UPPSLAGET

Skalenliga leksaker?

Proportioner och proportionalitet är viktiga begrepp som återkommer i olika delar av det centrala innehållet i grundskolans och gymnasieskolans matematikundervisning. För eleverna är det inte alltid uppenbart att samma matematiska idé ligger bakom så vitt skilda matematikområden som tal i bråkform, tal i procentform, enkla algebraiska uttryck och ekvationer, likformighet och procenträkning. För att inte tala om sinus, cosinus och tangens i rätvinkliga trianglar. Ytterligare ett matematikinnehåll som bygger på proportionsidén är skala. För att förstå skalbegreppet på djupet kan det vara bra att använda sig av sammanhang där eleverna får resonera om skalenlighet.

Ett förslag på en sådan aktivitet är att använda sig av en skalenlig modell som eleverna kan reflektera kring, och sådana finns ofta att tillgå i elevernas närhet.

Låt eleverna jobba parvis utifrån nedanstående frågor. Om det bara finns en modell, som läraren eller eleverna tagit med sig, kan det vara lämpligt att låta elevparen resonera om en fråga och sedan låta dem presentera sina idéer inför klassen. Först kan eleverna få resonera om vad skalan innebär och hur de kan veta om skalan är korrekt. Därefter kan klassen tillsammans fundera på vilka mått som de skulle kunna använda sig av. Finns skalan inte angiven på leksaken får man göra en uppskattning. Ett alternativ är att ha flera olika modeller så att varje elevpar får en modell framför sig på bänken.

Vad menas med skala?

En tankbil i plast är tillverkad i skala 1:30 (skalan finns angiven på tankbilens undersida). Vad betyder det att skalan är 1:30? Vad säger det om den verkliga tankbil som leksaken är en modell av?

I det här fallet kan man tycka att det är ganska självklart att verklighetens sträckor är längre än leksakens, men det är inte självklart för alla elever att kvoten 1/30 betyder att till exempel tankbilens bredd kan beräknas som 30 gånger modellens bredd. Eleverna kan behöva få möjlighet att ta intuition till hjälp för att förstå, och ett bra sätt att få igång intuitionen är att vänta med att ge eleverna beräkningar att utföra eller formler att tillämpa. Då kan fler elever, kanske till och med alla, få möjlighet att bilda sig en uppfattning och våga lita på sina idéer.

I Sverige skriver vi ofta skala på formen 1:30, men det är detsamma som 1/30 och i själva verket bara ett föråldrat skrivsätt för division. Konventionen är att skala skrivs som kvoten mellan ett avstånd i bilden eller på modellen och motsvarande avstånd i verkligheten. Oftast är det uppenbart från sammanhanget vilken sträcka som är den längre. Läraren kan då synliggöra och uppmuntra resonemanget att det mindre talet måste ha med modellen att göra eftersom den är mindre än den verkliga tankbilen.

Läraren behöver säkerställa att alla elever får klart för sig att skala 1/30 betyder att varje avstånd i modellen är en trettiondel av motsvarande avstånd i den verkliga tankbilen, och att detta är detsamma som att varje avstånd i den verkliga bilen är 30 gånger så långt som motsvarande avstånd i modellen.

Här finns också möjlighet att införa ett algebraiskt tänkande, som gör det möjligt att uttrycka samband och beräkningar med hjälp av variabler. 1/30 är ett avstånd i modellen och samma avstånd i verkligheten är x/y.

$\frac{1}{30} = \frac{x}{y}$ är detsamma som $1 \cdot y = 30 \cdot x$
vilket kan förenklas till $y = 30x$.

Hela detta resonemang ska utgå från elevernas idéer och tankar om skala och lärarens uppdrag är att synliggöra viktiga samband men också att tillföra matematiska begrepp, idéer och metoder för att stärka argumenten.

Är skalan rimlig?

Hur stor skulle tankbilen vara i full storlek? Är måtten rimliga?

Eleverna ska själva komma med idéer om hur detta kan avgöras. Vilka mått kan vara intressanta? Vad finns att jämföra med?

Ett förslag kan vara att mäta leksaksbilens bredd, som i det här fallet är 7,7 cm. Hur bred skulle då den verkliga tankbilen vara? $7{,}7 \cdot 30 = 231$ cm. Är det en rimlig bredd på en bil som ska köra på våra vägar? Modellens längd är 37,5 cm, vilket motsvarar 11,25 m för den verkliga tankbilen. Är det rimligt?

Är tankbilsmodellens vikt skalenlig? Vad skulle tankbilen väga om vi skalade upp modellen till full storlek? Är det rimligt? Varför? Varför inte?

Nu behöver vi utveckla det matematiska redskapet. Eftersom det är volymer som väger något (inte sträckor eller areor) är det relevant att använda volymskala här. Eleverna kan behöva undersöka hur volymer för två skalenliga föremål förhåller sig till varandra. Det görs kanske smidigast med enkla former som rätblock. Om vi har två rätblock i skala 1/30, hur mycket större kommer volymen att vara i det större rätblocket jämfört med det mindre? Läraren kan behöva hjälpa eleverna att se att skalan påverkar modellen i tre dimensioner: längd, bredd och höjd. Om längdskalan är 1/30 kommer volymen av det större objektet att vara $30 \cdot 30 \cdot 30$ gånger större än volymen av det mindre objektet. Det innebär att volymskalan kan beräknas som $(\text{längdskalan})^3$.

Om längdskalan är 1/30 är alltså volymskalan $1/30^3 = 1/27\,000$. Eftersom modellen väger 89 gram skulle den verkliga tankbilen då väga $27\,000 \cdot 89\,\text{g} = 2\,403\,000\,\text{g} = 2\,403\,\text{kg} \approx 2{,}4$ ton.

Låt eleverna diskutera om detta är rimligt. Vad kan en tankbil förväntas väga? Om det inte är rimligt, vad kan orsaken vara? Med lärarens hjälp kan diskussionen leda till insikten att vikten beror av materialet, och att modellen och den verkliga tankbilen är tillverkade i olika material. Modellen är gjord av plast och tankbilen kan antas vara gjord av stål.

Vad skulle modellen väga om den var gjord av stål? Stål har en densitet på nästan $8\,\text{kg/m}^3$ och vi kan anta att plasten har en densitet på cirka $1\,\text{kg/m}^3$. Om modellen hade varit gjord av stål hade den alltså vägt 8 gånger så mycket. Det betyder att den verkliga lastbilen, med rätt material, väger cirka $8 \cdot 2{,}4\,\text{ton} = 19{,}2$ ton. Är det rimligt?

Peter Nyström