare?

Vi lär oss av Tyrone att när elever bjuds in i en historia – ett sammanhang som har utformats för att stödja en viss matematisk idé – uppfattar de ofta situationen och tänker matematiskt om den. De matematiserar en viss verklighet. För Tyrone samverkar sammanhanget om biografen med modellen som han ritar som ett block på rutat papper och möjliggör för honom att komma fram till lösningen på ett okänt problem utifrån kända fakta. Så småningom kommer 7 • 12 att bli automatiserat för honom, men först behövde han skapa mening i problemet i relation till fakta som han redan behärskade. Det ritade blocket hjälpte honom att se hur dessa fakta – som han trodde skulle läras in utantill – är relaterade till varandra på användbara sätt.

Vi inser med hjälp av Melissa att problem måste vara tillräckligt utmanande för att eleverna ska bygga sina resonemang på en modell för meningsskapande eller lösning. Hennes användning av ”knepiga” problem – inte rutinuppgifter som är uppenbara eller triviala – tillsammans med en uppsättning olika material att välja bland som papper och färgpennor, kuber, spelmarkörer och tioramar, gör det möjligt för hennes elever att konstruera modeller som är meningsfulla för dem. Hennes nästa drag lyfter dessa modeller på ett snyggt sätt. Hon använder modeller för att skapa konversation och fascination bland sina elever, för att hjälpa dem att se att detta moment är det viktiga matematiskt sett – inte elevers strävan att hitta det ”korrekta” svaret.

Slutligen lär vi oss från vårt mellanstadieklassrum att modeller ger tillgång till matematik som alltför ofta förvägras elever med kognitiv funktionsnedsättning, elever som tycks kämpa med matematiken och elever som har svårigheter att förstå undervisningsspråket. I dessa sammanhang fungerar modeller både som ett verktyg som ger alla elever i klassen möjlighet att arbeta med samma problem och som ett redskap för formativ bedömning för läraren.

När alla elever betraktas som matematiker betyder det att vi erbjuder realistiska sammanhang som de kan matematisera – situationer som eleverna uppfattar som trovärdiga eller sådana de kan föreställa sig. När sådana sammanhang har designats på lämpligt sätt – en fabrik som tillverkar chokladaskar, varuautomaten där man kan köpa godis eller läsk – framträder modellerna naturligt för eleverna. När lärare hjälper elever att reflektera över dessa modeller går de från modeller för ett specifikt problem, t ex en djuraffär som säljer två typer av mat till kattungar, till modeller för en generaliserad version av denna situation, t ex alla problem där olika förhållanden mellan tal ska jämföras. Elever blir hjälpta av modeller på flera kraftfulla sätt – för att skapa mening, för att kommunicera med andra, för att bekräfta och bestyrka, för att förklara och bevisa – och av alla dessa skäl är det angeläget att utveckla klassrum där modeller är centrala för elevers matematiklärande.

### LITTERATUR

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: constructing fractions, decimals and percents*. Portsmouth: Heinemann.

Det finns ett flertal artiklar som har nära anknytning till denna, se Nämnaren på nätet.