Maria Alkhede & Camilla Björklund

# Strumpor, symboler och strukturer

## – *algebra i förskolan och i förskoleklassen*

Matematik har sedan revideringen av förskolans läroplan varit ett framträdande innehåll i förskolan, men målet för lärande och hur undervisningen iscensätts är en öppen fråga. Författarna tar algebra som exempel på matematikinnehåll i förskolan och förskoleklassen och menar att det är viktigt att först närma sig innehållet och fråga sig vad algebra innebär för yngre barn, för att vidare förvalta och utveckla deras begynnande färdigheter.

*Inte ska väl småbarn syssla med något så svårt som algebra – vad skulle det vara bra för?* Citatet är fiktivt men speglar en förekommande bild av algebra som något som inte berör yngre barn och därför inte har en roll som innehåll i pedagogisk verksamhet för dem. Uppfattningen kan ha sin grund i att förskollärare inte är matematiklärare, de är snarare generalister med ansvar för att varje barn bereds möjlighet att utvecklas inom alla kunskapsområden – och därtill i en tematisk verksamhet som ska vara målorienterad samtidigt som den är lekbaserad och lärandet ska ske i integrerade helheter.

Specialiserad kunskap inom olika matematikområden är därför inte något som förväntas av förskollärare, även om många goda exempel också finns där förskollärare utvecklat sin matematikdidaktiska kompetens antingen av eget intresse eller inspirerade av t ex kollegor i grundskolan eller matematikutvecklare i kommunen. Samtidigt vet vi från forskning att barns grundläggande färdigheter och särskilt förståelse för samband och principer är viktiga som grund i skolans matematikundervisning, varför arbetet med dessa grunder är nödvändiga att synliggöra redan tidigt. I den här artikeln vill vi bidra till att belysa hur algebra, som ett exempel på matematikinnehåll i förskolan och förskoleklassen, kan förstås och utgöra ett innehåll för lärande. Vi vill med andra ord bryta föreställningen om att yngre barn inte ska befatta sig med algebra och lyfta fram hur lärandet kan berikas av ett fördjupat matematikinnehåll som i högsta grad är en nödvändighet även för de yngsta i vårt utbildningssystem.

### Hur förstår vi algebra?

I *Algebra för alla* kan vi läsa att algebra är ett verktyg för tänkande som möjliggör för barn att upptäcka enkelheten och strukturen i komplexa sammanhang, samt generalitet ur specifika fall. Mer explicit är algebra, enligt Zalman Usiskin, ett problemlösningsverktyg, generaliserad aritmetik samt studier av samband och struktur. Algebra ingår därmed i många avancerade matematiska sammanhang, vilket kan göra det svårt att tänka att algebra berör yngre barn. Vi menar att algebra mycket väl kan omfatta också yngre barns kunnande och färdigheter, i och med att ”komplexa sammanhang” är relativt den som erfar sammanhanget. För en fyraåring är sammanhang där man dubblerar och halverar komplexa, medan äldre skolbarn förhoppningsvis med lätthet hanterar och generaliserar innebörden av hälften och dubbelt.

För att förstå algebra för yngre barn beskrivs det ibland ur ett progressivt kunskapsperspektiv, där innehållet bryts ner i abstraktionsnivåer. Så kallad *pre-algebra* handlar om att hitta mönster och söka strukturer i såväl geometri som tal och studera samband till exempel i innebörden av likhetstecknet. *Inledande algebra* kan sägas innefatta att arbeta med symboler eller bokstäver som representationer för det obekanta. En fullt *utvecklad algebra* förutsätter även förmågor att översätta från konkreta händelser till symboler och formella uttryck samt att urskilja strukturer som kan förenkla uttrycken. Därför kan barn som saknar undervisning om formella uttryck och det matematiska symbolspråket inte heller förväntas hantera algebra fullt ut. I fortsättningen väljer vi att prata om *algebra* men bär med oss att vi i förskolan och förskoleklassen arbetar med barns mest grundläggande färdigheter och förmågor inom det algebraiska kunskapsinnehållet.

*”Alla mönster är inte matematiska*

Grundläggande principer som att en symbol kan representera något konkret är inte en självklarhet för alla förskolebarn. Fyraåringen räknar med lätthet antalet ljus på tårtan, men kan ha svårigheter att se hur fingrar eller streck på ett papper kan räknas istället för ljusen som kanske inte finns tillgängliga utan bara ingår i ett muntligt presenterat tårtproblem. Men vi kan också se yngre barn hantera grundläggande idéer av mönster och skapa egna symboler, som nödvändiga aspekter av algebraisk förmåga. Algebra beskrivs ibland något missvisande som ”bokstavsräkning”, men i synnerhet när vi pratar om algebra i förskola och förskoleklass kunde man hellre närma sig algebra genom andra symboler och fånga upp *vad* symboler kan betyda och i vilka sammanhang de används.

Algebra är inte framskrivet i läroplanen för förskolan, men vi kan läsa att barn ska ges möjligheter att utveckla sina förmågor att urskilja, uttrycka, undersöka och använda matematiska begrepp och samband mellan begrepp, samt att undersöka, reflektera över och pröva olika lösningar av egna och andras problemställningar, samt föra och följa resonemang. I förskoleklassens läroplan från 2016 skrivs däremot mönster fram som del i ett centralt innehåll utöver problemlösning, uttrycksformer och tals egenskaper. Här finns också anledning att knyta an till avsnittet om algebra för åk 1–3, där ”matematiska likheter och likhetstecknets betydelse” nämns uttryckligen, samt ”hur enkla mönster i talföljder och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.” Steget från förskolans till skolans algebra är därmed inte alls så stort.

## Hur algebra blir ett innehåll för yngre barns lärande

I *Learning concepts through the history of mathematics: The case of symbolic algebra* definierar Albrecht Heeffer algebra som ett analytiskt redskap för att lösa problem där man ersätter en obekant mängd med generella abstrakta enheter, till exempel bokstäver eller figurer. Tänker vi algebra i de här termerna blir kopplingen till mönster tydlig i och med idén om en struktur som man kan urskilja och dessutom förutsäga fortsättning på. Här är det dock på sin plats att lyfta en vanligt förekommande missuppfattning: alla mönster är inte matematiska mönster!

I en förskoleklass pratade barn och lärare om mönster på sin dagliga samling. Barnen kom att tänka på sina strumpor och läraren frågade vem som hade liknande mönster och de fann både randiga och prickiga strumpor bland barnen. Man kan väl säga att läraren fångade upp den vardagliga föreställningen om mönster, det vill säga former och färger som ofta förekommer på kläder, där tekniker för att väva tyg eller sticka strumpor inbjuder till en regelbundenhet av ränder, prickar eller färgkombinationer. Förutsättningen för att förstå idén med matematiska mönster torde ligga i att urskilja likheter och skillnader i det vi kallar mönster, såsom när en flicka tittar på sin klänning med olika figurer och letar efter en viss figur, var den kommer igen och igen på tyget. Men ännu pratar barnen och läraren inte om matematiska mönster. Barnen övergår till att sortera lika stora knappar i två olika färger och plötsligt öppnas möjligheten att synliggöra vad det är som gör att det blir ett mönster: någon del upprepas på ett visst sätt och det gör att de kan förutse hur mönstret ska se ut. De matematiska aspekterna av mönster tillåts framträda, vilket var mycket svårt att urskilja när allt möjligt varierade: strumpor, sockor, klänningar och former, färger och rändernas tjocklek.

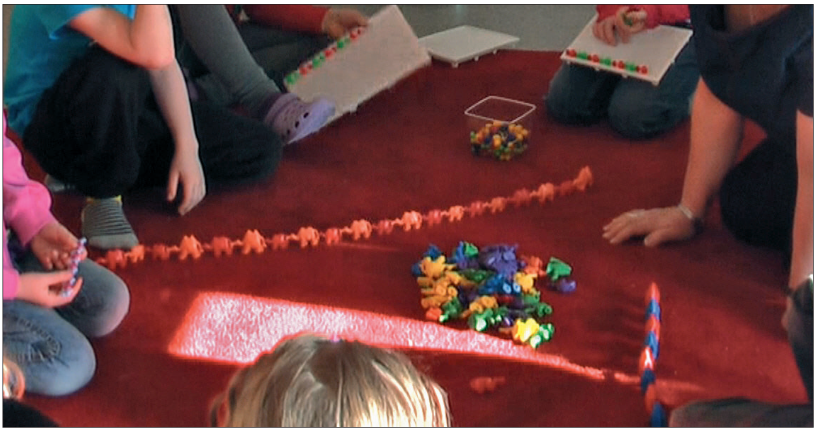
När vi pratar om mönster som grund för en mer utvecklad algebraisk förståelse, innebär det att övergå från att prata om specifika delar till att urskilja och generalisera samband. Enligt Luis Radford utvecklas inte den förmågan spontant utan förutsätter att en lärare introducerar principer för att upptäcka och generalisera dessa samband. Även om man ofta arbetar med mönster som förstudier till algebra, blir mönstren lätt kvar i det konkreta utforskandet. Det konkreta utforskandet är i sig en nödvändighet för att upptäcka idéer om regelbundenhet och som kanske med nödvändighet behöver upptäckas visuellt av de flesta barn innan det kan begripas som en abstrakt idé.

## Mönster och generaliseringar

Att upptäcka, undersöka och skapa mönster är enligt många matematikdidaktiker ett betydelsefullt innehåll i matematikundervisning. Kanske för att mönster ofta förekommer i vardagliga sammanhang, men för att kopplingen till algebra ska bli synlig bör fokus läggas på de strukturer som kan urskiljas i mönstren. Algebra handlar på så sätt om att översätta det konkreta och att generalisera. I *Algebra för alla* beskrivs tre faser i arbete med algebra där

- det första är *översättning* – en händelse översätts till ett uttryck med symboler
- sedan *omskrivning* – uttrycket bearbetas och förenklas
- slutligen *tolkning* – uttrycket tolkas till vanligt språk och förstås som en lösning på ett problem.

Bland yngre barn kan detta förstås på följande sätt: ett mönster där varannan snäcka har olika form kan ”översättas” med två färger på klossar som ordnas enligt samma regel – varannan. Översättningen blir också en förenkling där idén om varannan lättare ses och förklaras när de ursprungliga snäckornas oregelbundna former och nyanser i färg och storlek förbises. Förenklingen riktar uppmärksamheten mot regeln och gör det möjligt att tolka och tillämpa samma generaliserade idé i vilka sammanhang som helst. Konkreta material visualiserar regelbundenheter som annars kan vara svåra att urskilja, men också i det konkreta kan olika samband stå i förgrunden eller i bakgrunden. Vilket står då i förgrunden och är relevant för den problemlösning man aktualiserar? I ett förskoleklassprojekt där man arbetade med mönster uttryckte ett barn att han och kompisen hade gjort likadana mönster av gummi-kameler, men kompisen protesterade: den ena hade gjort en rad av röda och blå kameler i ordningen R-B-R-B-R-B i samma storlek, medan den andra hade gjort en rad av röda och gula kameler där både storlek och färg varierade i ordningen r-G-r-G-r-G. Barnets protest grundade sig i att han urskilde storleken som del i regeln medan kompisen inte alls hade beaktat storleken, även om det var en synlig del av mönstret. Samtidigt var båda barnen överens om att färgkombinationen "varannan" var likadan för deras båda mönster även om de använde olika färger. Hur samband urskiljs och uttrycks blir därför en betydelsefull insikt för att förstå den generaliserande aspekten av mönster.



*Kameler på rad med olika varianter av regelbundenhet.*

Med stöd av Ferdinand Rivera hävdar vi att strukturer och samband kan uppmärksammas av såväl yngre som äldre barn, men det tar sig ofta olika uttryck, där konkreta mönster och algebraiska uttryck kan ses som två ytterligheter. På följande bild har Vidar på eget initiativ skapat ett mönster av siffersymboler han tryckt fram på miniräknaren. Som vuxna urskiljer vi andra regelbundenheter än barnet och kan se olika sätt att tolka mönstret. För yngre barn är utmaningen att konstruera egna mönster ofta stor eftersom barnet behöver skapa en idé som inbegriper ett samband mellan delar och upprepa samma sammansättning av delar. För de allra yngsta barnen i förskolan är sortering och kategorisering – att urskilja likheter och olikheter – utmaning nog, men samtidigt en förutsättning för att bestämma regler när man konstruerar mönster.

*Vidar, 4 år, säger att han har slagit in ett "mönster på miniräknaren" – han uttrycker själv inget matematiskt samband mellan talen som syns i skärmen, även om det också hade kunnat uppmärksammas, men grafiskt är det en systematisk upprepning som bildar ett mönster.*

## Algebraiska uttrycksformer

Barn kan ofta ses göra långa rader av föremål ordnade i regelbundna mönster. Samtidigt är det för yngre barn svårt att uttrycka regelbundenheten eller regeln som de följer i ord eller grafiskt. Det behövs då andra uttryck för att visa på regeln, det vill säga att beskriva det abstrakta sambandet – algebra. Genom att exempelvis rytmiskt betona de egenskaper som mönster byggs upp av ”röd kamel–gul kamel–röd kamel–gul kamel” gestaltas mönstret som en repetitiv ramsa. För att ytterligare poängtera delarna som bygger upp regelbundenheten, kan ett tydligt rytmiskt mönster ge stöd: ”Röd–gul [paus] röd–gul [paus] röd–gul”.

Som tidigare nämndes är det ingen självklarhet för förskolebarn att ett objekt kan bära innebörden av något annat, så som en skriven siffersymbol representerar ett antal föremål, ännu mindre att en bokstav kan ha betydelsen olika antal. Barn lär sig tidigt att bokstäver och siffror används i *olika* sammanhang och har därför vanligtvis väsensskilda betydelser. I algebra löser man i stället upp dessa gränser. När barn uppmanas att representera eller ”skriva på papper” ett antal föremål, avbildar de yngsta barnen ofta föremålen exakt eller ritar runt det som ska representeras grafiskt. Att hantera abstrakta symboler eller bokstäver är därför en process som med nödvändighet behöver ha sin grund i konkret utforskande av sinnligt erfarna strukturer. Fingrarna fungerar ofta som ett första steg i att representera antal.

Ett och samma problem kan oftast lösas med stöd av olika uttrycksformer: i bild, verbalt, numeriskt eller symboliskt. Ofta samverkar flera uttrycksformer, till exempel att barn berättar om ett numeriskt samband i en bild de ritat där också symboler förekommer. Vilken form som väljs beror på barns erfarenheter av liknande problemlösning, men i synnerhet på barns förmåga att översätta och generalisera delarna i problemet. För att lösa problemet ”Mormor har många hönor och en katt. Djuren har 20 ben tillsammans. Hur många hönor har mormor?” kan fyra uttryck användas:

- *I bild:* Djuren ritas detaljerat på ett papper och olika lösningsförslag prövas där antal ben är synliga. Ett algebraiskt resonemang skulle här rikta uppmärksamheten mot de tre delar som problemet innefattar: kattens ben (som inte ska räknas med i svaret), hönorna som har två ben vardera och det totala antalet ben för både katt och hönor.
- *Verbalt:* Problemet har en verbal dimension som förutsätter uppmärksamhet på vad man frågar efter. Utmaningen i vårt problem ligger till exempel i att urskilja om det är antalet hönor eller ben som efterfrågas.
- *Numeriskt:* Problemet kan uttryckas och prövas numeriskt med siffersymboler där man adderar kattens fyra ben med hönornas två ben genom att skriva ner $4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ tills summan är 20. Lösningen på problemet får man då genom att räkna antalet tvåor. Det innebär att man måste skilja mellan representationens (siffrornas) numeriska innebörd och representationen som en enhet att räkna (antalet siffersymboler).
- *Symboliskt:* I den mest raffinerade formen får symboler och inte minst likhetstecknet en betydelsefull roll uttryckt som $2x + 4 = 20$ där det obekanta har ersatts med en bokstavssymbol.

Sätten att uttrycka sambanden ser olika ut beroende på förmågan att hantera abstrakta representationer men gemensamt är att sambanden behöver synliggöras på något sätt och en regel upptäckas för att lösa problemet. Bildliga och verbala uttryck kan hanteras av yngre barn men numeriska och symboliska uttryck förutsätter en fördjupad förståelse av tal och räkneprinciper.

## Att använda algebra

I början av texten sades att algebra är ett redskap för tänkande och problemlösning, vilket vi också kan se exempel på i verksamhet med yngre barn. I en förskola arbetade de systematiskt med mönster som ett innehåll i olika temaarbeten. De undersökte grundläggande aspekter av mönster, hur mönster byggs upp och även hur mönster kunde användas. Ett exempel är symboler för musikinstrument eller ljud som grafiska bilder. Barnen gjorde egna mönster av bilderna och spelade upp dem tillsammans. De utvecklade förmågor att dels representera ljud eller musikaliska uttryck – bilden av en trumma kunde tolkas både som att spela på en trumma eller klappa händerna mot knäna – och dels skapa regelbundenheter i ordningen så att de kunde förutse vad som skulle spelas som nästa moment.

*Mönster som representerar musikaliska uttryck, ordnade efter en bestämd regel.*

Det är lätt att se möjligheterna att arbeta med mönster, men svårare att beskriva hur detta i praktiken leder till mer utvecklad algebra på ett begripligt sätt i förskolan och förskoleklassen. En möjlighet kan vara att arbeta med problemlösning, där det blir nödvändigt att representera problemets delar för att problemet ska bli begripligt och möjligt att lösa, det vill säga att se problemet ”framför sig”. En del föredrar att använda bilder och hanterar problemet väldigt konkret, medan andra gärna använder symboler. Här vill vi än en gång poängtera nödvändigheten av att barnen ”går med på” att föremål eller händelser kan gestaltas på annat sätt än genom de konkreta objekten i sig – fyra fingrar är inte bara fyra stycken fingrar utan kan också representera antalet ben på en katt.

I förskolan och förskoleklassen möter barn i olika sammanhang problem där uppgiften handlar om att ta reda på en obekant del eller helhet. *Om det är fem barn på rutschkanan och det kommer två till, hur många är ni då tillsammans?* Ett motsvarande uttryck i skrift visar på en förändring: $5 + 2 = \_\_$. Däremot möter barn i förskolan mera sällan utmaningar som frågar efter likvärda antal på båda sidor om likhetstecknet, som i skrift skulle uttryckas som 3 + __ = 5 men muntligt: *Vi ska duka bordet till fem barn, det står redan tre tallrikar på bordet, hur många fler tallrikar behöver vi hämta för att alla ska få var sin?* Anthony Furness och Lisa Björklund Boistrup uttrycker detta så vackert som symmetri kring likhetstecknet, där innebörden har karaktären av att söka balans och motsvarigheter. Likhetstecknets betydelse är fundamental i såväl aritmetiska som algebraiska problemlösningssammanhang, där en tydlig skillnad märks i om barn uppfattar likhetstecknet som att något ”blir” eller som likvärda betydelser på båda sidor om tecknet. Den form av problemlösning som barnen erbjuds skapar följaktligen också olika tolkningsmöjligheter av dels problemets ingående delar och dels av de symboler som kan uttrycka problemet.

En annan innebörd av likhetstecknet där själva symbolen får en mer framträdande roll undersöks till exempel genom språket, i betydelsen ”sanning”: katten har fyra ben ”katt = 4 ben”, hönan har fyra ben ”höna ≠ 4 ben”. Även i förskolan är symbolerna vi använder i algebra närvarande, men inte alltid uttryckta grafiskt. Balansvågen är ett vanligt exempel för att illustrera symmetri och likhet, och kan fungera som en övergång till de grafiska uttrycken.

## Ska små barn syssla med algebra?

Vi hävdar mot bakgrund av både vetenskap och beprövad erfarenhet att barn de facto sysslar med grundläggande aspekter av algebra från tidig ålder och möter många tillfällen där deras begynnande kunnande kan utvecklas. Frågan är snarare hur lärare i förskolan och förskoleklassen känner igen och följer upp barnens resonemang och uttryck som just grund för algebra. Lärares förståelse för vad algebrakunskaper bygger på och hur det tar sig uttryck bland yngre barn öppnar däremot för många goda möjligheter att erbjuda yngre barn redskap för deras tänkande och problemlösning, där regler och generalisering ger nya och framgångsrika sätt att lösa problem.

Förskolan och förskoleklassen är egna skolformer där lärandemålen har karaktären av ”sträva mot”. Det centrala i undervisningen är därmed att erbjuda barn tillfällen att möta för dem välbekanta fenomen och utveckla förståelse för dem, men också att vidga barns erfarenhetsvärld och visa på nya fenomen och sätt att uttrycka sig. Mot den bakgrunden ser vi att förskolebarn redan håller på med algebraiska resonemang i form av mönster, symmetri (likhetstecknet) och problemlösning, vilket har fullt stöd i styrdokumenten. De vuxnas roll är att förvalta och utveckla det redan pågående kunskapandet och erbjuda nya och fler sätt att förstå och använda färdigheterna.

### LITTERATUR


Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. NCM, Göteborgs universitet.

Furness, A. & Björklund Boistrup, L. (2016). *Matematikens mönster.* Stockholm: Liber.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117–133.


Besök Nämnaren på nätet för lästips och fler referenser.