

Matematik i soffan

– kombinatorik i förskoleklass

Intressanta elevsamtal uppstår när olika färgade björnar ska kombineras. Ett systematiskt utforskande i en välkänd kontext leder till resonemang och argumentation i arbetet. Elevernas egna dokumentationer visar att de både använder och går mellan olika representationsformer.

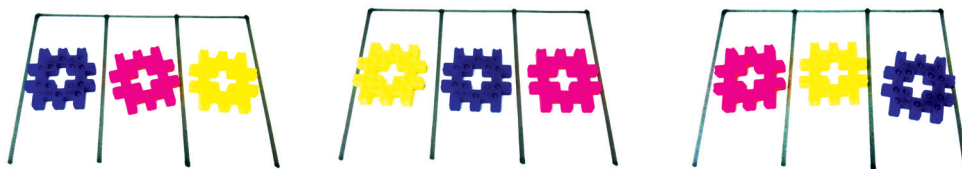
På hur många olika sätt kan man kombinera tre smaker i en kulglass? På hur många olika sätt kan man kombinera två par byxor med tre tröjor? Frågorna utgår från två relativt vanliga kontexter för formell introduktion i kombinatorik. I den här artikeln vill vi dela med oss av erfarenheter från projektet *Problemlösning i förskoleklass*. En av de genomförda problemlösningssuppgifterna med matematikinnehållet kombinatorik var följande:

På hur många olika sätt kan tre björnar sitta i en soffa?

Totalt arbetade vi med åtta förskoleklasser och cirka 145 elever. Just denna uppgift genomfördes av 87 elever. Vi berättar här om genomförandet, analys av elevlösningar samt om en digital vidareutveckling av uppgiften.

Kontextens betydelse

Problemuppgiften introducerades genom att vi berättade om tre björnar som ville sitta i en soffa med tre platser. Kontexten blev således en välkänd situation vilket Geetha Ramani och Celia Brownell har visat påverkar elever positivt när det gäller engagemang, lärande och samarbete. I ett tidigare projekt i förskoleklass använde Hanna Palmér och Andreas Ebbelind en kombinatorikuppgift kopplad till tre olika färgade bilar som skulle ställas bredvid varandra i ett garage. Tre elever fick då agerande bilar som "parkerade sig" i garaget, vilket bestod av tre stolar. På en interaktiv skrivtavla fick de bokföra genom att parkera "sin bil" på motsvarande ställe där de själva hade suttit. Engagemanget var stort men vid genomförandet verkade eleverna som agerade bil inte ha samma överblick över möjliga lösningar som de elever som var publik. Eleverna som agerade bilar utgick oftast enbart ifrån sig själva och om de hade suttit på de tre olika stolarna så var de nöjda. Det resulterade i att de många gånger ansåg sig klara med uppgiften efter att ha hittat tre av de sex olika möjligheterna, så som "bilarna" på bilderna här nedan.



När fler sätt efterfrågades kunde eleverna ge förslag som att sätta sig under stolen, att parkera baklänges eller sidledes. Kanske var det upplägget, kanske kontexten som försvårade för elever att veta vad de skulle fokusera på, vilket även Niklas Pramling och Ingrid Pramling Samuelsson kom fram till när de analyserade förskolebarnens illustrationer till (räkne)sagor. Vad betyder det att parkera en bil på olika sätt?

Glassexemplet i inledningen kan ge liknande kontextberoende problem. Är en glass med en kula citronglass och en kula jordgubbsglass "samma glass" som en glass med en kula jordgubbsglass och en kula citronglass, eller är det två olika glassar? Kontexten med björnar i en soffa valde vi för att den förhoppningsvis skulle vara mer bekant för eleverna än att parkera bilar och för att undvika de kontextproblem vi hade upplevt tidigare.

På hur många sätt kan tre björnar sitta i en soffa?

Problemuppgiften introducerades för eleverna och illustrerades med hjälp av tre plastbjörnar i tre olika färger. Eleverna fick var sitt papper för att dokumentera sina lösningar. Eleverna jobbade först enskilt, sedan parades de ihop för att jämföra sina lösningar. Under både det enskilda arbetet och pararbetet pågick många intressanta elevsamtal. Ett exempel är en elev som satt för sig själv och pratade intensivt med björnarna: *Nej nu är det din tur att sitta i mitten och du får blåis och gulis som kompisar bredvid dig. Så, det var roligt, nu är det blåis tur att sitta här...* Ett annat exempel är två elever som jämförde sina lösningar och upptäckte att lösningarna var olika, *fast om vi vänder på mitt blad är de lika.*



Slutligen genomfördes en helklassdiskussion med fokus på två delar:

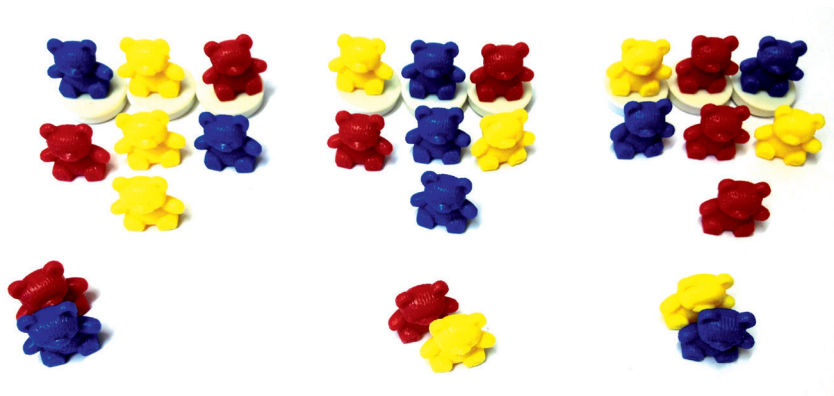
1. lösningar och det matematiska innehållet
2. olika sätt att dokumentera sin lösning.



Hur många lösningar hittade eleverna?

Uppgiften var svår för eleverna och i det enskilda arbetet var det enbart två elever som hittade samtliga sex kombinationer. Hur går man tillväga när man vill prata med dessa unga elever om det matematiska innehållet? Kan elever i förskoleklass hantera ett matematiskt innehåll som vanligtvis ligger några årskurser högre? Vi valde att strukturerat gå igenom de möjliga lösningarna med eleverna utifrån deras dokumentationer. Först ställde vi fram björnar som visade en lösning utifrån en elevs förslag.

Eleverna fick sedan föreslå en ny lösning, med en annan björn i mitten. Sedan en till med ytterligare en ny björn i mitten. På följdfrågan om det fanns fler björnar som kunde sitta i mitten kunde eleverna motivera varför det inte var möjligt. Det resonemanget kunde de använda igen, lite senare. När dessa tre kombinationer var framställda fick eleverna frågan om de kunde hitta ännu ett nytt sätt att ställa björnarna på. Beroende på vilket förslag eleven gav ställdes det framför den kombination som hade en björn av samma färg i mitten. Framför den första lösningen med en blå björn i mitten ställs en ny lösning med en blå björn i mitten.



Att tydliggöra en struktur för elever gör att några av dem direkt kan komma med förslag på ytterligare en kombination, och en till ... Med sex olika kombinationer framför sig uppstår den spännande frågan: finns det fler sätt? Resonemang, liknande det som användes för att förklara varför inte fler olika björnar kunde sitta i mitten, framfördes nu för att motivera varför det inte kan finnas fler kombinationer.

Målet med den här delen av lektionen var inte att förklara att man kan räkna ut antal kombinationer genom att använda sig av fakultetsräkning ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$) utan att ge eleverna erfarenhet av systematiskt utforskande samt att de fick argumentera för att de hade hittat alla kombinationer – eller inte.

Representationer

Elevernas dokumentationer erbjöd möjlighet att dels titta på hur de hade valt att *strukturera* sina lösningar, dels att titta på *abstraktionen* i deras representationer. Flera forskare har försökt beskriva och schematisera olika representationsformer: Piaget skriver till exempel om "symbols" och "signs", där symbols är (elevers) egna och signs är konventionella. Heddens är en av dem som tidigare har skrivit om halvkonkret och halvabstrakt medan Hughes delar in i "pictographic", "iconic" och "symbolic". I vår artikel *Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task* har vi beskrivit detta och vi valde att titta på representationerna i termer av *konkret – halvkonkret – halvabstrakt – abstrakt*. Dokumentationsformen stimulerade eleverna att starta på den halvkonkreta nivån. Vi kunde se att ett fåtal elever växlade mellan halvkonkreta och halvabstrakta representationer och i en pågående följdstudie har vi även sett enstaka fall av abstrakt nivå där elever använder bokstäver fast fortfarande i korresponderande färger.

Konkret	Fysiska björnar/ plastbjörnar	
Halvkonkret	Avbilda björnar (rita av/rita egna)	
Halvabstrakt	Prick/streck el dyl i samma färg som björnen	
Abstrakt	Symboler (tex bokstäver)	

Representationer kopplat till lösningar

När vi tittade på eventuella samband mellan abstraktionen i representationerna och elevernas lösningar fick vi ett intressant resultat att fundera kring. Det visade sig finnas skillnader om eleverna använde sig av ett halvkonkret eller halvabstrakt sätt att dokumentera. Från de 87 elever där vi har elevdokumentation, såg vi följande:

		Halv- konkret	Växling halvkon- kret-halvabstrakt	Halv- abstrakt
Inga nya kombinationer	Eleven har enbart ritat kombinationen som visats i introduktionen av läraren	3		2
Unika kombinationer A	Eleven har ritat unika kombinationer, dock inte alla.	15 (4)	8 (3)	24 (10)
Unika kombinationer B	Eleven har ritat alla 6 unika kombinationer och inga dubbletter.			2
Dubbletter	Eleven har ritat flera olika kombinationer där vissa är dubbletter.	3		30 (1)
Totalt		21	8	58

Antalet i parentes anger hur många elever som hade unika kombinationer på så sätt att alla björnar hade suttit på ett ställe en gång. En sådan dokumentation kan, som i "Unika kombinationer A", tyda på att eleven tolkat "annat sätt" som att inget i den nya kombinationen får vara likt de tidigare kombinationerna. Det indikerar även någon form av systematisering.

Vidare kunde vise att ett antal elever växlade från halvkonkret till halvabstrakt. Det vi fann intressant var att dubletter förekom i mycket större utsträckning hos elever som använde sig av en halvabstrakt representation. Olika anledningar till detta har vi reflekterat över. En möjlig orsak skulle kunna vara att det går mycket fortare att rita en prick än en björn och därmed skulle det snabbare bli fler möjligheter. En annan möjlighet är att eleverna som ritar björnar, dvs en halvkonkret representation, inte har lämnat kontexten på samma sätt och är närmare problemet, vilket var på hur många olika sätt björnarna kan sitta. För några av de elever som ritar prickar kan uppgiften ha utvecklats till att rita tre prickar av olika färg på rad.



Att anpassa problemet

Efter projektets första genomförande såg vi behov av att anpassa problemet både för att förenkla och fördjupa. Några sätt att förenkla inom samma kontext var att hålla sig till två björnar på en tresitssoffa, eller tre björnar på en tvåsitssoffa. Sådana anpassningar gör det möjligt att återkomma till ett liknande problem men där eleverna inte nödvändigtvis direkt ser att det kommer att finnas sex lösningar igen.



Två björnar på en tvåsitssoffa blir inte givande eftersom en systematisering av kombinationerna inte är möjligt.

En fördjupning av problemet är möjligt genom att utvidga antal björnar eller soffplatser. Fyra björnar på en tresitssoffa, eller fyra på en fyrsitssoffa. Men även fyra björnar på en tvåsitssoffa!



En digital variant

Under våren 2016 hade vi möjlighet att göra en digital variant av uppgiften, där dessa möjligheter till förenkling och fördjupning av problemet finns inbyggda i applikationen CombiBears, www2.kau.se/jorrbomm. Lärare och elever kan nu välja hur många platser som ska finnas i soffan och hur många björnar som ska sitta där. Efter varje genomförd kombination kan eleverna spara sina lösningar genom att "ta kort" och slutligen jämföra korten systematiskt för att se om de har hittat alla kombinationer eller inte.

I projektet är nästa steg att studera om den systematiska delen av att hitta kombinationer kan utmanas mer effektivt genom den digitala versionen. Den halvkonkreta situationen i applikationen ska testas och vi vill veta om elever kommer att kunna ta steget till ett systematiskt sätt att hitta kombinationerna. Att sedan kunna gå till nästa nivå – halvabstrakt, verkar vara ett logiskt steg, men inte förrän systematiken först har fått stå i fokus.

LITTERATUR

- Palmér, H. & Ebbelind, A. (2012). Matematiklärande. I Herrlin, K., Frank, E. & Ackesjö, H. (red). *Förskoleklassens didaktik. Möjligheter och utmaningar*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Palmér, H. & van Bommel J. (2016). *Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task*. Paper presenterat på Madif 10, Karlstad.
- Pramling, N. & Pramling Samuelsson, I. (2008). Identifying and solving problems: Making sense of basic mathematics through storytelling in the pre-school class. *International Journal of Early Childhood*, 40(1), 65–79.
- Ramani, G.B. & Brownell, C.A. (2014). Preschoolers' cooperative problem solving: Integrating play and problem solving. *Journal of Early Childhood Research*, 12(1), 92–108.

Projektet i sin helhet beskrivs i boken *Problemlösning som utgångspunkt – Matematikundervisning i förskoleklass*, se Vi har läst i detta nummer, sid 59.

Konferens: Tänka, resonera och räkna i förskoleklassen

4, 5 & 13 oktober. Än finns det platser kvar.

ncm.gu.se