Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Talens grammatik

– *grupper, ringar och kroppar*

I Lasse Berglunds artikel *Hurra för roten ur a* i Nämnaren 2019:2 finns underrubriken *Kroppsutvidgning* och det gav upphov till denna uppföljande artikel som inte bara handlar om kroppar utan även om ringar och grupper.

> *One may say that the knowledge of the foreign language stands to that of the native one in the same way as knowledge of algebra stands to knowledge of arithmetic, enhancing it and turning it into a concrete application of the general algebraic laws. The child's approach to language becomes more abstract and generalized. As algebra liberates the child from the domination of concrete figures and elevates him to the level of generalizations, the acquisition of foreign language – in its own peculiar way – liberates him from the dependence on concrete linguistic forms and expressions.*
>
> (Vygotsky, 1962, s 169)

Vygotsky menar att algebra är för matematik vad grammatik är för språk. Utan algebra finns inga möjligheter att abstrahera och generalisera matematik. För att sätta det här i perspektiv måste man förstå Vygotskys förtjusning för systematiskt ordnad kunskap, som han kallade för vetenskaplig kunskap. Sådan kunskap som barn nästan bara träffar på genom att bli undervisade. Ett av Vygotskys starkaste budskap är att undervisad kunskap av det här slaget utvecklar individen intellektuellt och också omorganiserar den kunskap som eleven har tillägnat sig utan formell undervisning.

Den här texten handlar om tal. Även om beräkningar med tal, aritmetik, lite från ovan nog framstår som mycket välordnad så är det egentligen inte förrän man framställer den i algebrans språk som denna systematik kommer fram. Det är det som Vygotsky pratar om. Med algebra menar vi inte det som står i kursplanen om obekanta tal utan snarare det som vi ska nosa på här: att beteckna räkneoperationer i sin generella form. Vi ska göra detta genom att exemplifiera med det matematiska objektet rationella tal, och de algebraiska begreppen grupper, ringar och kroppar.

Algebraiska egenskaper

Rationella tal och deras egenskaper, står det under kursplanens rubrik Centralt innehåll, för årskurs 4–6. Det förpliktigar. För vad är egentligen de rationella talens egenskaper? Det finns ett nästan helt exakt svar på det, om man bara undviker att försöka svara på vad ett tal är, för det är svårare.

Rationella talen $\mathbb{Q}$ är en mängd tillsammans med de två operationerna addition och multiplikation som har följande egenskaper:

1. det går att addera vilka två tal som helst och det ger alltid ett nytt tal i mängden
2. det går även att multiplicera två tal och erhålla ett nytt tal i mängden
3. addition och multiplikation är associativa operationer, dvs $a+(b+c)=(a+b)+c$ och $a(bc)=(ab)c$
4. de är även kommutativa, dvs $a+b=b+a$ och $ab=ba$
5. addition och multiplikation hänger samman via den distributiva lagen: $a(b+c)=ab+bc$
6. det finns ett additivt neutralt element, nämligen 0 som har egenskapen att $a+0=a$ för alla tal
7. det finns också ett multiplikativt neutralt element, nämligen 1 med egenskapen att $a \cdot 1=a$ för alla tal a
8. alla tal a har en additiv invers som om man adderar den till a ger 0, det additiva neutrala elementet och det går att beteckna detta tal med $-a$
9. slutligen har alla tal a utom 0 en multiplikativ invers som om man multiplicerar den med a ger det neutrala elementet 1 och inversen till a kan vi skriva som $1/a$ eller a^{-1}.

Kroppar

Det är exakt dessa elva egenskaper som gör $\mathbb{Q}$ till en kropp. Det blir elva egenskaper eftersom punkt 3 och 4 gäller både addition och multiplikation. En kropp är rent allmänt en mängd med två operationer som har alla egenskaperna som beskrivs ovan. Ett annat sätt att säga det här är att en kropp tillåter addition, subtraktion, multiplikation och division med alla tal i mängden (förutom division med 0). Det är bara det att rent formellt behövs inte subtraktion och division, för subtraktion av a är addition med $-a$ och division med b är multiplikation med b^{-1}.

Det var i slutet av 1700-talet som matematiker började att undersöka olika exempel på det som så småningom kom att kallas *kroppar* (först Körper på tyska och lite senare field på engelska) och det tog drygt 100 år innan den helt strikta och abstrakta formuleringen stod klar. Till en början var inte önskan att formalisera de rationella talens egenskaper. Man visste redan rent praktiskt hur man räknade med rationella tal och matematiken hade då inte nått den fas där abstrakta eller formella versioner av olika konkreta matematiska fenomen var i fokus. Det var när Joseph-Louis Lagrange arbetade med lösningar till tredjegradsekvationer som han konstruerade vissa exempel på kroppar, dvs det som senare kom att kallas kroppar. Detta arbete utvecklades så småningom av Evariste Galois, men inte heller han formulerade en formell teori för kroppar. Kanske för att han förlorade en duell och dog endast 21 år gammal. Han hann kanske inte tänka tillräckligt länge på kroppar och kroppsutvidgningar.

Grupper och ringar

Formellt så är en kropp en av de enklaste abstrakta algebraiska strukturerna. Ofta brukar man säga att den enklaste är en *grupp*. Om du tar alla egenskaper för $\mathbb{Q}$ som vi listade ovan som bara har med additiva aspekter att göra, då har du definitionen av vad som är en (kommutativ) grupp (skriv gärna en egen lista och jämför med Wikipedia). En grupp är alltså en mängd med en operation och en uppsättning regler som denna operation ska uppfylla. Om du har en grupp och lägger till en ytterligare operation, som uppför sig distributivt men inte nödvändigtvis har några inverser, då har du en *ring*. En kropp är alltså som en finare slags ring där båda operationerna har inverser. De positiva heltalen 0, 1, 2, 3, 4, … ihop med addition är ingen grupp, för det finns inga (additiva) inverser. Om vi däremot betraktar heltalen, dvs både positiva och negativa heltal tillsammans, så bildar de en grupp eftersom vi nu har additiva inverser till alla tal. Heltalen är också en ring, eftersom vi även där kan definiera operationen multiplikation. Men de kvalar inte in som kropp, för det finns inga multiplikativa inverser till de hela talen i ringen.

Det tar oss tillbaka till $\mathbb{Q}$. När elever stöter på rationella tal i skolan är det ofta först som bråk, där t ex symbolen ½ får beteckna hälften av något. Så gör man inte i den abstrakta algebran. Där har inte de rationella talen något annat ursprung än att omfatta de multiplikativa inverserna till de hela talen, vilket ger den minsta möjliga kropp som innehåller ringen av heltal. Man skapar helt enkelt $\mathbb{Q}$ genom att lägga till multiplikativa inverser till alla tal och sedan kontrollera att konstruktionen fungerar utan motsägelser.

Det här borde uppmärksammas mer i skolan. $\mathbb{Q}$ är inte skapad för att vi ska kunna benämna bråkdelar utan för att vi ska vinna möjligheten att hantera multiplikation på ett flexibelt sätt. Det är absurt att elever, enligt kursplaner och i matematikläroböcker, inte börjar att multiplicera rationella tal (och andra tal i bråkform och övriga kvotkonstruktioner) direkt när de stöter på dem. Istället får de vänta tills framåt högstadiet, vilket vi starkt ifrågasätter. Egentligen borde elever mycket tidigare utmanas att börja tänka algebraiskt. Och det är faktiskt inte svårt, bara man själv i Vygotskys anda befriar sig från de konkreta figurernas dominans och lyfter sig till nivån av generaliseringar.

Häromdagen provade vi det här på barn och vuxna, från 9 års ålder och upp emot 50 år. Vi frågade: *Vad ska man multiplicera 7 med för att få 8?* Ingen kunde svara, fastän de tänkte efter ordentligt. Det här är i själva verket inte ovanligt vare sig för skolelever eller gemene man. Men det går att förklara på några få minuter i t ex en femteklass att det är 8/7 vi söker. Man kan förankra en sådan förklaring i reglerna för bråkmultiplikation och relationen mellan bråk, multiplikation och division, inklusive vad det betyder att förkorta, dvs i ett antal aritmetiska relationer. Och det intressanta med en sådan förklaring är att i praktiken kan alla yngre elever direkt efter svara på frågan: Vad ska vi multiplicera a med för att få b?

– Det blir b a-delar.

Det är kraftfull kunskap. Det är algebra!

LITTERATUR

Svensson, P-A. (2001). *Abstrakt algebra*. Lund: Studentlitteratur.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language* (Översatt till engelska av Alex Kozulin). Cambridge: MIT Press.