Natalia Karlsson & Wiggo Kilborn

Formativ bedömning och didaktiskt stöd i matematik för lärarstudenter

Diagnoser med didaktisk uppföljning

NCM

Formativ bedömning och didaktiskt stöd i matematik för lärarstudenter
Författare: Natalia Karlsson & Wiggo Kilborn
Utges av Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM)
Ansvarig utgivare: Peter Nyström

ISBN 9789185143337

NCM

Innehåll

Inledning och bakgrund

Inom SKUM-projektet[1] (Studenters kunskaper i och uppfattningar om matematik) år 2014 utfördes vid Södertörns högskola ett diagnostiskt test av lärarstuderandes ingångskunskaper i matematik. Syftet var att genom formativ bedömning kartlägga och analysera studenternas kunskaper inom områdena aritmetik och algebra inför den första kursen i matematik. Resultatet visade att många av studenterna hade svårt att systematisera sina kunskaper i skolans matematik och att beskriva sitt eget tänkande. Många visade sig också ha negativa erfarenheter av och attityder till ämnet matematik (Karlsson, 2015). Det här är inte något nytt fenomen. Problemet har uppmärksammats, inte bara i Sverige utan även i ett antal andra länder. Forskning visar att den finns en tydlig koppling mellan ”teachers formal mathematical education and their learning of mathematics” (Askew, 2008; Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001).

Forskning visar klart att inte bara lärarstudenters förkunskaper i matematik utan även deras uppfattningar om och attityder till ämnet har en avgörande betydelse för deras studier på högskolan (White, Way, Perry & Southwell, 2006). Forskning visar också att studenter med mindre bra uppfattningar och attityder till ämnet blir beroende av formler (procedurellt tänkande) och att de har svårt att uppfatta matematiska samband och strukturer. (Pajares, 1992; Pehkonen, 2001; Wedege, 2002). Detta är mindre lämpligt om de som lärare ska kunna planera sin undervisning och uppfatta olika elevers tänkande. Om man inte förstår hur elever tänker, kan man inte hjälpa dem att bygga upp individuella kunskaper i matematik.

Lärarens viktiga roll i matematikundervisningen betonas av Niss (1994). Elever lär sig inte matematik genom att på egen hand lösa uppgifter från ett läromedel. Att lära matematik är en aktiv process som kräver en aktiv och kunnig lärare.

> As the learning of mathematics does not take place spontaneously and automatically, mathematics needs to be taught. (s. 368)

För att förändra studenters uppfattningar om och attityder till ämnet matematik är det viktigt, dels att visa dem konsekvenserna av att ha en mindre bra uppfattning om matematik och inlärning, och dels att ge dem exempel på andra sätt att uppfatta matematik (Skott, 2009). Hur kunskaperna i matematik kan förändras på ett positivt sätt som följd av förändrade uppfattningar om ämnet har beskrivits av forskare som Kilpatrick, Swafford och Findell (2001) och hur kunskaperna förändras som en följd av förändrade attityder diskuteras av Philipp (2007).

Syftet med det material vi presenterar här är att genom återkoppling till ett diagnostiskt test hjälpa studenterna att se grundläggande mönster i matematiken. Detta kan ske genom att ge dem alternativa, enkla och icke formelbundna lösningar på diagnosuppgifterna. Tanken är att studenter med mindre bra ingångskunskaper i, uppfattningar om och attityder till matematik därmed ska ges möjligheter att reflektera över sin situation och arbeta för att förändra den. Detta är en förutsättning för att de ska integreras i högskolans undervisningsmiljö, med framgång kunna följa undervisningen på högskolan samt tillgodogöra sig matematikämnets didaktik och undervisningsmetodik (Harris & Jensz, 2006; De Lange, 2007; Schulman, 1999; Warren, 2009).

[1] SKUM-projektet (Studenters kunskaper i och uppfattning om matematik) genomfördes under 2014 och dess övergripande syfte var att analysera internationell didaktisk forskning rörande studenters kunskaper i och uppfattningar om matematik samt att bygga upp strategier för att effektivisera studenters studier i matematik på högskolan. Projektet leddes av Natalia Karlsson, Institutionen för Naturvetenskap, Miljö och Teknik, Södertörns högskola.

Observera att det inte är något fel i att använda procedurella metoder såsom formler, men att använda formler utan konceptuell förståelse av dem är vanskligt. Dels leder detta ofta till felaktiga beslut eller resultat. Dels är det svårt att bygga vidare på en formel som man inte förstår.

Sammanfattningsvis presenteras här ett material som ger didaktiskt stöd åt lärarstudenter för att hjälpa dem att systematisera, analysera och reflektera över egna grundläggande kunskaper i matematik. Tanken är att de med hjälp av materialet ska bygga upp redskap för, och en positiv syn på matematik, som kan hjälpa dem att tillgodogöra sig högskolans undervisning i matematik och matematikämnets didaktik. Detta är i sin tur en förutsättning för att som lärare kunna planera och genomföra en adekvat undervisning i matematik, för att bedöma elevers kunnande och hjälpa dem att utveckla sina förmågor.

Så här är diagnosmaterialet uppbyggt

Diagnosmaterialet består av 4 diagnoser som behandlar olika centrala innehåll enligt grundskolans kursplan. De fyra områdena är

1. Aritmetik och algebra
2. Geometri
3. Proportionalitet, samband och förändring
4. Statistik och sannolikhetslära.

Diagnoserna kan antingen ges på högskolan inför starten av en ny kurs eller som förberedelse för den som blivit antagna till en lärarutbildning. Varje diagnos beräkna ta 30-40 minuter att genomföra.

Efter varje diagnos följer ett kortfattat facit. Det är angeläget att lärarstudenten inte nöjer sig med att kontrollera om svaret är korrekt eller inte utan fokuserar på vilka metoder som använts och om han eller hon förstår den matematik det handlar om. Därefter kommer ett avsnitt med kommentarer till varje uppgift i diagnosen, med särskilt fokus på en djupare matematisk förståelse och alternativa sätt att lösa uppgifterna. I samband med kommentarerna presenteras även övningsuppgifter, där studenten kan pröva de tankesätt och metoder som beskrivs, med tillhörande facit. Övningarna kan med fördel lösas eller diskuteras tillsammans med andra studenter.

Instruktioner till dig som student

Diagnoserna i det här materialet är utformade för att ge stöd till dig som ska påbörja din lärarutbildning, eller påbörja en matematikdidaktisk kurs i lärarutbildningen, med inriktning mot förskolan upp till årskurs 6. Materialet består av 4 med kommentarmaterial, som var och en behandlar ett matematiskt innehållsområde. Varje diagnos beräkna ta 30-40 minuter att genomföra.

Efter respektive diagnos följer ett kortfattat facit. När du som student kontrollerar dina svar med facit är det viktigt att du förstår att det inte är svaret i sig som är det primära utan vilken metod du har använt och om du förstår den matematik det handlar om. Kom ihåg att det blir din uppgift som lärare att för dina elever förklara lösningar av det här slaget och att detta ska kunna ske på olika sätt och på olika för olika elever. Detta ställer stora krav på dina egna kunskaper.

Efter svaren till diagnosen följer rikliga kommentarer till varje uppgift. De ska ge dig möjlighet att reflektera över dina kunskaper och hur du uppfattar din förmåga att arbeta med matematik. Målet är ju att du genom dina studier i didaktik ska bygga upp en kunskap om hur olika områden i matematik hänger ihop och hur du kan förklara ett matematikinnehåll för elever med olika förkunskaper. För att detta ska bli möjligt måste du själv behärska all den matematik som förekommer på grundskolan. Detta är också en förutsättning för att du ska kunna tillgodogöra dig undervisningen i matematikämnets didaktik. Det visar sig att många studenter under sin skoltid har byggt upp mindre bra uppfattningar om, och attityder till, matematik. Detta är ett allvarligt hinder för att lära om och att lära nytt.

Kommentarerna till varje diagnos visar på olika sätt att lösa uppgifterna och sätter fokus på förståelsen av den matematik som ligger bakom. Även om du har alla rätt på diagnosen, vilket på sikt är målet, bör du reflektera över de här svaren och lösningarna. Det är genom att reflektera över dessa svar i relation till dina egna och kamraternas svar som du kan bygga upp en mer hållbar syn på skolmatematiken och matematikundervisningen.

I kommentaravsnittet finns ett antal övningar som ger möjligheter att pröva de metoder som föreslås i lösningarna. Lös gärna de här uppgifterna tillsammans med en kamrat eller diskutera dina lösningar med en kamrat. Det finns två fördelar med detta. Dels kan du få reda på hur andra resonerar, dels tvingas du att verbalisera sina tankar. Fundera över följande tänkvärda citat från skalden Esaias Tegner: ”Vad du ej klart kan säga, vet du ej …. det dunkelt sagda är det dunkelt tänkta”.

Svaren till de nämnda övningarna finns i slutet av materialet.

Uppföljning av de diagnostiska testen

Enligt grundskolans kunskapskrav för betyget C i matematik ska eleverna när de lämnar skolan

- ha goda kunskaper om matematiska begrepp och kunna använd dem i bekanta sammanhang
- [kunna]välja och använda ändamålsenliga matematiska metoder med relativt god anpassning till sammanhanget
- [använda] symboler, algebraiska uttryck, formler, grafer och andra matematiska uttrycksformer med förhållandevis god anpassning tillsyfte och sammanhang.

Detta är en nivå av matematikkunskaper som många elever förväntas uppnå, och det är förstås nödvändigt att lärare själv har den kunskapsnivån. Många elever lämnar dock grundskolan med enbart ytliga kunskaper i matematik, främst utantillkunskaper och formler som de inte alltid förstår. Den typen av ytlig kunskap fungerar så länge de ska lösa ett antal likartade uppgifter i en lärobok, men den fungerar inte när de ska tillämpa kunskapen i varierande situationer, lösa problem eller generalisera kunskapen. Sådana ytliga kunskaper leder senare, vid studier på gymnasieskolan eller högskolan, till svårigheter att följa med i undervisningen: Matematik handlar om att resonera - men då måste man ha något att resonera om och ett språk att resonera med (Hajer, 2003).

När man antagits till en lärarutbildning förväntas man ha med sig tillräckliga kunskaper och förmågor för att kunna följa med i utbildningen, alltså för att fördjupa sina kunskaper i matematik och att studera matematikämnets didaktik. Men så är det inte alltid (Askew, 2008; Ball, Lubenski & Mewborn, 2001).

Innebär detta att allt är kört? Givetvis inte, men som lärarstudent måste man arbeta aktivt för att bygga upp mer funktionella förkunskaper för fortsatta studier. Men tar inte detta väldigt lång tid? Nej, faktiskt inte. Faktum är att matematikundervisningen ofta görs onödigt krånglig. Ett syfte med det här materialet är att visa hur enkel skolmatematiken faktiskt är. Den stora svårigheten består snarast i att ändra attityd, att våga tänka på ett nytt sätt. Det är i själva verket den studerandes **attityder** till matematik som är den mest avgörande faktorn (Pehkonen, 2001).

För en lärare i grundskolan räcker det emellertid inte att ha elevkunskaper motsvarande årskurs 9. Under utbildningen måste man även lära sig hur man kan förklara och lösa uppgifter på **olika** sätt och kunna förstå hur **olika elever** tänker. Man måste även kunna presentera, resonera om, konkretisera och individualisera ett ämnesinnehåll. Detta är inte möjligt om man kommer till högskolan med bristande kunskaper i matematik och kanske dessutom har negativa attityder till ämnet. Man kommer då istället att överföra sina egna problem och attityder till eleverna (Pehkonen, 2001).

Under lektionerna i grundskolan arbetar eleverna inte bara med matematik, de skaffar sig också attityder till ämnet. Dessa attityder har en avgörande inverkan på hur de uppfattar matematik och hur de lär matematik. Pehkonen (2001) menar att lärares uppfattningar om matematik är individuella och bygger på erfarenheter de har med sig, inte minst från sin egen skolgång. Många uppfattningar ärvs sedan från lärare till elev. Lärarens uppfattningar av ämnet påverkar därmed hur eleverna uppfattar ämnet och hur de lär sig ämnet, t.ex. ”att matematik är svårt att förstå”, att ”det är bara att lära sig formler” eller att ”det är svaret som räknas, inte metoden”. Många sådana uppfattningar är väl inrotade och svåra att förändra. De som har uppfattat matematik på ett konstruktivt sätt brukar däremot lyckas med ämnet och får därmed positiva attityder. De som av olika skäl inte uppfattat de grundläggande idéer som ämnet bygger på, brukar lyckas mindre väl och får ofta negativa attityder till ämnet (Pajares, 1992; Pehkonen, 2001). Wilson och Cooney (2002, s. 144) konstaterar att “the evidence is clear that teacher thinking influences what happens in the classrooms, what teachers communicate to their students, and what students ultimately learn”.

Om man kommer till utbildningen med bristfälliga kunskaper i matematik, och med negativa attityder till ämnet, är det viktigt att man snarast gör något åt detta. I annat fall missar man väsentliga inslag i undervisningen. Med det här materialet vill vi hjälpa studenter att göra något åt sådana brister, men en förutsättning för att det ska fungera, är att de förstår sina egna problem (Philipp, 2007).

Ett skäl till att man som lärarstuderande har en mindre bra uppfattning om matematik kan vara att man i skolan förhållit sig passiv under lektionerna i matematik. På lektionerna har man lyssnat på vad läraren säger och försökt lösa de uppgifter man fått, så snabbt som möjligt. Man har således arbetat för att tillfredsställa läraren, inte för att utveckla egna kunskaper. En sådan syn på inlärning kanske fungerar under de allra första skolåren men den leder efter hand till allt större problem. När man sedan kommer till gymnasiet eller till högskolan hänger man inte med och det verkar hopplöst att komma ikapp.

Till dig som student

Om du känner igen dig i den här beskrivningen är angeläget att hitta ett annat förhållningssätt till matematik och inlärning:

- Det handlar inte om att räkna många likadana uppgifter. Det är bättre att lösa få uppgifter och reflektera över den lösningsmetod man har använt och om det finns andra smartare lösningar. Dina kamrater har kanske löst uppgifterna på andra smartare sätt.
- När du möter en ny formel, ska du inte bara lära dig formeln utantill. Det är betydligt viktigare att tänka igenom vad formeln innebär och i vilka situationer den kan användas.
- När du t.ex. på en diagnos eller en tentamen räknat fel på en uppgift eller inte kunnat förklara lösningen ska du inte bara ge upp. Be din lärare om råd, fråga hur dina kamrater har löst uppgiften och inte minst: läs hur detta har beskrivits och förklarats i kurslitteraturen.
- Sist men inte minst. Det är **dina** kunskaper det handlar om och det är **du** som har ansvaret för vad du lär dig - ingen annan. Akademiska studier handlar i första hand om att lära sig genom att läsa litteratur och att reflektera över den i relation till sitt blivande yrke.

Vad är det då för kunskaper man bör ha när man kommer till utbildningen? Detta har utretts av bl.a. Schulman (1986) och Ball, Thames & Phelps (2008). Om man har en inriktning mot F-3 eller 4-6, bör man behärska den matematik som undervisas i årskurs F-9. Om man inte behärskar den matematik ens blivande elever kommer att möta på högstadiet, förstår man inte **vad** eleverna bör lära sig under tidigare skolår och **varför**. Risken är då stor att man lär eleverna en matematik som inte kan utvecklas under senare skolår.

I boken *Education Psychology: A cognitive view,* skrev David Ausubel (1968) om inlärning:

> If I had to reduce all of educational psychology to just one principle; I would say this: The most important factor influencing learning is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly. (s. vi)

Det här gäller inte minst i ämnet matematik som även i skolan bygger på givna, socialt överenskomna och accepterade strukturer. Konsekvenserna av vad Ausubel skriver är att det är meningslöst att undervisa elever om något som de saknar adekvata förkunskaper för. Man kan här välja mellan två alternativ, antingen att arbeta med de saknade förkunskaperna eller att utarbeta en alternativ matematisk modell som inte kräver förkunskaperna i fråga. Båda metoderna kräver en väl genomtänkt formativ bedömning (diagnostisering).

Större delen av det här materialet handlar om en uppföljning av diagnosen vid kursstarten. Vi gör detta, uppgift för uppgift, och visar samtidigt, inte bara hur man löser uppgiften med den formel man en gång har lärt sig i skolan. utan också hur man kan lösa alla de här uppgifterna på enklare sätt, utan att använda krångliga formler. Det är det skolans matematik handlar om: att våga se de enkla strukturer matematiken bygger på. Det handlar om att våga tänka själv utgående från grundläggande regler som ofta är enklare än du tror. Men det gäller att våga tänka om.

När man har sett svaret på en uppgift och hur man kan lösa uppgiften på ett enklare och smartare sätt gäller det att tänka framåt: Hur kan jag använda mig av det jag lärt, hur kan man gå vidare, hur kan man resonera när man löser andra, liknande uppgifter?

Referenser

Askew, M. (2008). Mathematical discipline knowledge requirements for prospective primary teachers, and the structure and teaching approaches of programs designed to develop that knowledge. I K. Krainer, & T. Wood. (Red.), *The international Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 1, s. 13-36). Rotterdam: Sense Publishers.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407.

Ball, D.L., Lubienski, S.T., & Mewborn, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers´ mathematical knowledge. I V. Richardson (Red.), *Handbook of Research on Learning* (4th edition, s.433-456). New York: Macmillan.

De Lange, J. (2007). Large-scale assessment and mathematics education. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook on mathematics teaching and learning* (s. 1111-1142). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hajer, M. (2003). Språkutvecklande ämnesundervisning – ett andraspråksalternativ i alla ämnen. I M. Olofsson (Red.) *Symposium 2003 – Arena andraspråk. Rapport från Nationellt centrums tredje symposium under temat "Goda miljöer för språk och kunskapsutveckling*". Stockholm: Nationellt centrum för sfi och svenska som andraspråk.

Harris, K-L., & Jensz, F. (2006). *The preparation of mathematics teachers in Australia: Meeting the demand for suitably qualified mathematics teachers in secondary schools.* Melbourne: The University of Melbourne.

Karlsson, N. (2015). *Matematik i lärarutbildningen. Studenters kunskaper i och uppfattningar om matematik – En forskningsrapport från MIL- och SKUM-projektet* (Working Paper 2015:4). Huddinge: Södertörns högskola.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findel, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington DC: National Academy Press.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. I R. Biehler, R. Scholz, R., Strässer & B. Winkelmann (Red.), *Didactics of Mathematics as a Scientific discipline* (s. 367-378). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Pehkonen, E. (2001). Lärares och elevers uppfattningar som en dold faktor i matematikundervisningen. I B. Grevholm (Red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s 230-253). Lund: Studentlitteratur.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers´ beliefs and affect. I F.K. Lester (Red.), Second *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning* (s. 257-315). Reston, VA: NCTM.

Schulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Schulman, L. (1999). Knowledge and teaching. Foundations of the new reform. I J. Leach & B Moon (Red.), *Learners and pedagogy* (s. 61-77). London: Sage.

Skott, J. (2009). Contextualising the notion of "belief enactment". *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(1), 27-46.

Warren, E. (2009). Early childhood teachers' professional learning in algebraic thinking: A model that supports new knowledge and pedagogy. *Mathematics Education Research Journal, 9*, 30-45.

Wedege, T. (2002). "Mathematics – that's what I can't do": Peoples affective and social relationship with mathematics*. Literacy and Numeracy Studies: An International Journal of Education and Training of Adults, 11*(2), 63-78.

White, A. L., Way, J., Perry,B., & Southwell, B. (2006). Mathematical attitudes, beliefs and achievement in primary pre-service mathematics teacher education. *Mathematics teacher Education and Development, 7*, 33-52.

Wilson, M., & Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and development. I G. C. Leder, & E. Pehkonen (Red.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education* (s. 127-148). Doordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Diagnos 1: Aritmetik och algebra

Innehåll

Diagnostiskt test vid kursstarten: Aritmetik och algebra

Lös följande uppgifter och förklara hur du resonerar när du löser dem. Du får inte använda dig av räknetekniska hjälpmedel såsom miniräknare.

1. Beräkna i huvudet a) $92 + 56 + 8$ b) $13 \cdot 25 \cdot 8$

2. Utför subtraktionen $413 - 398$

3. Beräkna i huvudet $16 \cdot 25$

4. Beräkna i huvudet $50 \cdot 0{,}7$

5. Beräkna i huvudet a) $\frac{a}{2} / \frac{a}{2}$ b) $\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}$

6. Beräkna i huvudet a) Vad är $\frac{1}{4}$ av 0,16 b) Vad är $\frac{3}{4}$ av 16

7. Beräkna i huvudet a) Vad är $\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{2}$ b) Vad är $\frac{3}{4}$ av $\frac{1}{2}$

8. Beräkna i huvudet a) $\frac{3}{7} + \frac{1}{7}$ b) $1\frac{2}{5} - \frac{4}{5}$

9. Beräkna i huvudet a) $\frac{4}{7} / 2$ b) $3 \cdot \frac{2}{7}$

10. Skriv $\frac{2}{3}$ med nämnaren 21

11. Vilket tal är störst $\frac{11}{15}$ eller $\frac{3}{4}$?

12. Skriv ett tal som är större $\frac{5}{7}$ och mindre är $\frac{5}{6}$

13. Beräkna a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{7} - \frac{2}{3}$

14. Beräkna a) $\frac{6}{7} / \frac{2}{7}$ b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

15. Beräkna a) $0{,}4 \cdot 0{,}1$ b) $0{,}4 / 0{,}1$

16. Vilka av följande utsagor är sanna?

a. Summan av två udda tal är ett udda tal	sant □	falskt □
b. Produkten av två udda tal är ett udda tal	sant □	falskt □
c. Summan av ett udda tal och ett jämnt tal är ett udda tal	sant □	falskt □
d. Produkten av ett udda tal och ett jämnt tal är ett udda tal.	sant □	falskt □

Facit till det diagnostiska testet

Uppgift 1 a	$92 + 56 + 8 = 156$
Uppgift 1 b	$13 \cdot 25 \cdot 8 = 260$
Uppgift 2	$413 - 398 = 15$
Uppgift 3	$16 \cdot 25 = 400$
Uppgift 4	$50 \cdot 0{,}7 = 35$
Uppgift 5 a	$\frac{a}{2} / \frac{a}{2} = 1$, förutsatt att $a \neq 0$
Uppgift 5 b	$\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 1$, förutsatt att $a \neq 0$
Uppgift 6 a	$\frac{1}{4}$ av $0{,}16 = 0{,}04$
Uppgift 6 b	$\frac{3}{4}$ av $16 = 3 \cdot (\frac{1}{4}$ av $16) = 3 \cdot 4 = 12.$
Uppgift 7 a	$\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
Uppgift 7 b	$\frac{3}{4}$ av $\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
Uppgift 8 a	$\frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$
Uppgift 8 b	$1\frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$
Uppgift 9 a	$\frac{4}{7} / 2 = \frac{2}{7}$
Uppgift 9 b	$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$
Uppgift 10	$\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$
Uppgift 11	$\frac{11}{15}$ är mindre än $\frac{3}{4}$
Uppgift 12	Lämpliga svar är $\frac{31}{42}, \frac{32}{42}, \frac{33}{42}$ eller $\frac{34}{42}$
Uppgift 13 a	$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$
Uppgift 13 b	$\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{1}{21}$

Uppgift 14 a $\frac{6}{7} / \frac{2}{7} = 3$

Uppgift 14 b $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

Uppgift 15 a 0,4 · 0,1 = 0,04.

Uppgift 15 b 0,4 / 0,1 = 4

Uppgift 16 a Summan av två udda tal är ett jämnt tal.

Uppgift 16 b Produkten av två udda tal är ett udda tal.

Uppgift 16 c Summan av ett udda tal och ett jämnt tal är ett udda tal.

Uppgift 16 d Produkten av ett udda tal och ett jämnt tal är ett jämnt tal.

Kommentarer och övningar

Innan vi går igenom svar och lösningar uppgift för uppgift, vill vi påpeka några viktiga detaljer:

- En diagnos är bara ett stickprov. Det är inte möjligt att på en diagnos täcka alla typer av uppgifter. Det stickprov av uppgifter vi valt är av en typ som vi vet att många studenter har problem med och som vi anser vara av stor betydelse för dig i din utbildning.
- Det handlar inte bara om att ge rätt svar. Det handlar om att förstå svaret på ett sätt som gör det möjligt för dig att utveckla didaktiska kunskaper och att förklara alternativa lösningar för dina egna elever. Även om du anser dig ha presenterat den mest ideala lösningen bör du reflektera över alternativa lösningar. Ett mål är ju att du på sikt ska förstå alla dina elevers lösningar.
- Om du inte lärt dig lösa en viss typ av uppgift i skolan, beror detta sannolikt på att du har haft en negativ attityd till matematik och trott att matematik är svårt att förstå och lära sig. Lämna det bakom dig och börja på nytt. Det mesta är betydligt enklare än du tror. Den som vågar vinner!

Vi går nu igenom uppgifterna på diagnosen i tur och ordning och lyfter samtidigt fram hur man kan tänka på ett enkelt och konstruktivt sätt när man löser dem. I en del fall stannar vi kvar vid en speciell uppgiftstyp för att generalisera de idéer den bygger på. Varje uppgift eller grupp av uppgifter följs sedan upp med några övningar där du själv kan pröva nya idéer eller metoder.

Räknelagar och matematiska operationer

Du minns säkert från skolan att $2 + 5 = 5 + 2$ och att $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$.

På motsvarande sätt gäller att $8 + 7 + 3 = 8 + (7 + 3) = 8 + 10$ och att

$7 \cdot 4 \cdot 5 = 7 \cdot (4 \cdot 5) = 7 \cdot 20$.

Det här kan man uttrycka på ett enklare sätt: Man kan utföra additioner i godtycklig ordning och man kan utföra multiplikationer i godtycklig ordning.

Genom att använda sig av de här räknelagarna kan man förenkla lösningen av en rad problem och t.o.m. lösa dem i huvudet. Vi ska nu se hur dessa räknelagar kan användas på ett smart sätt. Räknelagarna kallas i tur och ordning för

- den kommutativa lagen för addition $a + b = b + a$
- den kommutativa lagen för multiplikation $a \cdot b = b \cdot a$
- den associativa lagen för addition $(a + b) + c = a + (b + c)$
- den associativa lagen för multiplikation $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Uppgift 1a $92 + 56 + 8 = 92 + 8 + 56 = 100 + 56 = 156$

När man ska utföra en matematisk operation lönar det sig alltid att först tänka efter en stund. I det här fallet kan man använda sig av den kommutativa lagen för addition. Istället för att börja från vänster och utföra operationen $92 + 56$ i huvudet kan man byta ordning på 56 och 8. Detta ger den betydligt enklare operationen $92 + 8 + 56 = 100 + 56$.

Pröva detta på följande uppgifter.

Övning 1.1

Lös följande uppgifter i huvudet: a) 63 + 75 + 25 *b)* 47 + 58 + 53 *c)* 156 + 84 – 56

Uppgift 1b $13 \cdot 25 \cdot 8 = 13 \cdot (25 \cdot 8) = 13 \cdot 200 = 260$

Här har man använt den associativa lagen för multiplikation. Ett alternativ är att skriva om uppgiften som $25 \cdot 8 \cdot 13 = (25 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 13) = 100 \cdot 26$.

Pröva detta på följande uppgifter.

Övning 1.2

Lös följande uppgifter i huvudet: a) 8 · 42 · 25 c) 35 · 80 · 2 c) 15 · 9 · 20

En viktig påminnelse: Om du inte ser lösningen direkt, ska du inte ge upp. Fundera en stund och pröva dig fram. Det är på det sättet man lär sig matematik. Det handlar inte bara om att lösa uppgifter utan om att försöka förstå hur och varför lösningen fungerar.

Uppgift 2 $413 – 398 = 13 + 2 = 15$

Den kommutativa och den associativa räknelagen gäller inte vid subtraktion. Här behövs det andra regler. En sådan regel är att subtraktion i första hand bör uppfattas som differensen (avståndet) mellan två tal – inte som att ”ta bort”.

- Man kan t.ex. komplettera (räkna upp i 15 steg) från 398 till 413.
- Ännu enklare är det att se detta som en hundratalövergång och jämföra talen 398 och 413 med 400. Talet 413 är 13 mer och talet 398 är 2 mindre än 400. Differensen är därför 13 + 2 = 15.
- Man kan också räkna uppåt i två steg från 398. Det är 2 upp till 400 och ytterligare 13 upp till 413.
- En tredje metod är att addera 2 till båda termerna: 413 – 398 = 415 – 400 = 15

Övning 2.1

Använd dessa idéer för att lösa följande uppgifter i huvudet:
a) 92 – 87 *b)* 204 – 97 *c)* 406 – 297

Uppgift 3 $16 \cdot 25 = 4 \cdot 4 \cdot 25 = 4 \cdot 100 = 400$

För att utföra multiplikationer i huvudet kan man ofta använda sig av ”runda” tal. 25 är ett s.k. runt tal och $4 \cdot 25 = 100$. Utnyttja detta genom att skriva om 16 som $4 \cdot 4$. Du får då $16 \cdot 25 = 4 \cdot 4 \cdot 25$. Här kan du börja med att multiplicera de två sista talen (den associativa lagen för multiplikation) vilket ger $4 \cdot (4 \cdot 25) = 4 \cdot 100$.

Övning 3.1

Lös följande uppgifter i huvudet: a) $18 \cdot 35$ *b)* $4 \cdot 16$ *c)* $28 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}$

Uppgift 4 $50 \cdot 0{,}7 = 5 \cdot 10 \cdot 0{,}7 = 5 \cdot 7 = 35$

Genom att använda dig av den associativa lagen för multiplikation kan du göra om 0,7 till ett heltal. Du skriver då om 50 som $5 \cdot 10$ vilket ger $5 \cdot 10 \cdot 0{,}7 = 5 \cdot (10 \cdot 0{,}7) = 5 \cdot 7$. Du slipper på det sättet fundera över var decimaltecknet ska stå.

Du kan också tänka dig 0,7 som 7 tiondelar. 50 gånger 7 tiondelar = 350 tiondelar. Detta kan i sin tur skrivas som 35 hela. Alternativt kan du tänka i decimeter. 0,7 meter = 7 decimeter och 50 gånger 7 decimeter = 350 decimeter = 35 meter.

På den här uppgiften är 3,5 och 0,35 vanliga svar. För att undvika sådana misstag är det bra att göra en överslagsräkning. Eftersom 0,7 är ungefär 1, så är $50 \cdot 0{,}7$ ungefär 50. I valet mellan svaren 0,35, 3,5, 35 och 350 är det därför bara 35 som är ett rimligt svar.

Övning 4.1

Lös följande uppgifter i huvudet: a) $2{,}5 \cdot 3{,}6$ *b)* $0{,}8 \cdot 3{,}5$ *c)* $0{,}16 \cdot 25$

Vi återkommer längre fram i materialet till andra metoder för att multiplicera två tal i decimalform.

Innehållsdivision och invers

Följande uppgifter på diagnosen är intressanta, speciellt som många räknar fel på dem. Uppgifterna kanske ser svåra ut, men tänker man efter visar de sig vara mycket lätta.

Uppgift 5 a $\frac{a}{2} / \frac{a}{2} = 1$, förutsatt att $a \neq 0$

För den som har mindre bra attityder till matematik är den här uppgiften orimlig att lösa: ”Jag vet ju inte vad *a* är”, ”Jag har glömt hur man gör”. Nu gäller det att våga tänka om.

Om man på lågstadiet lärt sig *matematik*, alltså inte bara lärt sig *räkna*, är detta en enkel uppgift. Vad det handlar om är att man ska dividera ett tal med sig självt och det ger alltid kvoten 1 (såvida talet inte är 0). Som exempel vet du redan att 2 / 2 = 1, att 3 / 3 = 1, att 4 / 4 = 1 osv. Detsamma gäller för talet $\frac{a}{2}$. Även $\frac{a}{2} / \frac{a}{2} = 1$

Om man har en negativ attityd till matematik ger man lätt upp inför en uppgift av det här slaget. Med en mer positiv attityd till matematik försöker man gissa och pröva sig fram. Man kan då utgå från att uppgiften är lösbar och att en parameter som *a* står för ett tal. Varför då inte pröva med några olika tal och se vad som händer? $a = 2$ ger 1 / 1 = 1, $a = 4$ ger 2 / 2 = 1 och $a = 6$ ger 3 / 3 = 1. Det enda som vållar problem är $a = 0$. Alla andra värden på *a* ger kvoten 1. Observera att detta gäller generellt. Även $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$, $\frac{\pi}{\pi} = 1$ och $\frac{a^2-b}{a^2-b} = 1$

Av detta kan du lära dig två saker. Det ena är att det finns en grundläggande idé: Ett tal som divideras med sig självt ger kvoten 1 (såvida talet inte är 0) och detta gäller generellt, även för irrationella tal. Det andra är att det lönar sig att söka efter mönster genom att gissa och pröva. Efter ett par prövningar kan man i det här fallet inse vad det handlar om och vilken idé som kan tillämpas. Av detta lär man sig vikten av att ha en bra attityd, och att våga pröva, om man ska lära sig förstå matematik.

Vi ska nu använda en liknande strategi för att lösa nästa uppgift.

Uppgift 5b $\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 1$, förutsatt att $a \neq 0$

I skolan lär man sig att $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$ eller mer generellt att $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Det innebär att $\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = \frac{a \cdot 2}{2 \cdot a} = 1$

Problemet är att detta för många är en ytlig kunskap. Om man inte förstår idén, glömmer man snabbt bort när och hur formeln ska tillämpas. Vi undersöker nu vilka alternativ som finns.

Tal som 3 och $\frac{1}{3}$ kallas för varandras inverser. På samma sätt är $\frac{2}{3}$ och $\frac{3}{2}$ inversa tal liksom $\frac{b}{a}$ och $\frac{a}{b}$
Produkten av två inversa tal är alltid 1.

Vi vet alltså att $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, att $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$. På samma sätt är $\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 1$

Om man inte inser att $\frac{a}{2}$ och $\frac{2}{a}$ är inversa tal så kan man ju alltid pröva var som händer för olika värden på *a*. För $a = 1$ får man $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, för $a = 2$ får man $1 \cdot 1 = 1$ och för $a = 4$ får man $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.
Det verkar således rimligt att den här produkten alltid blir 1 (såvida *a* inte är 0). Den som vågar den vinner!

Vi återkommer till begreppet invers som är en viktig del av matematiken, men kan än en gång konstatera att man med lite fantasi ofta kan lösa till synes omöjliga uppgifter.

Övning 5.1

Lös följande uppgifter *a)* $\frac{6}{a} \cdot \frac{a}{2}$ *b)* $\frac{6}{a} \Big/ \frac{2}{a}$ *c)* $\frac{6}{5} \Big/ \frac{1}{5}$

En del av ett tal

När man i skolan ska lösa uppgifter använder man ofta formler som är onödigt krångliga. Innan man använder en formel, som man kanske inte förstår innebörden av, lönar det sig oftast att tänka efter en liten stund: Vad handlar uppgiften egentligen om? Man brukar då finna betydligt enklare och smartare lösningsstrategier. Följande uppgifter är exempel på detta.

Uppgift 6 a $\frac{1}{4}$ av 0,16 = 0,16 / 4 = 0,04. (16 hundradelar / 4 = 4 hundradelar)

Många uppfattar $\frac{1}{4}$ av 0,16 som $\frac{1}{4} \cdot 0{,}16$, skriver om detta som $0{,}25 \cdot 0{,}16$ och räknar fel på decimalerna. Men det här handlar inte om att multiplicera tal i bråk- eller decimalform utan om att ta en fjärdedel av 16 hundradelar. Man ska alltså dela 0,16 i fyra lika stora delar och ta en sådan andel. Detta är således inte en multiplikation utan en division av 0,16 med 4.

Eftersom 16 / 4 = 4 så är 16 hundradelar / 4 = 4 hundradelar. Alltså är 0,16 / 4 = 0,04

Ett vanligt svar på den här uppgiften är 0,4. Det brukar bero på att man inte förstår innebörden i ”noll komma sexton”. Man borde därför inte säga ”noll komma sexton” utan ”sexton hundradelar”, vilket det heter på flera andra språk.

När man har fått ett svar bör man alltid kontrollera om svaret är rimligt. Detta är ett viktigt förhållningssätt till matematik. Om man dividerar ett tal som 0,16 med ett naturligt tal som 4, måste kvoten rimligtvis bli mindre än 0,16. Ett svar som 0,4 är därför orimligt.

Övning 6.1

Beräkna på motsvarande sätt *a)* $\frac{1}{3}$ av 21 *b)* $\frac{1}{3}$ av 2,1 *c)* $\frac{1}{3}$ av 0,21

Uppgift 6 b $\frac{3}{4}$ av 16 = 3 · ($\frac{1}{4}$ av 16) = 3 · 4 = 12

Inte heller detta ska tolkas som en multiplikation med ett tal i bråkform. Det här läser man som 3 (stycken) fjärdedelar av 16. Eftersom 1 fjärdedel av 16 är 4, så är 3 fjärdedelar av 16, tre gånger så mycket alltså 3 · 4 = 12.

Övning 6.2

Beräkna på motsvarande sätt *a)* $\frac{3}{4}$ av 1,6 *b)* $\frac{3}{4}$ av 0,16 *c)* $\frac{2}{3}$ av 0,21

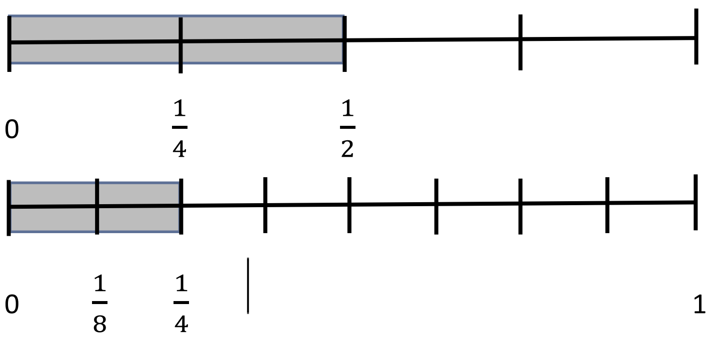
Uppgift 7 a $\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ / 4 = $\frac{1}{8}$

I det här fallet ska man dividera $\frac{1}{2}$ med 4. I bråkform gör man detta enklast genom att halvera $\frac{1}{2}$ två gånger. Vi gör detta grafiskt:

Hälften av $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

och hälften av $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Svaret är alltså $\frac{1}{8}$



Om man vill använda decimalform, skriver man om uppgiften som $\frac{1}{4}$ av 0,500, alltså som 0,500 / 4.

Eftersom 500 / 4 = 125 blir svaret 0,500 / 4 = 0,125.

Uppgift 7 b $\frac{3}{4}$ av $\frac{1}{2}$ = 3 · ($\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{2}$) = 3 · $\frac{1}{8}$ = $\frac{3}{8}$

$\frac{3}{4}$ av $\frac{1}{2}$ betyder 3 gånger ($\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{2}$) alltså 3 · $\frac{1}{8}$ = $\frac{3}{8}$

Använder man decimalform bli det: $\frac{3}{4}$ av 0,500 = 3 · ($\frac{1}{4}$ av 0,500) = 3 · 0,125 = 0,375

Övning 7.1

Beräkna på motsvarande sätt *a)* $\frac{1}{3}$ *av* $\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{5}$ *av* $\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{2}{3}$ *av* $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{5}$ *av* $\frac{1}{2}$

Del av och multiplikation

Men, invänder du nu, jag har lärt mig att $\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

Ja, *svaret* blir i båda fallen $\frac{1}{8}$, men *innebörden* av de två operationerna är helt *olika*:

$\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{2}$ är en division, nämligen $\frac{1}{2}$ / 4 medan $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ är en multiplikation.

Varför kan då resultatet bli detsamma? Varför är t.ex. $\frac{a}{2} / \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 1$?

För att svara på detta tar vi upp begreppet *invers*, som spelar en viktig roll i algebran. Vid multiplikation har t.ex. 4 inversen $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{3}$ har inversen 3.

Alla tal $a \neq 0$ har en invers $\frac{1}{a}$ och $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Vi ska nu se hur begreppet invers kan användas. Vi vet redan att $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$ och att $\frac{4}{7} = 4 \cdot \frac{1}{7}$ eller mer generellt att $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

Vi vet också att en division av 3 med 4, alltså 3 / 4 = $\frac{3}{4}$ vilket sin tur kan skrivas kan skrivas som 3 · $\frac{1}{4}$

Det betyder att $\frac{1}{4}$ av 3 = 3 / 4 = 3 · $\frac{1}{4}$

Detta leder till följande slutsats.

En division av *a* med *b* kan ersättas av en multiplikation av *a* med inversen till *b*.

Detta kan skrivas $a / b = a \cdot \frac{1}{b}$

Övning 7.2

Bestäm inversen (vid multiplikation) till följande tal: *a)* $\frac{1}{5}$ *b)* 6 *c)* $\frac{3}{5}$ *d)* $\frac{a}{b}$

Nämnarens och täljarens innebörd

För att komma vidare måste man förstå täljarens och nämnarens innebörd.

Om man dividerar talet 1 med 3 får man $\frac{1}{3}$. Här kallas 3:an för nämnare.

Om man delar en sträcka i tre delar så blir varje del $\frac{1}{3}$ av sträckan.

Om man tar 2 sådana delar får man $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$ vilket skrivs $\frac{2}{3}$. Här kallas 2 för täljare.

I talet $\frac{2}{3}$ beskriver nämnaren 3 en enhet, nämligen $\frac{1}{3}$ och täljaren 2 talar om hur många gånger man tagit enheten $\frac{1}{3}$

Om man dividerar talet 2 med 3 får man också $\frac{2}{3}$

Av detta följer också att $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3}$ vilket skrivs $\frac{3}{3} = 1$

Det är på det här sättet man måste förstå innebörden av begreppet bråk. För att arbeta med bråk bör man kunna resonera på det här sättet och kunna uttrycka bråk på olika sätt.

Uppgift 8 a. $\frac{3}{7} + \frac{1}{7} = (\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}) + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$

I det här fallet adderar man alltså 3 enheter och 1 enhet. Enheten är $\frac{1}{7}$

Övning 8.1

Skriv i bråkform: a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ *b)* $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ *c)* $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

Uppgift 8 b $1\frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$

Eftersom $1\frac{2}{5}$ betyder $1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ kan man skriva om subtraktionen som $\frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$

Division och multiplikation av ett tal i bråkform med ett naturligt tal

Den enklaste regeln för att dividera ett tal i bråkform med ett naturligt tal är att man dividerar enbart täljaren. Nämnaren är ju bara en enhet.

Uppgift 9 a $\frac{4}{7} / 2 = \frac{4/2}{7} = \frac{2}{7}$

För att lösa den här uppgiften behöver an inte någon formel som handlar om att invertera nämnaren och multiplicera. Enklast kan man tänka så här:

$\frac{4}{7}$ betyder $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$. För att dividera detta med 2, delar vi upp uttrycket i två lika stora delar $(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{7})$

Hälften av $\frac{4}{7}$ är alltså $(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) = \frac{2}{7}$

Ännu enklare blir det om man helt enkel dividerar täljaren i $\frac{4}{7}$ med 2. Talet $\frac{1}{7}$ är ju bra en enhet.

Detta blir ännu tydligare om man skriver $\frac{4}{7}$ som 4 sjundedelar. Man inser då 4 sjundedelar dividerat med 2 är 2 sjundedelar på samma sätt som 4 äpplen dividerat med 2 är 2 äpplen.

Övning 9.1

Utför följande divisioner: a) $\frac{6}{7} / 3$ *b)* $\frac{6}{5} / 2$ c) $\frac{3}{4} / 3$

Uppgift 9 b $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$

Man använder samma strategi som för division men arbetar i omvänd ordning

$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

Eftersom $\frac{1}{7}$ bara är en enhet gör man detta enklast genom att multiplicerar täljaren med 3.

$3 \cdot \frac{2}{7}$ är alltså lika med $\frac{3 \cdot 2}{7}$

Övning 9.2

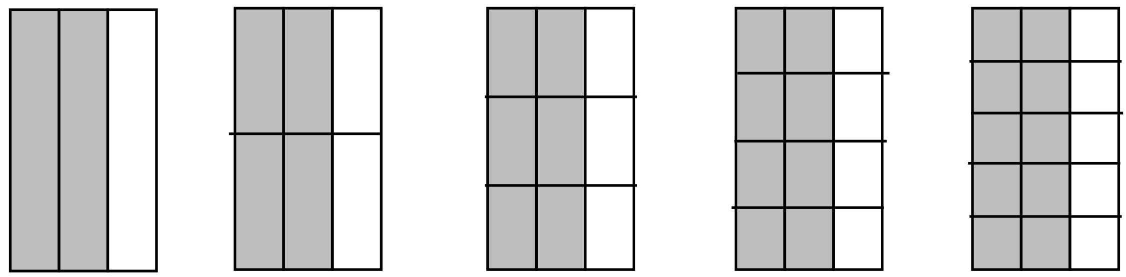
Lös följande uppgifter: a) $4 \cdot \frac{2}{11}$ *b)* $2 \cdot \frac{3}{5}$ *c)* $\frac{4}{9} \cdot 2$

Varje tal i bråkform kan skrivas på oändligt många olika sätt

Ett tal som $\frac{2}{3}$ kan skrivas på oändligt många sätt i bråkform.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \ldots$$

Man kan illustrera detta på följande sätt där antalet rutor svarar mot nämnaren och antalet skuggade rutor svarar mot täljaren:



$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{10}{15}$

Lägg märke till att när man fördubblar nämnaren så fördubblas täljaren, när man multiplicerar nämnaren med 3 så multipliceras täljaren med 3 osv.

> Om man multiplicerar täljare och nämnare med samma tal förändas inte bråkets värde.
>
> Det innebär att om n ≠ 0 så gäller att $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ Detta kallas för förlängning.

Den motsatta (inversa) operationen till förlängning kallas för förkortning.

Uppgift 10 $\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{14}{21}$

Eftersom 3 · 7 = 21 kan man förlänga bråket med 7, vilket ger $\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{14}{21}$

Övning 10.1

a) Förläng bråket $\frac{3}{4}$ *så att nämnaren blir* 12.

b) Förläng bråket $\frac{2}{5}$ *så att nämnaren blir* 20.

c) Förläng bråket $\frac{4}{7}$ *så att nämnaren blir* 35.

Övning 10.2

a) Förkorta bråket $\frac{12}{15}$ *så att nämnaren blir* 5

b)Förkorta bråket $\frac{16}{28}$ *så att nämnaren blir* 7

c) Förkorta bråket $\frac{24}{36}$ *så att nämnaren blir* 3

Uppgift 11 $\frac{11}{15} = \frac{44}{60}$ är mindre än $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$

Om man väljer en gemensam nämnare så är det bara att jämföra täljarna.

En lämplig gemensam nämnare är $15 \cdot 4 = 60$.

$\frac{11}{15} = \frac{44}{60}$ och $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$. Eftersom $\frac{45}{60}$ är större än $\frac{44}{60}$ så är $\frac{3}{4}$ större än $\frac{11}{15}$.

Övning 11.1

Vilket tal är störst? a) $\frac{5}{8}$ *eller* $\frac{4}{7}$ *b)* $\frac{6}{7}$ *eller* $\frac{7}{8}$ *c)* $1\frac{1}{3}$ *eller* $\frac{8}{6}$

Uppgift 12 $\frac{5}{7} = \frac{30}{42}$ och $\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$ Lämpliga svar är $\frac{31}{42}, \frac{32}{42}, \frac{33}{42}$ eller $\frac{34}{42}$

För att göra talen jämförbara bör de skrivas med samma nämnare, till exempel nämnaren $7 \cdot 6 = 542$.

Du får då $\frac{5}{7} = \frac{30}{42}$ och $\frac{6}{7} = \frac{36}{42}$ Det innebär att talen $\frac{31}{42}, \frac{32}{42}, \frac{33}{42}$ och $\frac{34}{42}$ uppfyller villkoret.

Övning 12.1

Ange ett tal som

a) är större än $\frac{6}{7}$ *och mindre än 1*

b) är större än $\frac{5}{8}$ *och mindre än* $\frac{3}{4}$

c) är större än $\frac{3}{11}$ *och mindre än* $\frac{1}{3}$

Addition och subtraktion av två tal i bråkform

Man kan bara addera och subtrahera två tal i bråkform om de har samma nämnare.

Uppgift 13 a $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$

För att kunna jämföra de två måste man välja en nämnare som är delbar både med 3 och med 5. En sådan nämnare är 5 · 3 = 15. Förläng alltså talen så att nämnarna blir 15.

$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ och $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ kan man skriva $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}$. Eftersom nämnarna är lika är det nu bara att addera täljarna.

$\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$.

Övning 13.1

Utför additionerna a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$ *b)* $\frac{2}{7}+\frac{2}{3}$ *c)* $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$

Uppgift 13 b $\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{1}{21}$

Välj nämnaren 7 · 3 = 21. Man kan nu skriva $\frac{5}{7}-\frac{2}{3}$ som $\frac{15}{21}-\frac{14}{21}$. Eftersom nämnarna nu är lika kan man subtrahera täljarna.

$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{15-14}{21}=\frac{1}{21}$

Övning 13.2

Utför subtraktionerna a) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{7}-\frac{2}{3}$ c) $1\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

Division med ett tal i bråkform

Vi inleder med en enkel regel som ofta fungerar och som kallas för ”innehållsdivision”. För att utföra divisionen 840 / 210 behöver man inte använda sig av en uppställning. Studerar du uppgiften närmare upptäcker du att 210 ryms 4 gånger i 840. (För 840 kr kan man köpa 4 böcker à 210 kr styck.)

Uppgift 14 a $\frac{6}{7} / \frac{2}{7}$ = 6 / 2 = 3

Formulera om uppgiften som hur många gånger du kan ta 2 sjundedelar från 6 sjundedelar. Vilket är samma fråga som hur många gånger du kan ta 2 äpplen från 6 äpplen. Svaret är 3 (gånger).

På motsvarande sätt är $\frac{6}{11} / \frac{2}{11} = \frac{6}{13} / \frac{2}{13} = \frac{6}{14} / \frac{2}{14} = \frac{6}{15} / \frac{2}{15}$ = 3. Det här innebär att om nämnarna är lika så räcker det att dividera täljarna, alltså 6 / 2 = 3.

Övning 14.1

Utför divisionerna *a)* $\frac{8}{9} / \frac{2}{9}$ *b)* $\frac{9}{11} / \frac{3}{11}$ *c)* $\frac{6}{7} / \frac{7}{14}$

Vi ska nu använda en annan metod. Om *a* och *b* är naturliga tal så vet vi att $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Men vi vet också att *a* / *b* = $\frac{a}{b}$. Det betyder att

Divisionen a / b kan utföras som multiplikationen $a \cdot \frac{1}{b}$

Det här innebär att $\frac{6}{7} / \frac{2}{7} = \frac{6}{7} / \frac{7}{2} = \frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 2}$ = 3

Övning 14.2

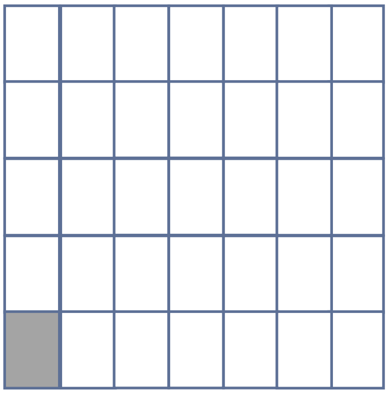
Utför på nytt följande divisioner, men nu med den nya metoden.

a) $\frac{8}{9} / \frac{2}{9}$ *b)* $\frac{9}{11} / \frac{3}{11}$ *c)* $\frac{6}{7} / \frac{7}{14}$

Uppgift 14 b $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$

För att utföra multiplikation börjar vi med att studera $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{35}$

Du kan komma ihåg detta genom att studera följande kvadrat med sidan 1 m. De små rektanglarnas höjd är $\frac{1}{5}$ m och dess bas är $\frac{1}{7}$ m. Eftersom 35 sådana små rektanglar har area 1 m^2 så är arean av en rektangel $\frac{1}{35}$ m^2. Av detta kan vi konstarea att $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{35}$



Generellt gäller att $\boxed{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}}$

Som exempel är alltså $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$.

Övning 14.3

Beräkna a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$ *b)* $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{11}$ *c)* $\left(\frac{1}{10}\right)^2$

Men hur beräknar man $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{11}$? Jo, du vet nu att $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$ så är det bara att använda sig av den kommutativa lagen för multiplikation. $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{11}$ kan skrivas som $5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot \frac{1}{11}$ eller som $5 \cdot 9 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{11} = 45 \cdot \frac{1}{66} = \frac{45}{66} = \frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 11}$

Mer generellt gäller formeln $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$

Övning 14.4

Beräkna *a)* $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ *b)* $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{11}$ *c)* $(\frac{7}{10})^2$

Multiplikation och division av tal i decimalform

På samma sätt som $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ och $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1000}$ gäller att 0,1 · 0,1 = 0,01 och att 0,1 · 0,01 = 0,001.

På samma sätt som att $\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$ och $\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{100} = \frac{6}{1000}$ gäller att 0,2 · 0,3 = 2 ·3 · 0,01 = 0,06 och att 0,2 · 0,03 = 2 · 3 ·0,001 = 0,006.

Om du tänker på det här sättet behöver du aldrig få problem med var du ska placera decimaltecknet.

Uppgift 15 a 0,4 · 0,1 = 4 · 0,1 · 0,1 = 4 · 0,01 = 0,04

Skriv om 0,4 som 4 · 0,1 och använd den kommutativa lagen för multiplikation.

Det ger 4 · 0,1 · 0,1 = 4 · 0,01 = 0,04

Övning 15.1

Beräkna *a)* 0,3 · 0,7 *b)* 0,05 · 0,6 *c)* 0,08 · 2,1

Uppgift 15 b 0,4 / 0,1 = 4 / 1 = 4

En metod att utföra divisionen är att använda sig av inverser.
Inversen till 0,1 är 10 (eftersom 0,1 · 10 = 1). Vi vet att en division med ett tal kan ersättas av en multiplikation med inversen. Det innebär att 0,4 / 0,1 = 0,4 · 10 = 4.

En annan metod är att använda sig av innehållsdivision, alltså hur många gånger 0,1 ryms (innehålls) i 0,4. Man kan på en konkret nivå fråga sig hur många gånger man kan ta 0,1 liter från 0,4 liter.

En ännu enklare metod är att byta enhet. Istället för att arbeta med 0,4 liter och 0,1 liter kan man arbeta med 4 dl och 1 dl. Man får då ett heltal i nämnaren.

På motsvarande sätt kan man utföra divisionen 0,34 / 0,2 genom att räkna i tiondelar (ungefär som att förlänga $\frac{0,34}{0,2}$ med 10) vilket ger 3,4 / 2 och division med ett heltal.

Lägg märke till att den som behärskar flera metoder för att göra en beräkning alltid har en lösning till hands. Om man har glömt, eller är tveksam om, en metod så är det bara att välja en annan.

Övning 15.2

Beräkna *a)* 0,08 / 0,4 *b)* 0,36 / 0,06 *c)* 2,5 / 0,05

Udda och jämna tal

När man utför additioner, subtraktioner, multiplikationer eller divisioner med naturliga tal, så finns det enkla metoder för att avgöra om resultatet blivit fel. Detta är poängen med följande uppgift.

Uppgift 16 a. Summan av två udda tal är ett jämnt tal.
b. Produkten av två udda tal är ett udda tal.
c. Summan av ett udda tal och ett jämnt tal är ett udda tal.
d. Produkten av ett udda tal och ett jämnt tal är ett jämnt tal.

Uppgift a kan man lösa praktiskt eller mer formellt. Vi börjar med ett praktiskt resonemang. Om det finns ett udda antal föremål (2m + 1) så kan man bilda m par och det 1 över. Har man dessutom ett udda antal andra föremål (2n + 1) så kan man av dem bilda n par och det blir 1 över. Slår man samman dessa mängder så får man m + n par och det blir 2 över. Men de se 2 som blir över bildar ett nytt par. Summan är alltså ett jämnt tal.

Detta kan tecknas $(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$ som är ett jämnt tal.

Svaret på uppgift b finner man om man studerar multiplikationstabellen. Det är bara produkten av två udda tal som är ett udda tal (de skuggade).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Mer formellt kan man skriva ett udda tal som $2n + 1$. Produkten av två udda tal kan därför skrivas $(2m+ 1)(2n + 1) = 4m^2 + 2m + 2n + 1 = 2(2m^2 + m + n) + 1$, vilket är ett jämnt tal plus 1, dvs. ett udda tal.

På uppgift c kan man tänka så här. Vad händer om man har ett antal par med skor och får ett nytt antal skor som förutom par innehåller en enstaka sko och slår samman dessa skor? Jo fortfarande har man en sko som inte bildar par (en udda sko).

Mer formellt kan man skriva detta som $(2m + 1) + 2n = 2(m + n) + 1$ vilket är ett udda tal.

På uppgift d kan man tänka så här: Om man multiplicerar ett udda tal, 2n +1, med 2 så får man 2n + 1 par, dvs ett jämnt tal. Detsamma gäller om man multiplicerar med 4, 6, 8 …. Man kan också tänka på att ett udda antal par med skor består av par.

Att produkten av ett udda och ett jämnt tal är ett jämnt tal. Detta framgår också av multiplikationstabellen. Det är bara produkten av två udda tal som är ett udda tal. Alla andra produkter är jämna tal.

Mer formellt kan produkten av ett jämnt tal och ett udda tal skrivas $2m \cdot (2n + 1) = 4mn + 2m = 2(2mn + m)$ vilket är ett jämnt tal.

Övning 16.1

Du har två udda tal och ett jämnt tal.
a) Är summan ett jämnt tal?   b) Är produkten ett jämnt tal?

Övning 16.2

Du har tre udda tal.
a) Är summan ett jämnt tal?   b) Är produkten ett jämnt tal?

Facit till övningarna

1.1 a) $63 + (75 + 25) = 63 + 100 = 163$
b) $47 + 53 + 58 = 100 + 58 = 158$
c) $156 – 56 + 84 = 100 + 84 = 184$

1.2 a) $42 \cdot 8 \cdot 25 = 42 \cdot 200 = 8\,400$
b) $35 \cdot 2 \cdot 80 = 70 \cdot 80 = 5\,600$
c) $15 \cdot 20 \cdot 9 = 300 \cdot 9 = 2\,700$

2.1 a) 2 upp och 3 ner från 90 ger differensen 5 eller addera 3 till båda termerna vilket ger $92 – 87 = 95 – 90 = 5$.

b) Addera 3 till båda termerna vilket ger $204 – 97 = 207 – 100 = 107$ eller jämför med 100 vilket ger 104 upp och 3 ner och differensen 107.

c) Addera 3 till båda termerna vilket ger $406 – 297 = 409 – 300 = 109$ eller jämför med 300 vilket ger 106 upp och 3 ner och differensen 109.

3.1 a) $18 \cdot 35 = 9 \cdot 2 \cdot 35 = 9 \cdot 70 = 630$

b) $4 \cdot 16 = 4 \cdot 2 \cdot 8 = 8 \cdot 8 = 64$ eller $4 \cdot 16 = 2 \cdot 2 \cdot 16 = 2 \cdot 32 = 64$

c) $28 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$

4.1 a) Överslag $2,5 \cdot 3,6 \approx 3 \cdot 3 = 9$. $2,5 \cdot 3,6 = 2,5 \cdot 4 \cdot 0,9 = 10 \cdot 0,9 = 9$

b) Överslag $0,8 \cdot 3,5 \approx 1 \cdot 3 = 3$. $0,8 \cdot 3,5 = 0,8 \cdot 5 \cdot 0,7 = 4 \cdot 0,7 = 2,8$

c) Överslag $0,16 \cdot 25 \approx 0,2 \cdot 20 = 4$. $0,16 \cdot 25 = 0,04 \cdot 4 \cdot 25 = 0,04 \cdot 100 = 4$

5.1 a) $\frac{6}{a} \cdot \frac{a}{2} = 3 \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{a}{2} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\frac{6}{a} \Big/ \frac{2}{a} = 3 \cdot \frac{2}{a} \Big/ \frac{2}{a} = 3 \cdot 1 = 3$

c) $\frac{6}{5} \Big/ \frac{1}{5} = 6 \cdot \frac{1}{5} \Big/ \frac{1}{5} = 6 \cdot 1 = 6$

6.1 a) $\frac{1}{3}$ av $21 = 21 / 3 = 7$

b) $\frac{1}{3}$ av $2,1 = 2,1 / 3 = 0,7$. Man kan tänka 21 tiondelar / 7

c) $\frac{1}{3}$ av $0,21 = 0,21 / 3 = 0,07$. Man kan tänka 21 hundradelar / 7

6.2 a) $\frac{3}{4}$ av 1,6 = 3 · $\frac{1}{4}$ av 1,6 = 3 · 1,6 / 4 = 3 · 0,4 = 1,2

b) $\frac{3}{4}$ av 0,16 = 3 · $\frac{1}{4}$ av 0,16 = 3 · 0,16 / 4 = 3 · 0,04 = 0,12

c) $\frac{2}{3}$ av 0,21 = 2 · $\frac{1}{3}$ av 0,21= 2 · 0,21 / 3 = 2 · 0,07 = 0,14

7.1 a) $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ / 3 = $\frac{1}{6}$. Tänk t.ex. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = 3 \cdot \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{5}$ av $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ / 5 = $\frac{1}{10}$. Tänk t.ex. $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 5 \cdot \frac{1}{10}$. Man kan också tänka $\frac{1}{5}$ av 0,5 = 0,1

c) $\frac{2}{3}$ av $\frac{1}{2}$ = 2 · $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{2}$ = 2 · $\frac{1}{2}$ / 3 = 1 / 3 = $\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{5}$ av $\frac{1}{2}$ = 3 · $\frac{1}{5}$ av $\frac{1}{2}$ = 3 · $\frac{1}{2}$ / 5 = 3 · $\frac{1}{10}$ = $\frac{3}{10}$

7.2 a) Inversen till $\frac{1}{5}$ är 5 eftersom $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

b) Inversen till 6 är $\frac{1}{6}$ eftersom $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$

c) Inversen till $\frac{3}{5}$ är $\frac{5}{3}$ eftersom $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$

d) Inversen till $\frac{a}{b}$ är $\frac{b}{a}$ eftersom $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

8.1 a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$

c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

9.1 a) $\frac{6}{7} / 3 = \frac{6/3}{7} = \frac{2}{7}$ eller tänk att $\frac{6}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}$

b) $\frac{6}{5} / 2 = \frac{6/2}{5} = \frac{3}{5}$ eller tänk att $\frac{6}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}$

c) $\frac{3}{4} / 3 = \frac{3/3}{4} = \frac{1}{4}$ eller tänk att $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

9.2 a) $4 \cdot \frac{2}{11} = \frac{4 \cdot 2}{11} = \frac{8}{11}$

b) $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

c) $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 4}{9} = \frac{8}{9}$

10.1 a) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12}$

b) $\frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{8}{20}$

c) $\frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{20}{35}$

10.2 a) $\frac{12}{15} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{16}{28} = \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{4}{7}$

c) $\frac{24}{36} = \frac{12 \cdot 2}{12 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

11.1 a) $\frac{5}{8} = \frac{35}{56}$ och $\frac{4}{7} = \frac{32}{56}$ Det innebär att $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$

b) $\frac{6}{7} = \frac{48}{56}$ och $\frac{7}{8} = \frac{49}{56}$ Det innebär att $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$

c) $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ Det innebär att $1\frac{1}{3} = \frac{8}{6}$

12.1 a) $1 = \frac{7}{7} = \frac{14}{14}$ och $\frac{6}{7} = \frac{12}{14}$ Ett svar är $\frac{13}{14}$

b) $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ och $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ Ett svar är $\frac{11}{16}$

c) $\frac{3}{11} = \frac{9}{33}$ och $\frac{1}{3} = \frac{11}{33}$ Ett svar är $\frac{10}{33}$

13.1 a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{4\cdot 2}{4\cdot 5} + \frac{5\cdot 1}{5\cdot 4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

b) $\frac{2}{7} + \frac{2}{3} = \frac{3\cdot 2}{3\cdot 7} + \frac{7\cdot 2}{7\cdot 3} = \frac{6}{21} + \frac{14}{21} = \frac{20}{21}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3\cdot 3}{3\cdot 4} + \frac{2\cdot 1}{2\cdot 6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$

13.2 a) $\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{4\cdot 2}{4\cdot 5} - \frac{5\cdot 1}{5\cdot 4} = \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{3}{20}$

b) $\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{3\cdot 5}{3\cdot 7} - \frac{7\cdot 2}{7\cdot 3} = \frac{15}{21} - \frac{14}{21} = \frac{1}{21}$

c) $1\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{5}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3\cdot 5}{3\cdot 4} - \frac{2\cdot 5}{2\cdot 6} = \frac{15}{12} - \frac{10}{12} = \frac{5}{12}$

14.1 a) $\frac{8}{9} / \frac{2}{9} = 8 / 2 = 4$

b) $\frac{9}{11} / \frac{3}{11} = 9 / 3 = 3$

c) $\frac{6}{7} / \frac{5}{14} = \frac{12}{14} / \frac{5}{14} = 12 / 5 = 2\frac{2}{5}$

14.2 a) $\frac{8}{9} / \frac{2}{9} = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4$

b) $\frac{9}{11} / \frac{3}{11} = \frac{9}{11} \cdot \frac{11}{3} = \frac{9}{3} = 3$

c) $\frac{6}{7} / \frac{5}{14} = \frac{6}{7} \cdot \frac{14}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

14.3 a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1\cdot 1}{5\cdot 2} = \frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1\cdot 1}{6\cdot 11} = \frac{1}{66}$

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1\cdot 1}{10\cdot 10} = \frac{1}{100}$

14.4 a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$

b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{11} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 11} = \frac{25}{66}$

c) $(\frac{7}{10})^2 = \frac{7 \cdot 7}{10 \cdot 10} = \frac{49}{100}$

15.1 a) 0,3 · 0,7 = 3 · 7 · 0,1 · 0,1 = 21 · 0,01 = 0,21

b) 0,05 · 0,6 = 5 · 6 · 0,01 · 0,1 = 30 · 0,001 = 0,030

c) 0,08 · 2,1 =8 · 21 · 0,01 · 0,1 = 162 · 0,001 = 0,162

15.2 a) Räkna i hundradelar: 0,08 / 0,4 = 0,.08 / 0,40 = 8 / 40 = 0,2

b) Räkna i hundradelar: 0,36 / 0,06 = 36 / 8 = 6

c) Räkna i hundradelar: 2,5 / 0,05 = 2,50 / 0,05 = 250 / 5 = 50

16.1 a) Ja

b) Ja

16.2 a) Nej, ett udda tal

b) Nej, ett udda tal

Diagnos 2: Geometri

Innehåll

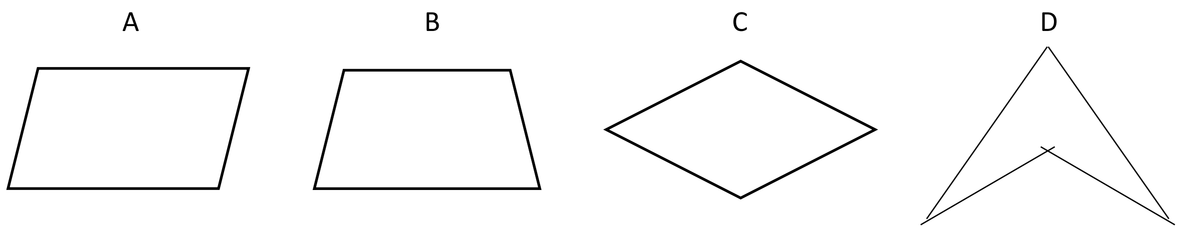
Diagnostiskt test vid kursstarten: Geometri

Lös följande uppgifter och förklara hur du resonerar när du löser dem.

1. Vad menas med a) sträcka? b) stråle? c) vinkel?

2. a) Vilka av figurerna är symmetriska? Rita ut eventuella symmetrilinjer.

   b) Beskriv likheter och skillnader mellan figurerna.



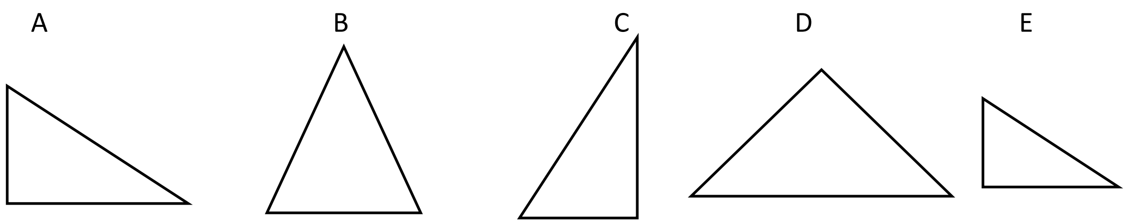
3. Definiera begreppen a) parallellogram b) romb c) rektangel

4. Definiera begreppen a) cirkel b) korda c) radie d) diameter

5. En av vinklarna i en likbent triangel är 50°. Bestäm de övriga vinklarna.

6. Rita en triangel som a) är likbent. b) är rätvinklig. c) är liksidig. d) har en trubbig vinkel.

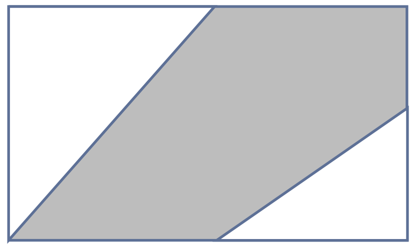
7. Vilka av följande trianglar är a) kongruenta? b) likformiga?



8. Bestäm arean av
   a) en rätvinklig triangel med kateterna 6 cm och 8 cm.
   b) en romb med diagonalerna 12 cm och 8 cm.

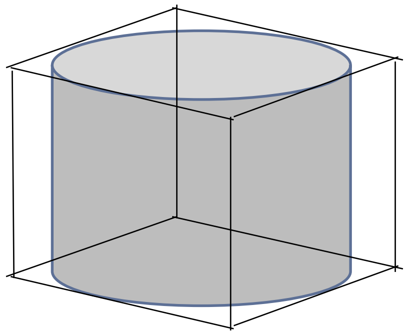
9. En cirkel har diametern 6 cm. Bestäm a) cirkelns omkrets. b) cirkelområdets area.

10. Arean av rektangeln i figuren är 16 cm^2.
Bestäm arean av den skuggade femhörningen.



11. Beskriv så noga du kan a) ett rätblock. b) en tetraeder.

12. En cylinder är inskriven i en kub med kanten 4 cm.
   a) Bestäm kubens volym.
   b) Bestäm cylinderns volym.



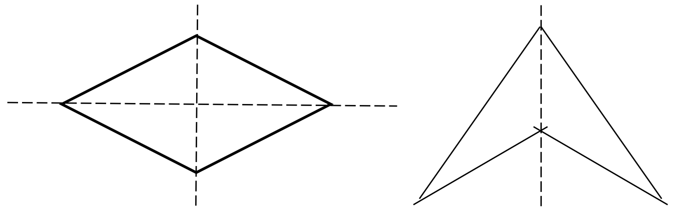
Facit till det diagnostiska testet

Uppgift 1 a En rät linje som är begränsad åt båda hållen.

Uppgift 1 b En rät linje som är begränsad åt ett håll.

Uppgift 1 c Område mellan två strålar eller sträckor som möts i en gemensam ändpunkt.

Uppgift 2 a C och D



Uppgift 2 b Alla är fyrhörningar med fyra sidor och fyra hörn.
I figur A, B och C är minst två sidor parallella.
A och C är parallellogrammer.
A, C och D har parvis lika långa sidor.

Uppgift 3 a En fyrhörning vars motstående sidor är parallella. Det innebär att motstående sidor är lika stora och motstående vinklar är lika stora. En diagonal delar parallellogrammen i två kongruenta trianglar.

Uppgift 3 b En parallellogram där alla sidor är lika långa. Diagonalerna är symmetrilinjer.

Uppgift 3 c En parallellogram där alla vinklar är lika stora, 90°.

Uppgift 4 a En kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd till en fix punkt. Det givna avståndet kallas för radien.

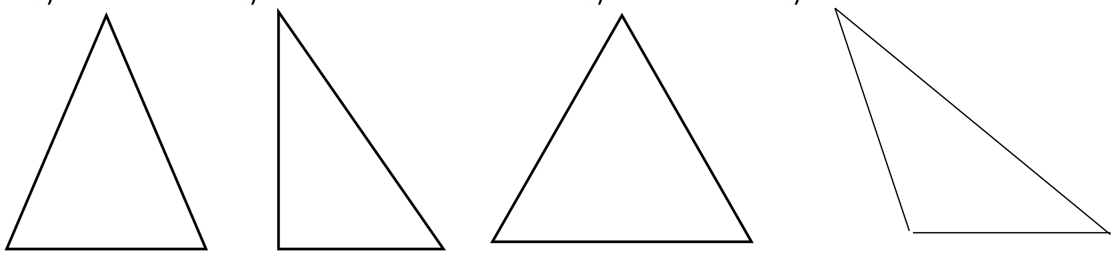
Uppgift 4 b En sträcka mellan två punkter på cirkeln.

Uppgift 4 c Avståndet från en punkt på cirkeln till cirkelns medelpunkt.

Uppgift 4 d En korda som går genom medelpunkten. Det innebär att den är dubbelt så stor som radien. Diametern är den största kordan i en cirkel.

Uppgift 5 Det finns två lösningar 50°, 50° och 80° eller 50°, 65° och 65°.

Uppgift 6 a) b) c) d)



Uppgift 7 a	A och C
Uppgift 7 b	A, B och E. (Två kongruenta figurer är också likformiga.)
Uppgift 8 a	24 cm^2
Uppgift 8 b	48 cm^2
Uppgift 9 a	6π cm ≈ 18,85 cm
Uppgift 9 b	9π cm^2 ≈ 28,27 cm^2
Uppgift 10	10 cm^2
Uppgift 11 a	Rätvinklig parallellepiped, alltså en kropp som begränsas av sex rektangelområden. Det innebär att alla vinklar är 90.
Uppgift 11 b	Polyeder som begränsas av fyra triangelområden.
Uppgift 12 a	64 cm^3
Uppgift 12 b	16π cm^3 ≈ 50,27 cm^3. ($\frac{\pi}{4}$ av kubens volym.)

Kommentarer och övningar

Innan vi går igenom svar och lösningar uppgift för uppgift, vill vi påpeka några viktiga detaljer:

- En diagnos är bara ett stickprov. Det är inte möjligt att på en diagnos täcka alla typer av uppgifter. Det stickprov av uppgifter vi valt är av en typ som vi vet att många studenter har problem med och som vi anser vara av stor betydelse för dig i din utbildning.
- Det handlar inte bara om att ge rätt svar. Det handlar om att förstå svaret på ett sätt som gör det möjligt för dig att utveckla didaktiska kunskaper och att förklara alternativa lösningar för dina egna elever. Även om du anser dig ha presenterat den mest ideala lösningen bör du reflektera över alternativa lösningar. Ett mål är ju att du på sikt ska förstå alla dina elevers lösningar.
- Om du inte lärt dig lösa en viss typ av uppgift i skolan, beror detta sannolikt på att du har haft en negativ attityd till matematik och trott att matematik är svårt att förstå och lära sig. Lämna det bakom dig och börja på nytt. Det mesta är betydligt enklare än du tror. Den som vågar vinner!

Vi går nu igenom uppgifterna på diagnosen i tur och ordning och lyfter samtidigt fram hur man kan tänka på ett enkelt och konstruktivt sätt när man löser dem. I en del fall stannar vi kvar vid en speciell uppgiftstyp för att generalisera de idéer den bygger på. Varje uppgift eller grupp av uppgifter följs sedan upp med några övningar där du själv kan pröva nya idéer eller metoder.

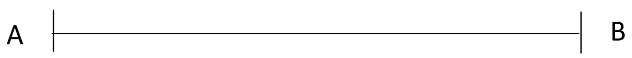
Grundläggande geometriska begrepp

Inom geometrin finns det ett antal grundläggande begrepp: punkt, linje, plan och rum. Punkten är en odefinierad storhet. Man kan tänka sig att den representerar en plats utan utsträckning. Om man har två punkter så kan man definiera en sträcka som består av alla punkter som ligger mellan dessa två punkter. Man kan konstruera en sträcka genom att förbinda punktera med hjälp av en linjal. Om man i tanken förlänger sträckan med en oändligt lång linjal åt båda hållen får man en rät linje.

Enligt boken *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008), är en rät linje en ”kurva om är rak och obegränsad åt båda hållen”. Om vi utgår från att vi vet vad en linje är kan man enkelt besvara uppgift 1.

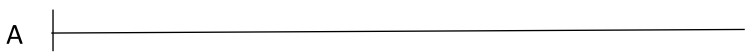
Uppgift 1 a En sträcka är en rät linje som är begränsad åt båda hållen.

En sträcka har två ändpunkter, till exempel A och B, och brukar avbildas så här:

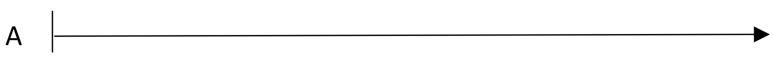


Uppgift 1 b En stråle består av en punkt A på en rät linje och alla punkter på den ena sidan av A.

Strålen har alltså en enda ändpunkt och brukar avbildas så här

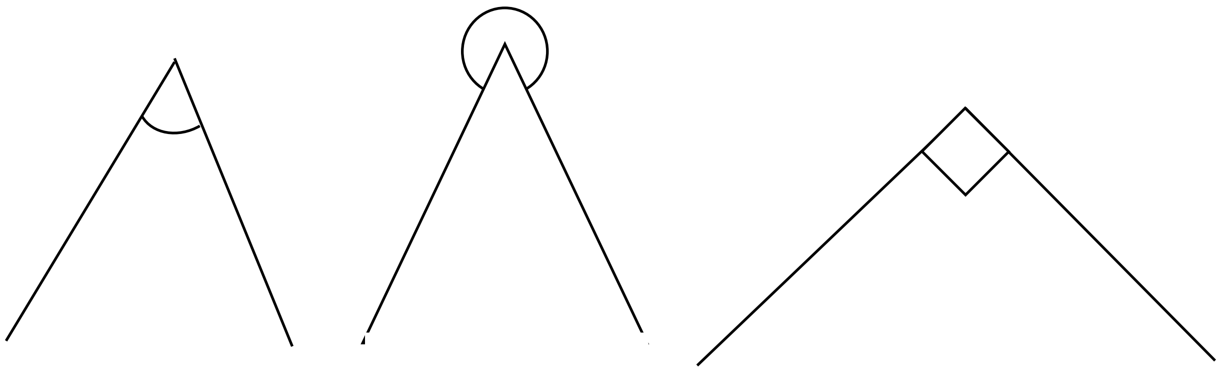


eller så här



Uppgift 1 c En vinkel är området mellan två strålar eller två sträckor som möts i en gemensam ändpunkt.

En vinkel avbildas så här. De två strålarna eller sträckorna kallas för vinkelns ben och den gemensamma ändpunkten kallas för vinkelns spets. Observera att de två strålarna eller sträckorna definierar två vinklar, vars summa är 360° (ett helt varv). Den vinkel som avses markerat med en båge eller om vinkeln är rät med en liten vinkel på 90°.



När man mäter en vinkel så tar man reda på hur många grader (hur stor del av ett helt varv) som det ena vinkelbenet måste vridas kring spetsen för att sammanfalla med det andra.

Övning 1.1

Med hjälp av två punkter kan man definiera en rät linje.
Hur många punkter krävs det för att definiera ett plan?

Övning 1.2

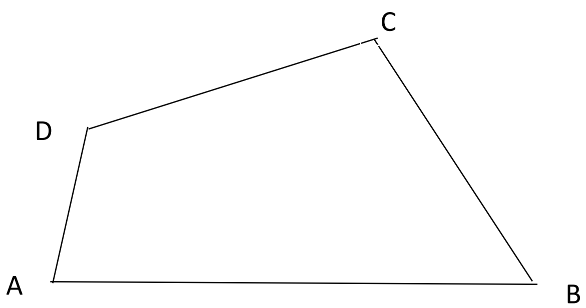
Två räta linjer som inte är parallella skär varandra i en punkt.
Hur ser skärningen ut mellan två plan som inte är parallella?

Övning 1.3

Två räta linjer som ligger i samma plan kan skära varandra i högst en punkt.
I hur många punkter kan fyra linjer (som inte ligger i samma plan) skära varandra.

Fyrhörningar och trianglar

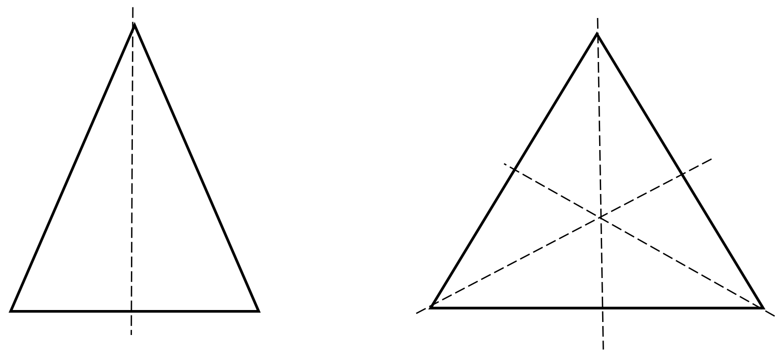
Med hjälp av sträckor kan man bygga månghörningar. En månghörning består av ett antal sträckor som hänger ihop i alla sina ändpunkter. Exempel på månghörningar är trianglar, fyrhörningar, femhörningar osv.



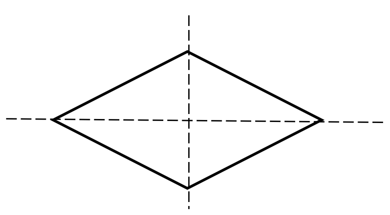
En fyrhörning är uppbyggd av fyra sträckor (i figuren AB, BC, CD och DA) som hänger ihop i sina ändpunkter A, B, C och D. Sträckorna kallas för fyrhörningen sidor och ändpunkterna kallas för hörn.

Om man kan sammanbinda två hörn i en månghörning med en sträcka som inte är sida i månghörningen, kallas sträckan för diagonal. I en fyrhörning kan man dra två diagonaler (AC och BD i figuren).

En del månghörningar har speciella egenskaper. Om till exempel två sidor i en triangel är lika långa, kallas den för likbent. Om alla sidorna är lika långa, kallas den för liksidig. Likbenta och liksidiga trianglar är symmetriska och har därför speciella egenskaper.



Uppgift 2 a Figurerna C och D är symmetriska och har två respektive en symmetrilinje.



Att figurerna är symmetriska innebär att de kan vikas utefter en symmetrilinje så att en ena halvan av figuren exakt sammanfaller med den andra. Man kan säga att de två halvorna är spegelbilder av varandra.

I figur A kan man dra en diagonal som delar figuren i två exakt likadana figurer. Man säger att de två delarna är kongruenta, men de är inte spegelbilder av varandra.

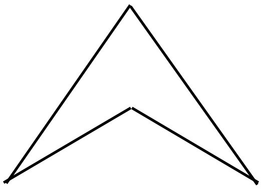
Uppgift 2 b Alla figurerna är fyrhörningar med fyra sidor och fyra hörn.
I figur A, B och C är minst två sidor parallella.
A och C är parallellogrammer.
A, C och D har parvis lika långa sidor.

Figur A är en parallellogram, vilket innebär att motstående sidor är parallella. Det medför i sin tur att om man delar figuren med en diagonal, så bidas två kongruenta (exakt likadana) figurer. Det innebär i sin tur att motstående sidor är lika långa och att motstående vinklar är lika stora. Detta är egenskaper som finns hos alla parallellogrammer.

Figur B har bara två sidor parallella och är därför inte en parallellogram. Den figuren kallas för parallelltrapets. Observera att parallellogrammer är parallelltrapetser.

Lägg märke till att fyrhörningar även kan se ut som figur D.

Observera att sidorna är parvis lika långa.



Övning 2.1

a) Hur många symmetriaxlar har en liksidig triangel?

b) Hur många diagonaler kan du dra i en triangel?

c) Hur många diagonaler kan man dra i en femhörning?

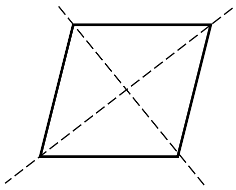
Olika typer av parallellogrammer

Månghörningarna (polyedrarna) kan delas in i olika grupper med gemensamma egenskaper. En sådan grupp som är vanligt förekommande i skolans geometriundervisning är parallellogrammerna. Genom att utgå från parallellogrammens egenskaper blir det betydligt lättare att hålla reda på egenskaper hos speciella parallellogrammer såsom rektangeln, romben och kvadraten.

Uppgift 3 a En fyrhörning vars motstående sidor är parallella.

Parallellogrammens egenskaper har redan beskrivits i föregående avsnitt.

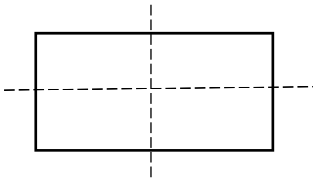
Uppgift 3 b En parallellogram där alla sidor är lika långa.



Diagonalerna i en romb är också symmetrilinjer.

Diagonalerna är vinkelräta. Det innebär att diagonalerna delar romben i fyra kongruenta, rätvinkliga trianglar.

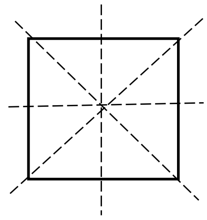
Uppgift 3 c En parallellogram där alla vinklar är lika stora, 90°.



Även rektangeln har två vinkelräta symmetrilinjer. Dessa delar motstående sidor i två lika långa delar.

Observera att diagonalerna inte är symmetrilinjer, men att de delar varandra i två lika långa delar.

Till detta kan man lägga att kvadraten är samtidigt både en rektangel och en romb. Det är alltså en parallellogram där alla vinklar är lika stora (90°) och även alla sidor är lika långa. Det innebär bland annat att kvadrater har fyra symmetrilinjer varav två samtidigt är diagonaler.



Övning 3.1

Vilka olika typer av fyrhörningar kan man konstruera om man har två sträckor som är 6 cm långa och två sträckor som är 4 cm långa? Rita figurer.

Övning 3.2

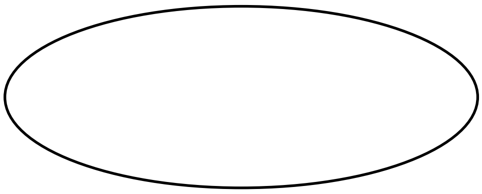
Konstruera en triangel med sidorna 4 cm, 6 cm och 11 cm.

Övning 3.3

Hur många symmetrilinjer finns det i en regelbunden femhörning.

Cirkelns geometri

Tillsammans med kvadraten och triangeln är cirkeln en av de första figurerna våra elever möter i skolan. Fast egentligen möter de inte figurerna utan de möter motsvarande områden. Vi har hittills studerat vad som menas med kvadrat och rektangel. Men vad menas egentligen med en cirkel? Många elever säger att det är något runt, men det finns många runda figurer, till exempel ellipser.

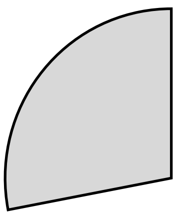


Uppgift 4 a Cirkeln är en kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd till en fix punkt. Det givna avståndet kallas för radien.

När man ska rita en cirkel väljer man först den fixa punkten, medelpunkten. Man ställer därefter ni ett bestämt avstånd, alltså radien, mellan passarens spetsar. När man ritar cirkeln kommer därför varje punkt på cirkeln att ha samma avstånd till medelpunkten.

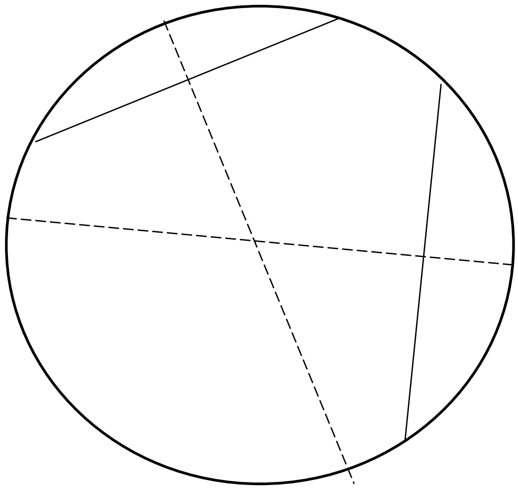
Lägg märke till att cirkeln enbart består av de punkter som har ett bestämt avstånd till medelpunkten (det man ritar med passaren). Om man dessutom avser alla punkter som ligger innanför cirkeln så kallas detta för cirkelområde. Cirkeln har således inte någon yta.

En del av en cirkel kallas för cirkelbåge. I figuren ses ett område som kallas cirkelsektor och som begränsas av en cirkelbåge och två radier.



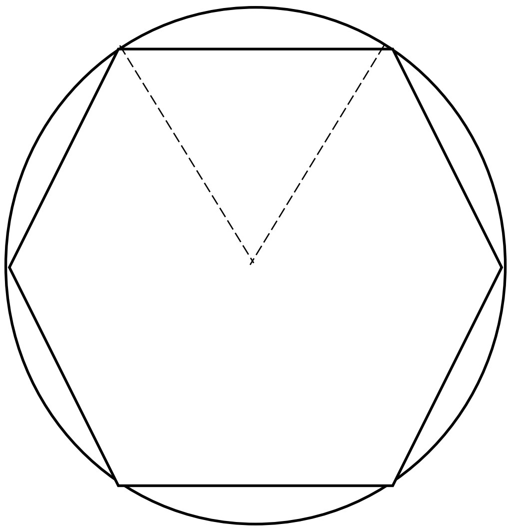
Uppgift 4 b En korda är sträckan mellan två punkter på cirkeln.

Om man drar en stråle genom mittpunkten på en korda och vinkelrätt mot kordan (en s.k. mittpunktsnormal) så går den strålen genom cirkelns medelpunkt. Man kan alltså konstruera medelpunkten till en given cirkel genom att rita mittpunktsnormalerna till två kordor (som inte är parallella).



Uppgift 4 c Radien är avståndet från en punkt på cirkeln till cirkelns medelpunkt.

Om man på en cirkel ritar sex kordor så att de parvis har samma ändpunkter, får man en regelbunden sexhörning.



Uppgift 4 d Diametern är en korda som går genom medelpunkten.

Det innebär att diametern är dubbelt så lång som radien. Diametern är den största kordan i en cirkel. Diametern är också symmetrilinje till cirkeln

Övning 4.1

Klipp ut ett cirkelområde. Hur kan man använda sig av diameterns egenskap som symmetrilinje för att bestämma cirkelområdets medelpunkt?

Övning 4.2

Hur kan man konstruera en kvadrat som är inskriven i en given cirkel? Kvadratens hörn ska alltså ligga på cirkeln.

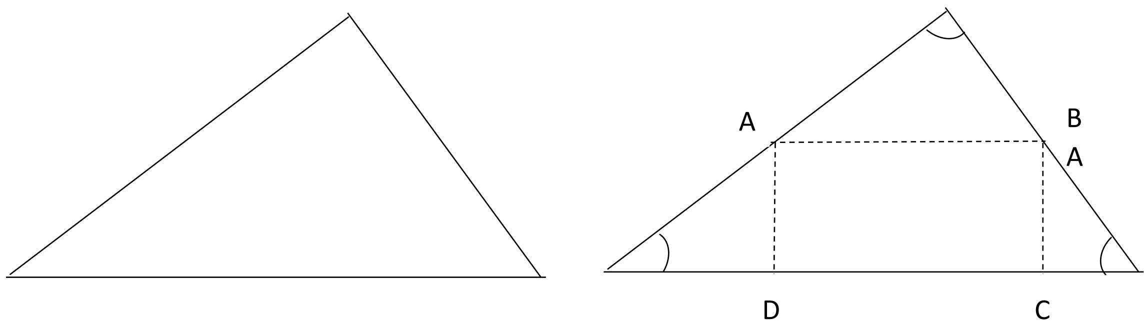
Övning 4.3

Hur kan man konstruera en liksidig triangel som är inskriven i en cirkel?

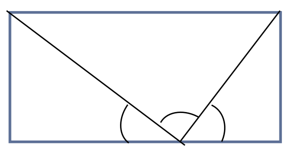
Vinklar i månghörningar

Vi inleder med vinklarna i en triangel. En vanlig laboration ser då ut påföljande sätt:

Rita (och klipp ut) en triangel som den i figuren till vänster. Rita sedan en sträcka AB, där A och B är mittpunkter på respektive sidor. Rita sedan två nya sträckor som går från A och B och vinkelrätt mot triangelns bas. Figuren till höger.

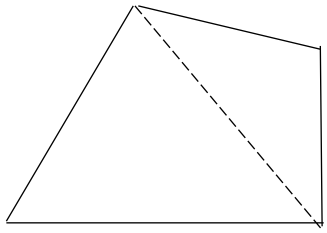


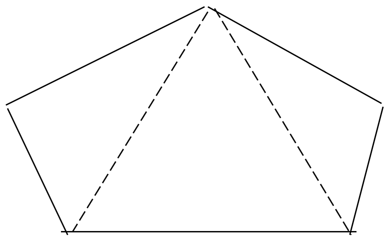
Vik triangelområdet utefter sträckorna AB, AD och BC. Vi får då följande figur.



Man ser här att summan av triangelns vinklar bildar ett halvt varv, alltså 180°.

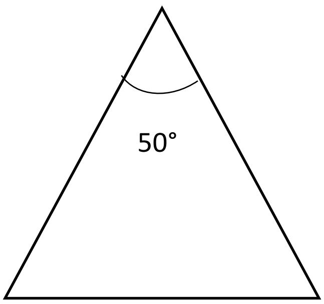
Om man vet att vinkelsumman i en triangel är 180°, så är det lätt att förstå att vinkelsumman i en fyrhörning är $2 \cdot 180° = 360°$ och vinkelsumman i en femhörning är $3 \cdot 180° = 540°$. En fyrhörning kan nämligen delas upp i två trianglar av en diagonal och en femhörning kan delas upp i tre trianglar av två diagonaler som inte skär varandra .

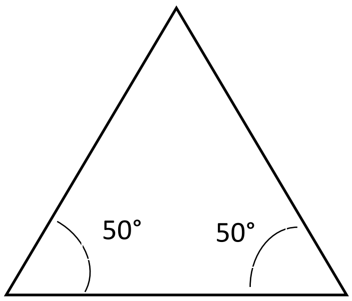




Uppgift 5 Det finns två lösningar 50°, 50° och 80° eller 50°, 65° och 65°.

Det lönar sig ofta att rita figurer som beskriver förutsättningarna. I det här fallet finns det två alternativ. Att enbart en av vinklarna är 50° som i figuren till vänster eller att två vinklar är 50° som i figuren till höger.





Övning 5.1

Dra höjden i en liksidig triangel. Triangeln delas då i två kongruenta trianglar. Bestäm storleken av vinklarna i en sådan triangel.

Övning 5.2

I en parallellogram är en av vinklarna 40°. Bestäm storleken av de övriga vinklarna.

Övning 5.3

En regelbunden femhörning har 5 lika stora vinklar. Hur stora är vinklarna?

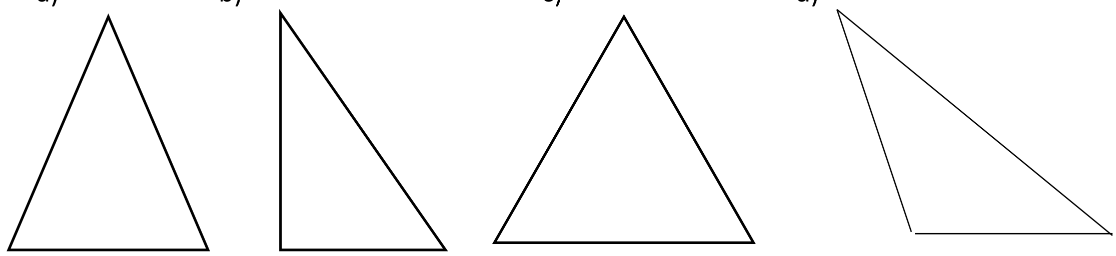
Egenskaper hos trianglar

Trianglar kan delas in i klasser (med gemensamma egenskaper) på olika sätt. Det kan handa om vinklarnas storlek som i uppgift 6, men det kan även handla om trianglarnas form. En sådan egenskap är kongruens.

Två trianglar är kongruenta om varje sträcka mellan två punkter i den ena triangeln är lika lång som motsvarande sträcka i den andra triangeln. Den ena triangeln kan då avbildas på den andra.

Två trianglar kan också vara likformiga. I så fall är varje sträcka i den ena triangeln k gånger så lång som motsvarande sträcka i den andra triangeln. Här är k en proportionalitetskonstant och man säger att den ena tringeln har avbildats på den andra i skala k :1.

Uppgift 6 a) b) c) d)



Övning 6.1
a) Varför kan en triangel inte ha två trubbiga vinklar
b) Kan en fyrhörning ha tre trubbiga vinklar?
c) Kan en fyrhörning ha tre vinkar som är 60°?

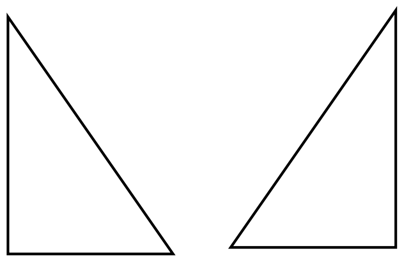
Uppgift 7 a A och C är kongruenta

Uppgift 7 b A, C och E är likformiga

Observera att två kongruenta figurer också är likformiga i skala 1 : 1.

Övning 7.1

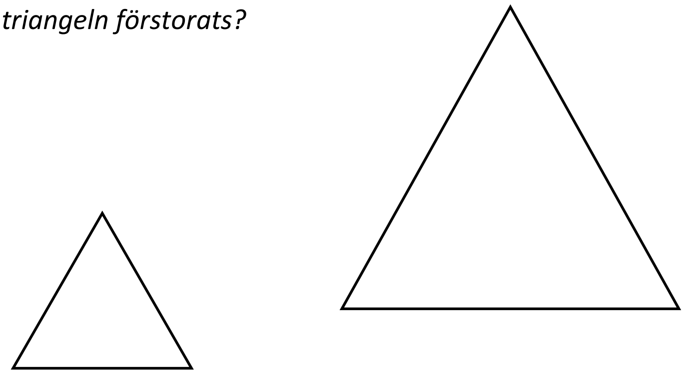
Är de här två trianglarna kongruenta?



Övning 7.2

De här två trianglarna är likformiga.

I vilken skala har den vänstra triangeln förstorats?

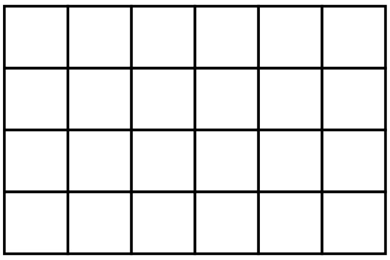


Övning 7.3

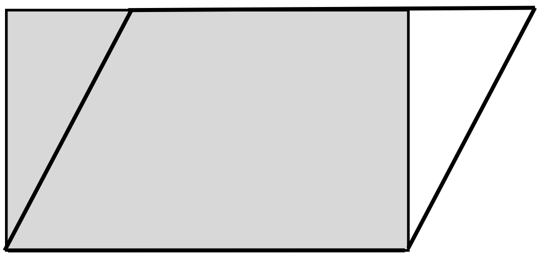
En parallellogram delas i två delar av diagonal. Är de två delarna kongruenta?

Area och omkrets

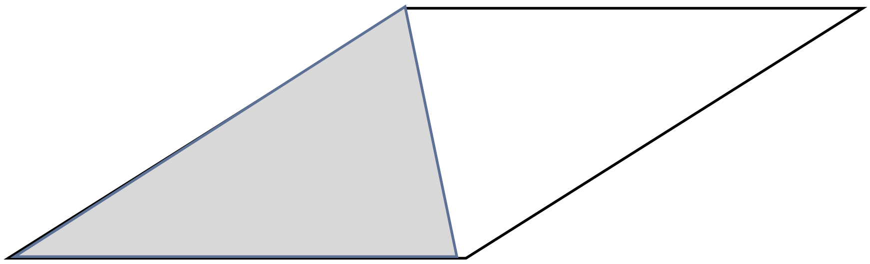
Arean av ett rektangelområde kan bestämmas som basen gånger höjden, vilket framgår av följande figur med basen 6 cm och höjden 4 cm. Antalet rutor med arean 1 cm^2 är $6 \cdot 4 = 24$.
Arean är alltså 24 cm^2.



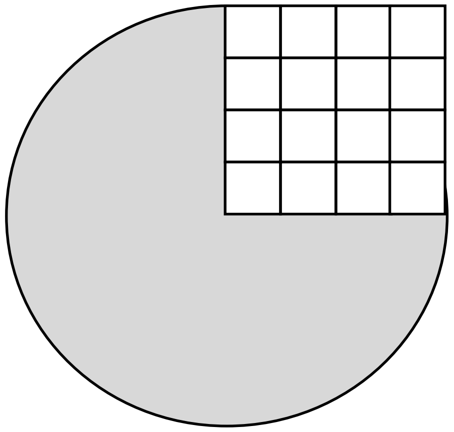
Ett parallellogramområde med samma bas och samma höjd som ett rektangelområde, har samma area som rektangelområdet. Detta framgår av följande figur, där det grå triangelområdet och det vita triangelområdet som har samma area.



På motsvarande sätt kan man visa att ett triangelområdes area är hälften av ett omskrivet parallellogramområdes area. Triangelns area är alltså basen gånger höjden dividerat med 2 dvs. $A = \frac{b \cdot h}{2}$



På motsvarande sätt kan man bestämma arean av ett cirkelområde. Man börjar med att bestämma arean av radiekvadraten, alltså det kvadratområde vars sida är lika med radien.



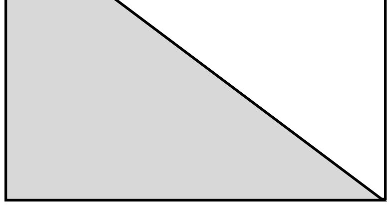
I figuren är radiekvadratens area $r^2 = 4^2$ cm^2. Ett cirkelområdes area är alltid π gånger så stor som radiekvadratens area. Cirkelområdets area är alltså $A = \pi \cdot r^2 = 16\pi$. Proportionalitetskonstanten π är ungefär 3,14.

På motsvarande sätt är cirkels omkrets π gånger så stor som cirkelns diameter. Cirkels omkrets är således $\pi \cdot d$ alltså i det här fallet $8 \cdot \pi$ där d är cirkelns diameter. Detta kan även tecknas $2 \cdot \pi \cdot r$, där r är cirkelns radie.

Uppgift 8 a 24 cm^2

Arean är hälften så stor som arean av ett rektangelområde med sidorna 6 cm och 8 cm.

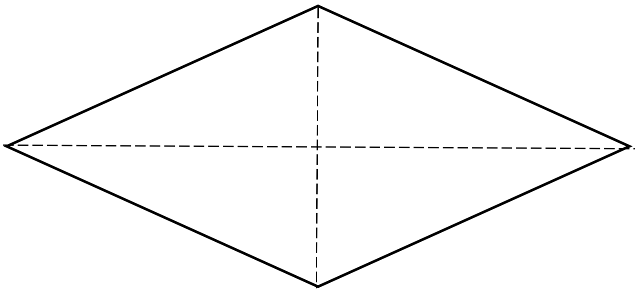
6 cm



8 cm

Uppgift 8 b 48 cm^2

Rombens diagonaler delar upp rombområdet i 4 rätvinkliga trianglar med kateterna 6 cm och 4 cm. Var och en har arean 12 cm^2. Den sammanlagda arean är alltså 48 cm^2.



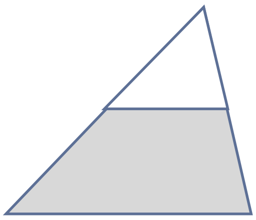
En formel för rombområdets area är produkten av diagonalerna dividerat med 2, alltså i det här fallet $\frac{12 \cdot 8}{2}$ cm^2.

Övning 8.1

I en kvadrat är diagonalen 6 cm. Bestäm kvadratområdets area.

Övning 8.2

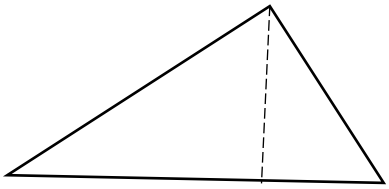
Från en triangel med arean 36 cm^2 klipper man bort en topptriangel, vars sidor är hälften av den ursprungliga triangelns sidor. Bestäm arean det område som blir kvar.



Övning 8.3

En rätvinkligtriangel har sidorna 6 cm, 8 cm och 10 cm.

Bestäm längden av den streckade höjden i triangeln.



Uppgift 9 a 6π cm ≈ 18,85 cm

Omkretsen är π gånger diametern.

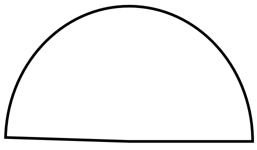
Uppgift 9 b 9π cm^2 ≈ 28,27 cm^2

Radiekvadratens area är 9 cm^2 och arean är π gånger större alltså 9π cm^2.

Övning 9.1

En halvcirkel har radien 7 cm.

Bestäm dess omkrets.

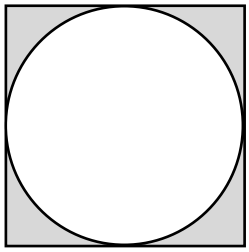


Övning 9.2

En cirkel är inskriven i en kvadrat. Kvadratens sida

är 6 cm. Bestäm arean av området mellan kvadraten och

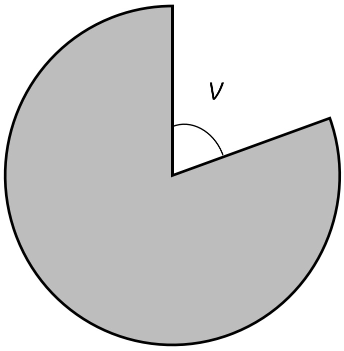
cirkeln.



Övning 9.3

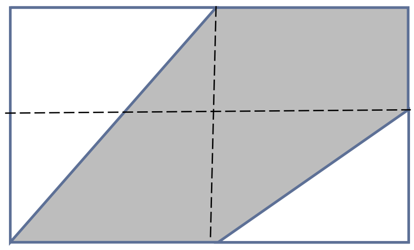
Bestäm arean av cirkelsektorn i figuren om radien är

5 cm och vinkeln v är 60°.



Uppgift 10 10 cm^2

För att lösa uppgiften delar vi först upp rektangeln i 4 delar genom att rita ut symmetrilinjerna.

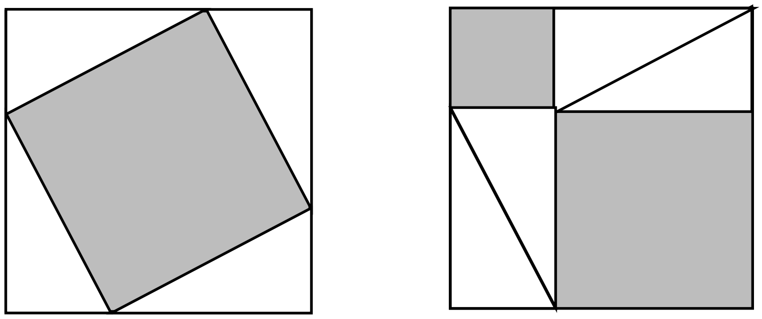


Det blir då tydligt att det större, vita triangelområdet är $\frac{1}{4}$ av rektangelområdet och att det mindre, vita triangelområdet är $\frac{1}{8}$ av rektangelområdet.

Arean av den grå femhörningen är således $\frac{5}{8}$ av 16 cm^2.

Övning 10.1

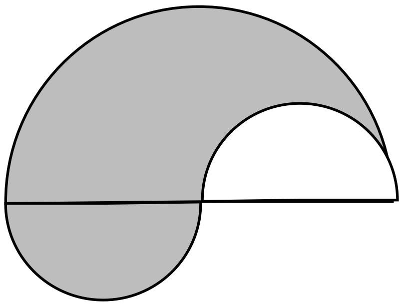
Vilket av kvadratområde är störst, Det grå till vänster eller summan av det två grå områdena till höger. (De åtta vita trianglarna är kongruenta.)



Övning 10.2

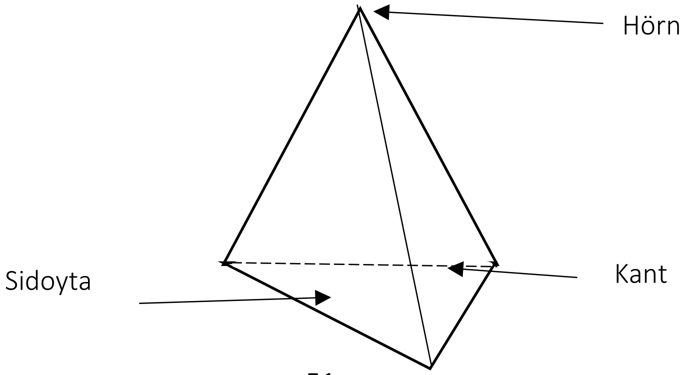
a) *Bestäm arean av det grå området i figuren till höger. Den större halvcirkeln har raden 6 cm.*

b) *Bestäm omkretsen av figuren till höger.*

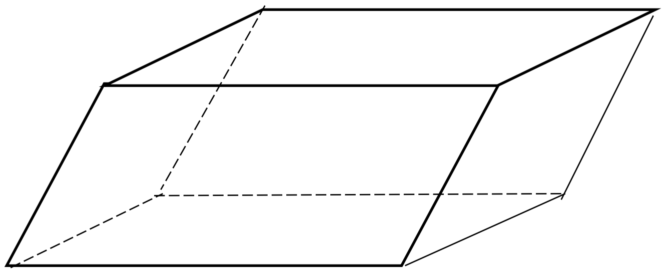


Polyedrar och deras volym

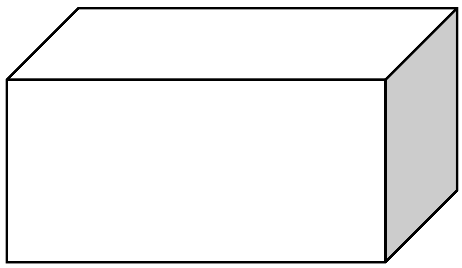
Kroppar som begränsas av ändligt många plana områden kallas för polyedrar. De termer som används för att beskriva kroppar skiljer sig från dem som använd för plana figurer. Polyedern i figuren kallas för tetraeder. Den har fyra sidoytor i form av trianglar. Sidoytorna möts två och två i kanter och kanterna möts tre och tre i hörn. En regelbunden tetraeder har fyra kongruenta sidoytor.



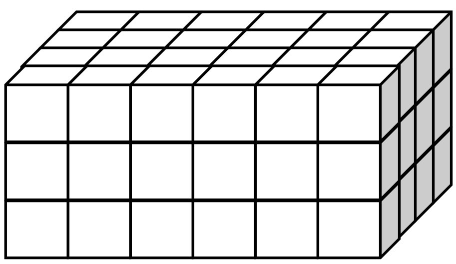
En annan typ av polyeder kallas för parallellepiped. Parallellepipedens begränsningsytor (sidoytor) är parvis parallella. Detta innebär att alla sidoytor är parallellogramområden.



För att bestämma volymen av parallellepipeden i figuren kan man kapa den i mindre bitar och foga samman bitarna så att de blir ett rätblock, alltså en parallellepiped med räta vinklar. Ett sådant rätblock har samma basyta och samma höjd som parallellepipeden. Observera att rätblocket och kuben är parallellepipeder.



För att bestämma volymen hos en parallellepiped kan man således bestämma volymen hos ett rätblock med samma basyta och samma höjd. Volymen är det antal enhetskuber som motsvarar kroppens volym. Om basytan i rätblocket har kanterna 6 cm och 4 cm och om höjden är 3 cm är antalet enhetskuber $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ och volymen 72 cm^2.



Uppgift 11 a Ett rätblock är en parallellepiped med räta vinklar.

Rätblocket begränsas av sex sidoytor som är rektangelområden. Det innebär att alla vinklar är 90°.

Uppgift 11 b Tetraedern är en polyeder med fyra sidoytor.

Tetraederns sidoytor är rektangelområden.

Övning 11.1

Hur många kanter och hur många hörn har en parallellepiped?

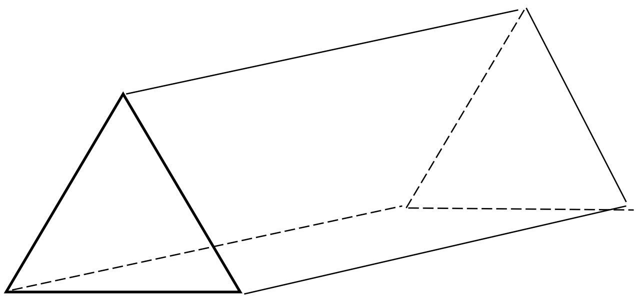
Övning 11.2

Hur många kanter och hur många hörn har en tetraeder?

Övning 11.3

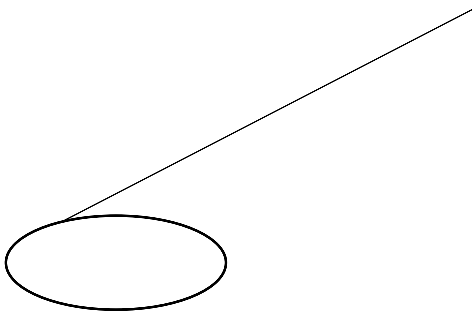
Beräkna för en parallellepiped och för en tetraeder
(antalet hörn) + (antalet sidoytor) – (antalet kanter).

Vad finner du? Gäller detta även för ett prisma av följande slag?



Cylinderns volym och mantelyta

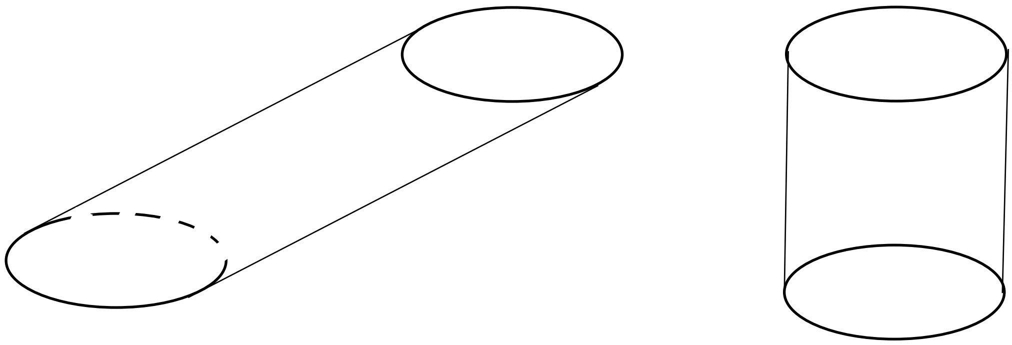
En cylinder brukar uppfattas som en konservburk, men cylindern är ett betydligt vidare begrepp än så. Vi kan utgå från en cirkel som basyta och en sträcka vars ena ändpunkt ligger på cirkeln och inte parallell med cirkeln.



.

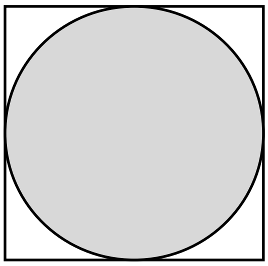
Cylindern består av alla sträckor som är parallella med den givna sträckan och har en ändpunkt på cirkeln. Vi får i det här fallet cylindern till vänster i figuren. Till höger i figuren finns en rak cylinder som har samma basyta och samma höjd som den vänstra cylindern. De har därför samma volym. Detta är inte så konstigt. Man kan stapla samma antal enkronor på båda sätten.

.



Enligt definitionen på en cylinder så behöver basytan inte vara en cirkel. Den kan lika gärna vara en triangel eller en rektangel. Formeln för cylinderns volym är således densamma som för en parallellepiped, alltså basytan gånger höjden

Om man skriver in en cirkel i en kvadrat så kommer cirkelområdets area att vara $\frac{\pi}{4}$ av kvadratområdets area. Detta är i många situationer en praktisk proportionalitet.



Uppgift 12 a 64 cm^3

Volymen är i cm^3 räknat $(kanten)^3$ alltså 4^3 cm^3 eller basytans area gånger höjden dvs $16 \cdot 4$ cm^3.

Uppgift 12 b 16π cm^3 $\approx$ 50,27 cm^3

Basytans area är $\pi \cdot 2^2$ cm^2 och höjden är 4 cm.

Eftersom basytans area är $\frac{\pi}{4}$ av den omskriva kvadraten area och båda har samma höjd, så är cylinderns volym $\frac{\pi}{4}$ av kubens volym alltså $\frac{\pi}{4}$ av 64 cm^3

Övning 12.1

Visa att ett cirkelområdes area är $\frac{\pi}{4}$ *av den omskriva kvadraten area.*

Övning 12.2

En cirkulär cylinder är 7 cm hög. Basytans diameter är 6 cm. Bestäm cylinderns volym.

Övning 12.3

Du ska tillverka ett cirkulärt rör av plåt. Rörets radie ska vara 5 cm och dess höjd 200 cm.
Vilka mått ska den plåtskiva ha som du gör röret av?

Facit till övningarna

1.1 I tre punkter som inte ligger på samma räta linje.

1.2 Två plan som inte är parallella skär varandra utefter en rät linje.

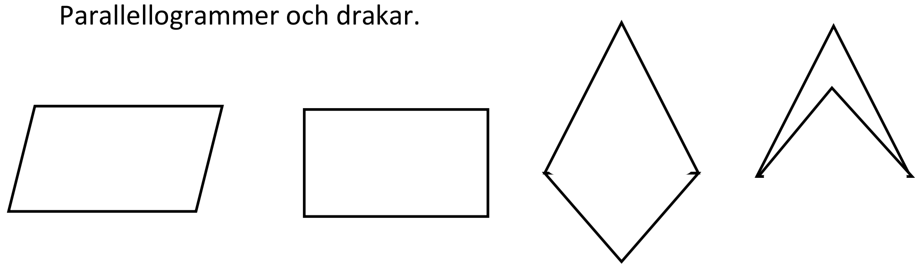
1.3 I högst 1 + 2 + 3 = 6 punkter.

2.1 a) 3 st.

b) Ingen

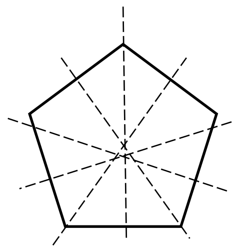
c) 5 st.

3.1 Parallellogrammer och drakar.

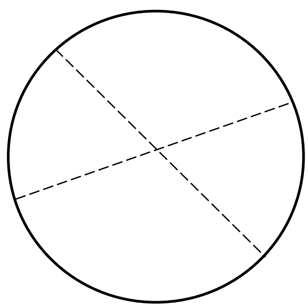


3.2 Det går inte eftersom en av sidorna är längre än de två övriga sidorna tillsammans.

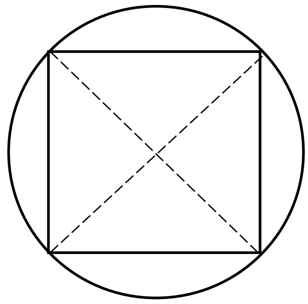
3.3 Fem



4.1 Vik cirkelområdet så att de två cirkelhalvorna täcker varandra. Halvorna delas då av diametern som är symmetrilinje. Vrid cirkeln en gång till utefter en annan diameter. De två diametrarna som bildas skär varandra i cirkelområdets medelpunkt.



4.2 Rita först två vinkelräta diametrar. Förbind sedan diametrarna ändpunkter.



4.3 Konstruera först en regelbunden sexhörning (vars sida är lika lång som radien). Förbind varannat hörn i sexhörningen.

5.1 Vinklarna är 90°, 60° och 30°.

5.2 40°, 140° och 140°

Motstående vinklar i en parallellogram är lika. Eftersom 40 + 40 = 80, så är summan av de övriga vinklarna 280°.

5.3 108°

Vinkelsumman i en regelbunden femhörning är $3 \cdot 180° = 540°$. Alla vinklarna är lika stora. Varje vinkel är således $540°/5 = 108°$.

6.1 a) Då skulle vinkelsumman bli mer än 180°.

b) Ja. Vinklarna kan till exempel vara 100°,100°,100° och 60°.

c) Nej. Då skulle den fjärde vinkeln vara 180° och då är det inte ett hörn.

7.1 Ja. Alla sträckor som kan dras i den ena triangeln är lika långa som motsvarande sträckor i den andra triangeln. Däremot är de två trianglarna varandras spegelbilder.

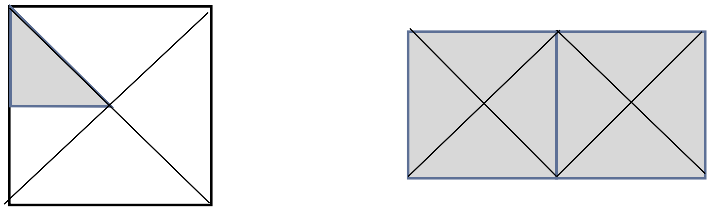
7.2 I skala 2:1

Observera samtidigt att arean blir 4 gånger större.

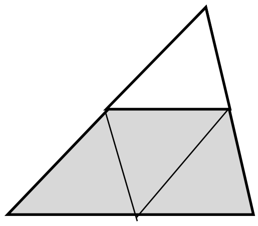
7.3 Ja, de är kongruenta.

8.1 Arean är $\frac{6 \cdot 6}{2}$ cm^2 = 18 cm^2

Detta är formeln för rombområdets area. Man kan även se detta genom att klippa isär kvadratområdet och foga samman det så här. Man får då en rektangel med basen 6 cm och höjden 3 cm:



8.2 Arean är 27 cm^2. Topptriangeln är likformig med den större triangeln i skala 2:1. Topptriangelns area är således en fjärdedel av den större triangelns area. Detta framgår tydligt av figuren.



8.3 Höjden är 4,8 cm. Triangelns area är 24 cm^2.

Om man väljer hypotenusan (10 cm) som bas och höjden till x cm blir triangelns area $\frac{10 \cdot x}{2}$ cm^2= 24 cm^2. Detta ger x = 4,8.

9.1 7π cm + 14 cm ≈ 40 cm

9.2 36 cm^2 – 9π cm^2 ≈ 7,7 cm^2

9.3 $\frac{125\pi}{6}$ cm^2 ≈ 65,4 cm^2

Hela cirkelområdets area är 25π cm^2. Cirkelsektorns area är $\frac{5}{6}$ av cirkelområdet.

10.1 Kvadratområdet till vänster är lika stort som summan av de två kvadratområdena till höger. Om man tar bort lika många kongruenta triangelområden från båda kvadraterna så blir återstoden lika stor. Detta är ett av många bevis för Pythagoras sats.

10.2 a) 18π cm^2 ≈ 56,5 cm^2

Till en större halvcirkel med arean 18π cm^2 har man lagt till och tagit bort två mindre områden.

b) 12π cm, alltså lika stor omkrets som en hel cirkel med radien 6 cm.

Observera att en cirkel med omkretsen 3 cm har hälften så stor omkrets som en cirkel med raden 6 cm.

11.1 12 kanter och 8 hörn

11.2 6 kanter och 4 hörn

11.3 För parallellepipeden gäller 8 + 6 – 12 = 2

För tetraedern gäller 4 + 4 + 6 = 2

För prismat i figuren gäller 6 + 5 – 9 = 2

Resultatet blir alltid 2 (för konvexa kroppar). Detta kallas för Eulers polyedersats.

12.1 Cirkelområdets area är $\pi \cdot r^2$ och kubens area är $4 \cdot r^2$ och $\pi \cdot r^2 / 4 \cdot r^2 = \frac{\pi}{4}$

12.2 63π cm^2 ≈ 198 cm^2

Basytan har arean 9π cm^2 och höjden är 7 cm.

12.3 Basytans omkrets är 25π cm och höjden är 200 cm.

Plåtskivan bör alltså vara rektangulär med sidorna 25π cm (≈ 78,5 cm) och höjden är 200 cm.

Diagnos 3:
Samband, förändring och enkla ekvationer

Innehåll

Diagnostiskt test vid kursstarten.
Samband, förändring och enkla ekvationer

Lös följande uppgifter och förklara hur du resonerar när du löser dem.

1. En insekt är avbildad i skala 5:1. På bilden är insekten 8 mm lång.
   Hur lång är insekten i verkligheten.

2. 2,5 kg potatis kostar 30 kr. Hur mycket kostar 7 kg potatis?

3. Två personer ska dela 735 kr i förhållandet 2:5. Hur stor andel av summan får var och en?

4. A och B delade en tipsvinst. A fick 420 kr vilket är $\frac{2}{3}$ av tipsvinsten.
   Hur stor var tipsvinsten?

5. På en skola är 32% av flickorna brunögda och 32% av pojkarna brunögda.
   Hur många procent av eleverna på skolan är brunögda?

6. Priset på ett par byxor var 450 kr. En vecka senare höjdes priset med 20%. Veckan därpå sänktes priset igen med 20%. Vad kostade byxorna då?

7. Vilka av följande tal är lösningar till ekvationen $\frac{2}{x} + 3 = x + 4$?
   x = 3 x = 1 x = 0,5 x = (-2) x = 0

8. Lös ekvationen x · (x – 3) = 0

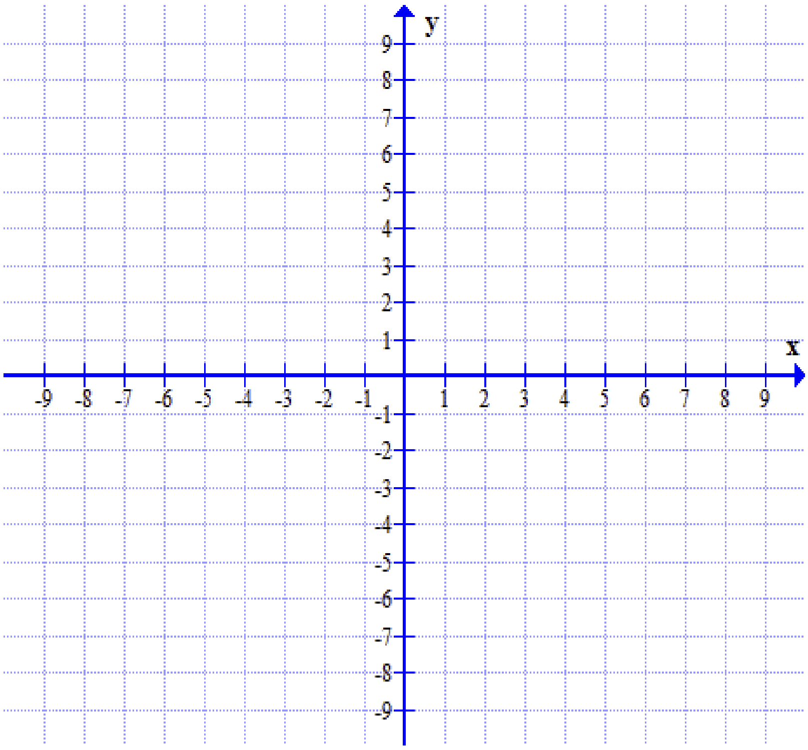
9. Lös ekvationerna
   a) 2x – 6 = 2·(3 – x)
   b) 2x – 6 = 2(x – 5)
   c) 2x – 6 = 2(x – 3).

10. Betrakta följande koordinatsystem.

a) Rita ut punkterna (3, 2), (-4, 3) och (5, -4)

b) Rita grafen till y = 2x. Vad kallas en sådan graf?

c) Rita grafen till y = (-2)x + 4. Vad kallas en sådan graf?

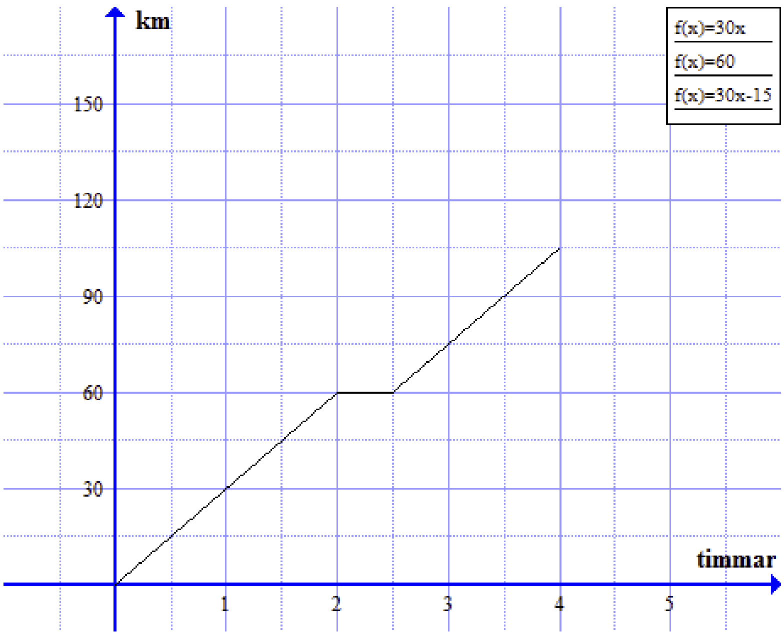


11. Elina ska cykla till sin mormor. Cykelturen tar 4 timmar.

a) Vilken medelhastighet håller Elina de första två timmarna?

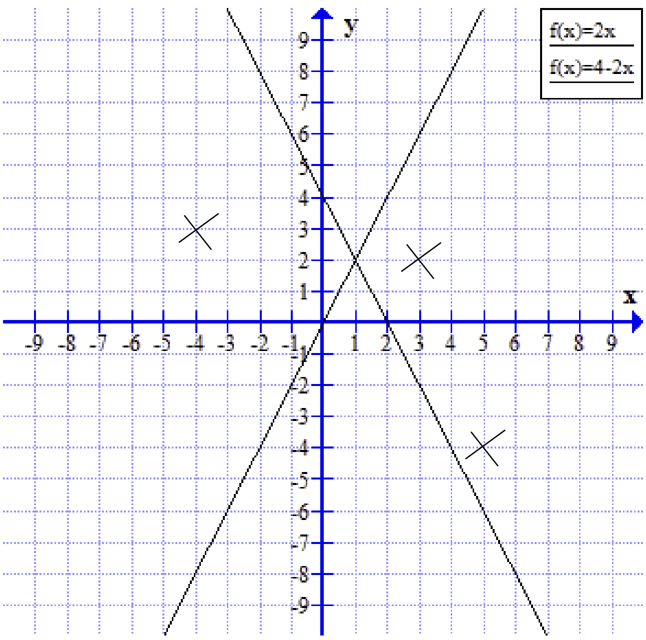
b) Vad händer efter 2 timmar?

c) Hur långt är det till mormor?



Facit till det diagnostiska testet

Uppgift 1	40 mm
Uppgift 2	84 kr
Uppgift 3	$\frac{2}{7}$ av 735 kr respektive $\frac{5}{7}$ av 735 kr
Uppgift 4	630 kr
Uppgift 5	32%
Uppgift 6	432 kr
Uppgift 7	x = 1 och x = (-2)
Uppgift 8	x = 0 och x = 3
Uppgift 9 a	x = 3
Uppgift 9 b	lösning saknas
Uppgift 9 c	alla tal x
Uppgift 10 a	Se figuren
Uppgift 10 b	Se figuren. Grafen är en proportionalitet.
Uppgift 10 c	Se figuren. Grafen är linjär.



Uppgift 11 a	30 km/h
Uppgift 11 b	Hon vilar i 30 minuter
Uppgift 11 c	105 km

Kommentarer och övningar

Innan vi går igenom svar och lösningar uppgift för uppgift, vill vi påpeka några viktiga detaljer:

- En diagnos är bara ett stickprov. Det är inte möjligt att på en diagnos täcka alla typer av uppgifter. Det stickprov av uppgifter vi valt är av en typ som vi vet att många studenter har problem med och som vi anser vara av stor betydelse för dig i din utbildning.
- Det handlar inte bara om att ge rätt svar. Det handlar om att förstå svaret på ett sätt som gör det möjligt för dig att utveckla didaktiska kunskaper och att förklara alternativa lösningar för dina egna elever. Även om du anser dig ha presenterat den mest ideala lösningen bör du reflektera över alternativa lösningar. Ett mål är ju att du på sikt ska förstå alla dina elevers lösningar.
- Om du inte lärt dig lösa en viss typ av uppgift i skolan, beror detta sannolikt på att du har haft en negativ attityd till matematik och trott att matematik är svårt att förstå och lära sig. Lämna det bakom dig och börja på nytt. Det mesta är betydligt enklare än du tror. Den som vågar vinner!

Vi går nu igenom uppgifterna på diagnosen i tur och ordning och lyfter samtidigt fram hur man kan tänka på ett enkelt och konstruktivt sätt när man löser dem. I en del fall stannar vi kvar vid en speciell upptypstyp för att generalisera de idéer den bygger på. Varje uppgift eller grupp av uppgifter följs sedan upp med några övningar där du själv kan pröva nya idéer eller metoder.

Proportionalitet och skala

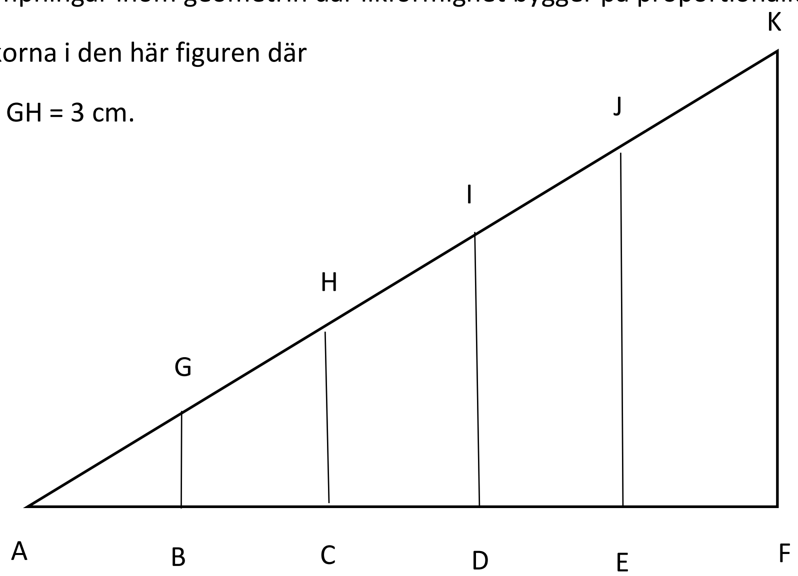
Proportionalitet är ett samband mellan två storheter x och y sådant att kvoten mellan storheterna är konstant.. Detta kan tecknas $\frac{x}{y} = k$. Konstanten k kallas för proportionalitetskonst. Det här kan också skrivas y = k · x.

Arbetet med proportionalitet kan kopplas till begreppen förlängning och förkortning. Som exempel är $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25}$ osv. där proportionalitetskonstanten är $\frac{3}{5}$ = 0,6.

Detta har tillämpningar inom geometrin där likformighet bygger på proportionalitet.

Studera sträckorna i den här figuren där

AB = 5 cm och GH = 3 cm.



Du finner då att $\frac{GB}{AB} = \frac{3}{5} = \frac{HC}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{ID}{AD} = \frac{9}{15} = \frac{JE}{AE} = \frac{12}{20} = \frac{KF}{AF} = \frac{15}{25}$

Proportionalitetskonstanten är $\frac{3}{5}$ = 0,6.

Eftersom AC = 2 · AB så är HC = 2 · GB och eftersom AD = 3 · AB så är ID = 3 · GB osv. Man kan säga att

- triangel ACH är en avbildning av triangel ABG i skala 2:1
- och att triangel ADI är en avbildning av triangel ABG i ska 3:1.

Uppgift 1 40 mm

Att skalan är 5:1 innebär att alla sträckor på bilden är 5 gånger så stora motsvande sträckor som i verkligheten. Insekten är alltså 5 · 8 mm = 40 mm lång.

Övning 1.1

På ett foto är en fågel avbildad i skala 1:5. På bilden är fågelns vingbredd 6 cm.

a) *Hur stor är vingbredden i verkligheten.*

b) *En karta har skalan 1: 5 000. På kartan är det 5 cm mellan två hus.*
Hur långt är avståndet i verkligheten.

c) *Vid en orienteringstävling är avståndet mellan två kontroller 1 200 m.*
Skalan på kartan är 1:20 000. Hur lång är sträckan på kartan?

Uppgift 2 84 kr

De här uppgifterna kan man lösa med hjälp av proportionalitet. Det finns två olika metoder för detta. Man kan använda sig av att priset är proportionellt mot vikten. Om x kr är priset på 7 kg potatis, så är detta proportionellt mot priset 30 kr för 2,5 kg potatis. Detta ger sambandet $\frac{x}{30} = \frac{7}{2,5}$

Genom att lösa ekvationen får man x = $\frac{30 \cdot 7}{2,5}$ = 84 och priset 84 kr.

Man kan också använda sig av en proportionalitetskonst, nämligen kilopriset på potatis som är 30 /2 ,5 kr/kg = 12 kr/kg. Priset för 7 kg potatis är då 12 · 7 kr = 84 kr.

Övning 2.1

En flaggstång som är 8 m hög kastar en skugga som är 20 m.
Hur lång är samtidigt skuggan från en 2 m hög fågelskrämma?

Övning 2.2

För att blanda saft behöver man 1 del koncentrerad saft med 5 delar vatten.
Hur mycket saft kan man blanda till om man har 7dl koncentrerad saft?

Övning 2.3

För 5 engelska pund får man 6 euro. Hur många pund får man för 15 euro

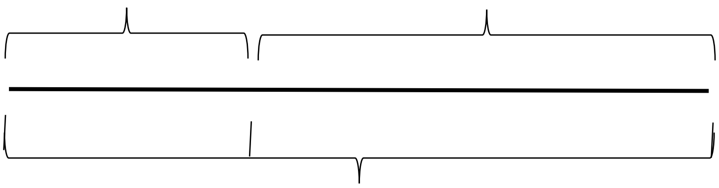
Förhållande

Förhållande utrycker proportionalitet mellan två eller flera storheter. Om sidorna i en triangel är 6 cm, 9 cm och 12 cm eller om de är 10 cm, 15 cm och 20 cm så sägs förhållandet mellan sidorna vara 2:3:4. Vi tar ett exempel.

> En triangel har omkrets 36 cm och förhållandet mellan sidorna ät 2:3:4.
> Bestäm sidornas storlek.

Om vi antar att sidornas storlek är 2a cm, 3a cm och 4a cm så får vi ekvationen 2a + 3a + 4a = 36 vilket ger a = 4. Sidorna är alltså 8 cm, 12 cm och 16 cm.

Ibland bör man tänka efter lite extra när man arbetar med förhållande. Om man delar en sträcka i förhållandet 2:5 så är den kortare sträckan inte $\frac{2}{5}$ av hela sträckan utan $\frac{2}{7}$ av sträckan.



Många av de problem man möter i skolan löser man enklast med hjälp av proportionalitet. Ofta leder detta till ekvationer som $\frac{4}{5} = \frac{6}{x}$. Det är därför angeläget att man i skolan lär sig hantera den typen av ekvationer. Vi kan börja med att konstatera att den givna ekvationen är ekvivalent med $\frac{5}{4} = \frac{x}{6}$, vilket många uppfattar som enklare. Man löser sedan ekvationen genom att multiplicera båda leden med 24. Detta ger $\frac{5}{4} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 30 = 4x \Leftrightarrow x = 7{,}5$. Vi återkommer till detta senare..

Uppgift 3 $\frac{2}{7}$ av 735 kr respektive $\frac{5}{7}$ av 735 kr

Den ena ska ha 2 andelar av vinsten och den andra ska ha 5 andelar av vinsten. Det innebär att det finns 7 andelar att dela på. Av dessa andelar ska den ena ha 2 andelar, dvs. $\frac{2}{7}$ av 735 kr och den andra ha 5 andelar dvs. $\frac{5}{7}$ av 735 kr. I kronor räknat blir detta 210 kr respektive 525 kr.

Övning 3.1

Ett band ska delas i förhållandet 2:3. Bandet är 6 m långt. Hur stora blir de två delarna?

Övning 3.2

Ole och Dole ska dela på 300 kr i förhållandet 1:2 . Hur mycket får de var?

Övning 3.3

Längden av sidorna i en triangel förhåller sig som 3:4:5. Triangelns omkrets är 30 cm.
Ange sidornas storlek.

Uppgift 4 630 kr

Man kan lösa uppgiften på olika sätt.

- Man kan konstatera att $\frac{1}{3}$ av vinsten är 210 kr. Hela vinsten är då 3gånger så stor, alltså 630 kr.
- Om vinsten är x kr så vet man att $\frac{2}{3}$ av x = 420 kr, vilket ger x = 630.

Övning 4.1

Brons är en legering av koppar och tenn. För att gjuta en staty i brons använder man en legering som till $\frac{4}{5}$ *består av koppar. Vid gjutningen använde man 6 kg koppar. Hur mycket väger statyn?*

Övning 4.2

Vilket är mest, $\frac{5}{7}$ *av 600 kr eller* $\frac{3}{4}$ *av 550 kr?*

Övning 4.3

Till vinägrettsås behöver man, förutom kryddor, 1 msk vinäger, 3 msk olja och 1msk vatten.

1 msk är 15 ml. Hur mycket vinägrettsås kan man tillverka om man har 3 msk vinäger och gott om olja och vatten?

Andelar i procentform

Eftersom procentformen enbart är ett alternativt sätt att skriva en andel så betyder andelen x% helt enkelt andelen $\frac{x}{100}$. Enkla uppgifter som *bestäm 4% av 500 kr* kan enkelt beräknas genom multiplikationen 0,04 · 500kr, men innebörden av 4% av 500 är i själva verket $\frac{4}{100}$ av 500 kr, alltså $4 \cdot \frac{500}{100}$ = 4 · 5 kr. Observera att metoden 0,04 · 500 kr inte fungerar generellt utan bara när man löser enkla, tillrättalagda uppgifter.

Vi tar ett exempel: A som får 15% rabatt i en butik kan köpa en klänning för 1 700 kr. Hur mycket får hennes väninna B, som inte har rabatt i butiken betala för samma klänning

I det här fallet kan man inte multiplicera med 0,15. Här bör man istället arbeta med proportionalitet. B får betala 100% av priset medan A får betala 85% av priset. Vidare är priset proportionellt med den procentsats man får betala. De betyder att

- 85% av priset svarar mot 1 700kr
- 100% av priset svarar mot x kr.

Detta ger ekvationen $\frac{85}{100} = \frac{1700}{x}$

Multiplikation med 100x i båda leden ger 85 x = 170 000 och x = 2 000.

Observera att ekvationen också kan skrivas $\frac{x}{1700} = \frac{100}{85}$

Uppgift 5 32%

(32% av pojkarna) + (32% av flickorna) = 32% av (pojkarna + flickorna). Det spelar alltså ingen roll hur många pojkar eller flickor det gäller. Det blir alltid samma svar, 32%. Du kan inse detta på följande sätt. Om du har 1 dl 32-procentig saft och blandar den med 3 dl 32-procentig saft så får du 4 dl 32-procentig saft.

Övning 5.1

På en skola är 68% av flickorna blåögda och 68% av pojkarna blåögda.
Hur många procent av eleverna på skolan är blåögda?

Övning 5.2

Lina läste 40% av kursboken under den första veckan och 30% av kursboken under den andra veckan.
Hur stor del av kursboken hade Lina läst efter två veckor?

Övning 5.3

4 dl av 15-procentig saft blandas med 2 dl 30-procentig saft.
Hur många procent koncentrerad saft finns det i den nya blandningen.

Uppgift 6 432 kr

Efter en vecka kostade byxorna 120% av 450 kr = 540 kr. Veckan därpå kostade byxorna 80% av 540 kr = 432 kr. Observera att 20% inte är ett tal utan en andel. Att ta 20% av ett belopp ger olika resultat beroende på beloppets storlek.

Övning 6.1

En kursbok kostade 280 kr förra terminen. Nu kostar kursboken 294 kr.
Med hur många procent har priset höjts?

Övning 6.2

Ett bussbolag höjde priset på månadskort med 25%.
Med hur många procent måste de sänka det nya priset för att återfå det gamla priset?

Övning 6.3

Ett isberg smälter med 10% av sin massa under en vecka.
Hur stor del av isberget är kvar efter 2 veckor?

Enkla ekvationer

En ekvation är en matematisk utsaga som innehåller en likhet. En ekvation innehåller en eller flera obekanta som ofta betecknas med x, y eller z.

Det finns ekvationer av olika typer. En ekvation son $5x - 3 = 3x + 1$ kallas för linjär, en ekvation som $\frac{3}{x} = \frac{2}{5}$ kallas för rationell och $(x - 2)(x- 3) = 0$, som kan skrivas som $x^2 - 5x + 6 = 0$ kallas för andragradsekvation. Att lösa en ekvation innebär att finna det eller de värden som gör ekvationen till en sann utsaga.

Man kan lösa en ekvation algebraiskt eller grafiskt. (Vi återkommer till grafisk lösning senare.) När man löser en ekvation algebraiskt använder man sig av två annulleringslagar, annulleringslagen för addition och annulleringslagen för multiplikation. Innebörden i annulleringslagarna är

- att man får addera (eller subtrahera) samma tal till båda leden av en ekvation utan att ekvationens lösning förändras, och
- att man får multiplicera (eller dividera) båda leden av en ekvation med samma tal (utom 0) utan att ekvationens lösning förändras.

Ekvationen $7x - 3 = 3x + 1$ kan lösas så här med hjälp av annulleringslagarna:

Först använder man annulleringslagen för addition två gånger: Subtrahera med 3x på båda sidor om likhetstecknet vilket ger $5x - 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1$. Addera därefter med 3 på båda sidor om likhetstecknet, vilket ger $2x - 3 = 1 \Leftrightarrow 2x = 4$.

Därefter använder man annulleringslagen för multiplikation: Dividera med 2 på båda sidor om likhetstecknet, viket ger $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Eftersom användningen av annulleringslagarna inte förändrar lösningsmängden är $x = 2$ lösning till den givna ekvationen. Tecknet $\Leftrightarrow$ kallas för ekvivalenstecken och utläses ”är ekvivalent med”.

Enkla ekvationer av första graden kan ha ett reellt tal som lösning, ingen lösning eller oändligt många rationella tal som lösningar. Vi ger tre exempel:

- Ekvationen $2x + 3 = 2x + 5 \Leftrightarrow 0 = 2$. Eftersom $0 = 2$ är en falsk utsaga är även $2x + 3 = 2x + 5$ en falsk utsaga för alla x. Ekvationen saknar alltså lösning.

- Ekvationen $2x + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow 3 = 3$. Eftersom $3 = 3$ är en sann utsaga är även $2x + 3 = 2x + 3$ en sann utsaga för alla värden på x. Ekvationen är alltså lösbar för alla reella tal x.
- En ekvation som $\frac{3}{x} = \frac{2}{5}$ löser man genom att multiplicera båda leden med $x \cdot 5$. Detta ger $\frac{3}{x} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{15x}{x} = \frac{10x}{5} \Leftrightarrow 15 = 2x$ och svaret $x = 7{,}5$.

Uppgift 7 $x = 1$ och $x = (-2)$

När man har löst en ekvation är det viktigt att prövar om lösningarna satisfierar ekvationen, alltså om lösningarna verkligen gör ekvationen till en sann utsaga. Det är detta som är syftet med den här uppgiften.

- Insättning av $x = 1$ i ekvationen ger $\frac{2}{1} + 3 = 1 + 4 \Leftrightarrow 5 = 5$ som är en sann utsaga. $x = 1$ är alltså en lösning till ekvationen.
- Insättning av $x = (-2)$ i ekvationen ger $\frac{2}{-2} + 3 = (-2) + 4 \Leftrightarrow 2 = 2$ som också är en sann utsaga. $x = (-2)$ är alltså en lösning till ekvationen.
- Insättning av övriga tal ger falska utsagor. $x = 3$ ger t.ex. $\frac{2}{3} + 3 = 3 + 4 \Leftrightarrow 3\frac{2}{3} = 7$ som är en falsk utsaga. $x = 3$ är alltså inte en lösning till ekvationen.

Övning 7.1

Vilka av följande tal är lösningar till ekvationen $(x - 1)^2 - 4 = 0$?

(-3) (-1) 2 3 5

Övning 7.2

Vilka av följande tal är lösningar till ekvationen $\frac{3}{x} = \frac{9}{3x}$ *?*

(-5) (-2) 0 1 3

Övning 7.3

Vilka av följande tal är lösningar till ekvationen $\frac{1}{x-1} = 2$?

(-1) (-0,5) 0 0,5 1 1,5

Uppgift 8 $x = 0$ och $x = 3$

Observera att $x \cdot y = 0$ om $x = 0$ eller $y = 0$. Det betyder att $x \cdot (x - 3) = 0$ då $x = 0$ eller $(x - 3) = 0$. Om man tänker på det sättet blir många ekvationer enkla att lösa i huvudet.

På motsvarande sätt kan man direkt se att ekvationen $(x - 2)^2 + (x - 2) = 0$ har lösningen $x = 2$ eftersom detta ger $0 + 0= 0$,vilket är en sann utsaga.

Man kan också se att ekvationen $x^2 - 2x + 1 = 0$ har lösningen $x = 1$ eftersom $1 - 2 + 1 = 0$ detta är en san utsaga...

Övning 8.1

Lös ekvationen $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

Övning 8.2

Lös ekvationen $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$

Övning 8.3

Resonera dig fram till de två lösningarna till ekvationen $(x - 1)^2 - (x - 1) = 0$

Uppgift 9 a $x = 3$

För att lösa ekvationen använder man sig av annulleringslagarna

$2x - 6 = 2 \cdot (3 - x)$	Multiplicera in 2 i parentesen
$\Leftrightarrow$	
$2x - 6 = 6 - 2x$	Addera 2x till båda leden (annulleringslagen för addition)
$\Leftrightarrow$	
$4x - 6 = 6$	Addera 6 till båda leden (annulleringslagen för addition)
$\Leftrightarrow$	
$4x = 12$	Dividera med 4 i båda leden (annulleringslagen för multiplikation).
$\Leftrightarrow$	
$x = 3$	Insättning av $x = 3$ i ekvationen ger $6 - 6 = 2(3 - 3) \Leftrightarrow 0 = 0$ som är en sann utsaga.

Uppgift 9 b Lösning saknas

För att lösa ekvationen använder man sig av annulleringslagarna

2x – 6 = 2(x – 5) Multiplicera in 2 i parentesen

⇔

2x – 6 = 2x – 10 Subtrahera med 2x i båda leden (annulleringslagen för addition)

⇔

(- 6) = (-10) Detta är en falsk utsaga.

Ekvationen 2x – 6 = 2(x – 5) saknar därför lösning.

Uppgift 9 c Alla reella tal x

För att lösa ekvationen använder man sig av annulleringslagarna

2x – 6 = 2(x – 3) Multiplicera in 2 i parentesen

⇔

2x – 6 = 2x– 6 Subtrahera med 2x i båda leden (annulleringslagen för addition)

⇔

(-6) = (-6) Detta är alltid en sann utsaga oberoende av värdet på x..

Ekvationen är sann för alla reella tal x. (Sätt gärna in några tal och pröva.)

Övning 9.1

Lös ekvationen 3x – 6 = 3(x – 1)

Övning 9.2

Lös ekvationen $\frac{x}{3}$ – 1 = x – 3

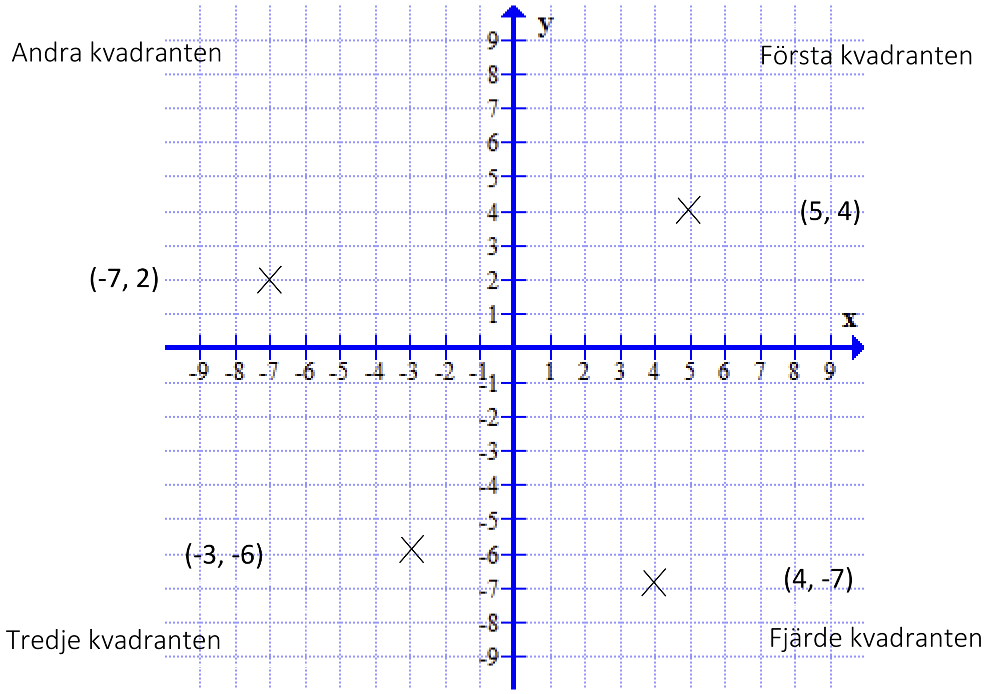
Övning 9.3

Lös ekvationen 4x + 5 = 2x + 2(x + 3)

Koordinatsystem och grafen till en rät linje

De två koordinataxlarna (x-axeln och y-axeln) delar koordinatsystemet i fyra kvadranter (se figuren).
En punkt i koordinatsystemet skrivs som (x, y).

- Om en punkt ligger i första kvadranten så är både x-koordinaten och y-koordinaten positiva. I figuren ses punkten (5, 4).
- Om en punkt ligger i andra kvadranten så är x-koordinaten negativ och y-koordinaten positiv. I figuren ses punkten (-7, 2).
- Om en punkt ligger i tredje kvadranten så är både x-koordinaten och y-koordinaten negativa. I figuren ses punkten (-3, -6).
- Om en punkt ligger i fjärde kvadranten så är x-koordinaten positiv och y-koordinaten negativ I figuren ses punkten (4, -7).

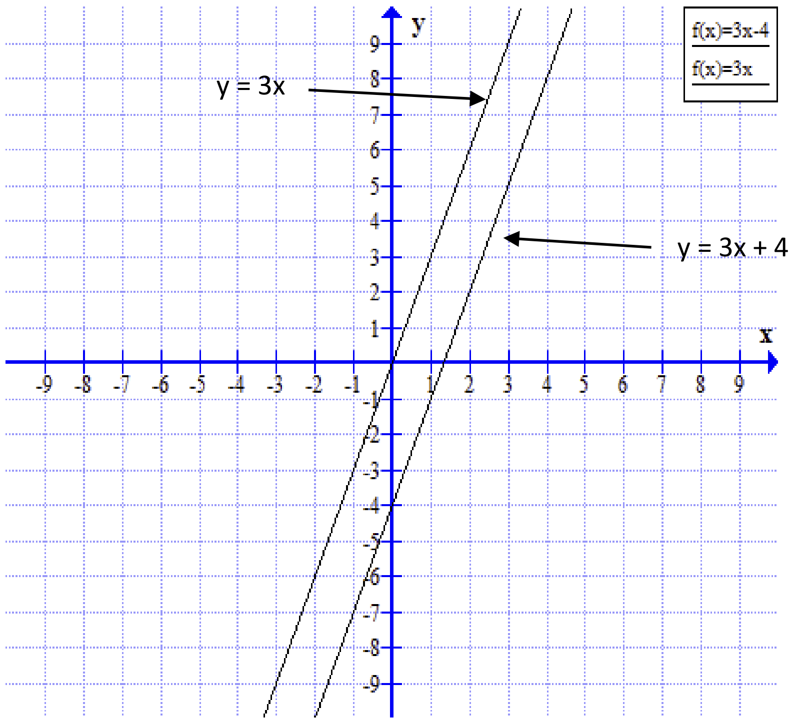


En ekvation av typen y = 3x kallas för en proportionalitet. En proportionalitet är en rät linje som går genom Origo, alltså punkten (0, 0). (Se nästa figur.) Koefficienten framför x, alltså 3, talar om att linjens riktningskoefficient (lutning) är 3. Det betyder att för varje punkt på linjen är y-koordinaten 3 gånger så stor som x-koordinaten.

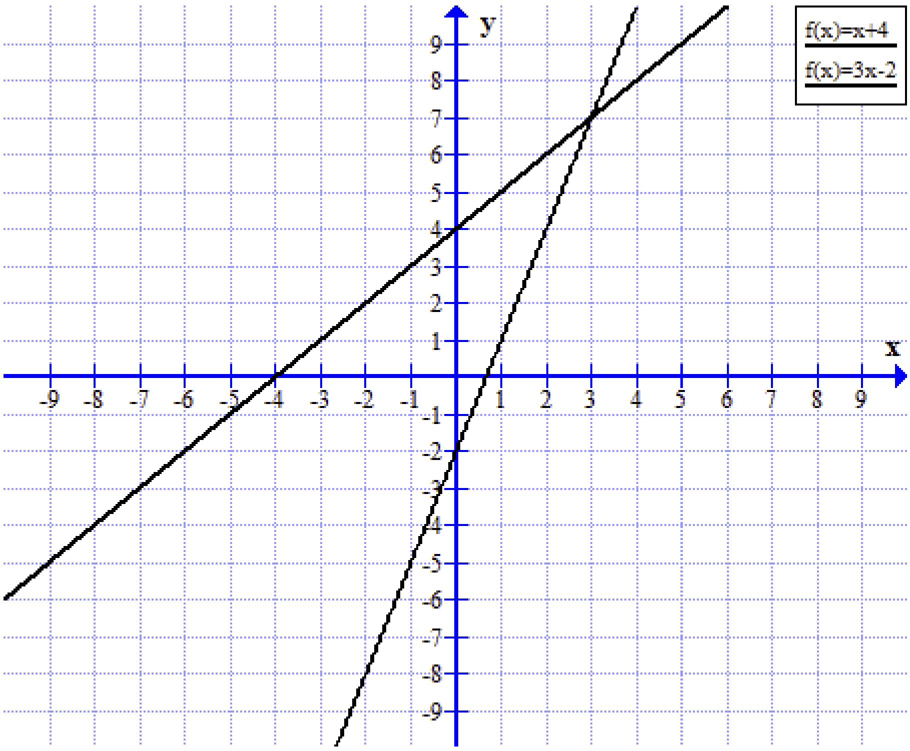
Om man subtraherar alla y-koordinater i ekvationen y = 3x med 4 förflyttas grafen 4 enheter nedåt i koordinatsystemet. Vi får då ekvationen y = 3x – 4.

Grafen till ekvationen y = 3x – 4 är en rät linje som går genom punkten (0, -4) på y-axeln och har riktningskoefficienten 3. (Se figuren.)

Det här innebär att grafen till en ekvation som y = ax + b går genom punkten (0, b) på y-axeln och har riktningskoefficienten (lutningen) a.

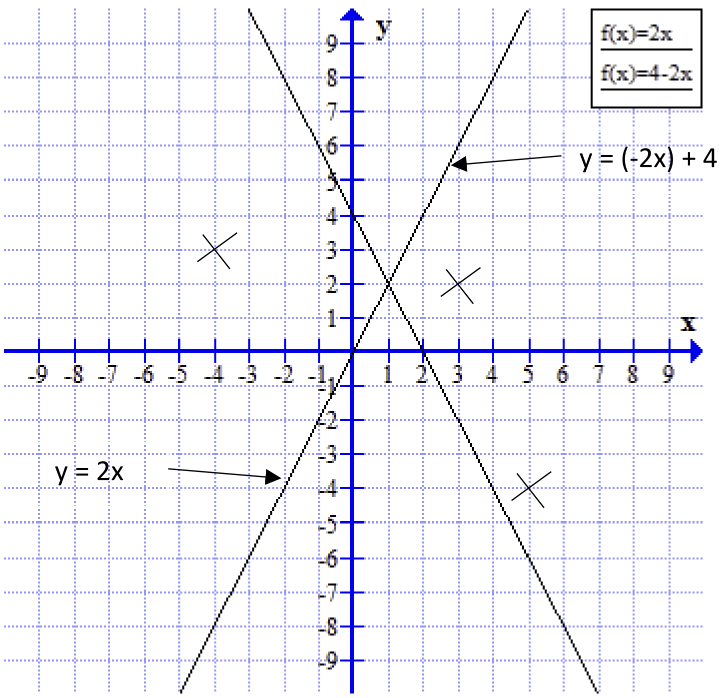


Mot denna bakgrund kan man lösa ekvationer grafiskt. Vi tar som exempel ekvationen x + 4 = 3x – 2 . Man löser ekvationen genom att rita graferna till y = x + 4 och y = 3x – 2 (figur på nästa sida).



Av grafen framgår att x = 3 ger y = 7 för båda graferna. Genom att sätta in x = 3 i ekvationen blir båda leden 7 vilket ger en sann utsaga.

Uppgift 10 a Se figuren nedan.



Uppgift 10 b Se figuren ovan. Grafen är en proportionalitet (en rät linje genom Origo).

Grafen till y= 2x är en rät linje med lutningen 2 och som går genom Origo (punkten (0, 0)).

Man kan rita grafen genom att utgå från två punkter.

- x = 0 ger y = 0 alltså punken (0, 0).

- x = 2 ger y = 4 alltså punkten (2,4).

Rita en rät linje genom de två punkterna.

Uppgift 10 c Se figuren ovan. Grafen är linjär

Grafen till y = (-2)x är en rät linje med lutningen (-2) och som går genom Origo. Genom att addera 4, flyttas alla punkter i grafen y = (-2)x uppåt 4 enheter. Den nya grafen, y = (-2)x + 4 har därför samma lutning med går genom punkten (0, 4) på y-axeln..

Man kan rita grafen genom att utgå från två punkter.

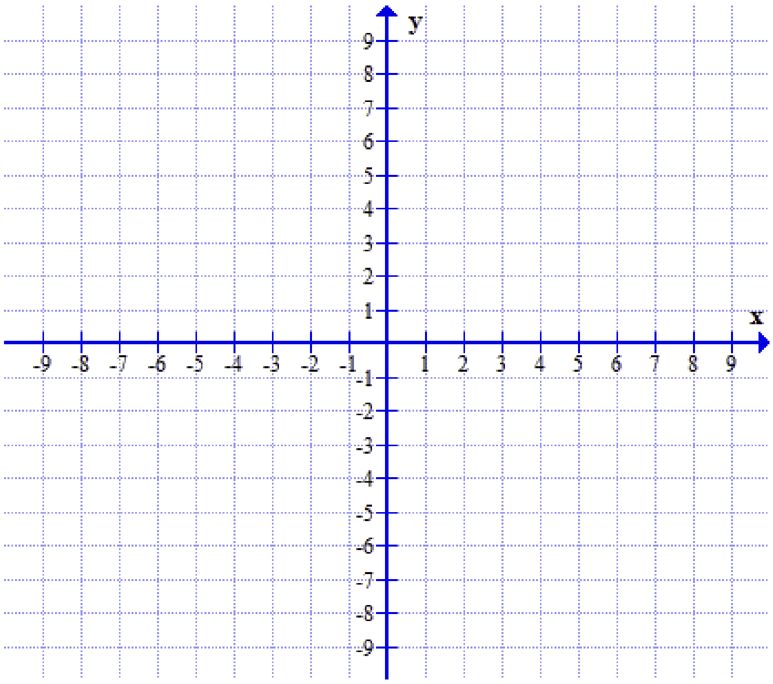
- x = 0 ger y = 4 alltså punken (0, 4).

- x = 2 ger y = 0 alltså punkten (2,0).

Rita en rät linje genom de två punkterna.

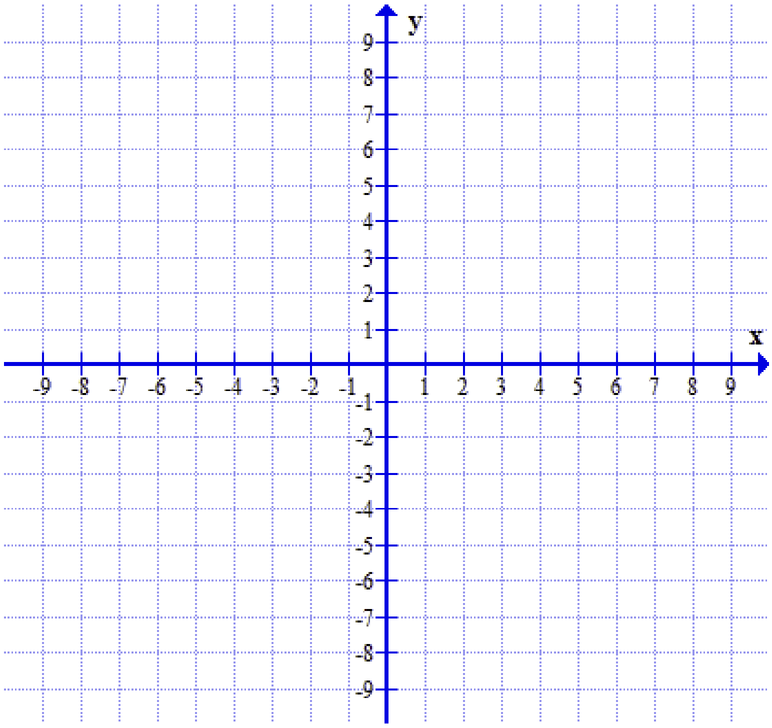
Övning 10.1

Rita ut punkterna (-5, 4), (4, -7) *och* (-5, -3) *i följande koordinatsystem*.



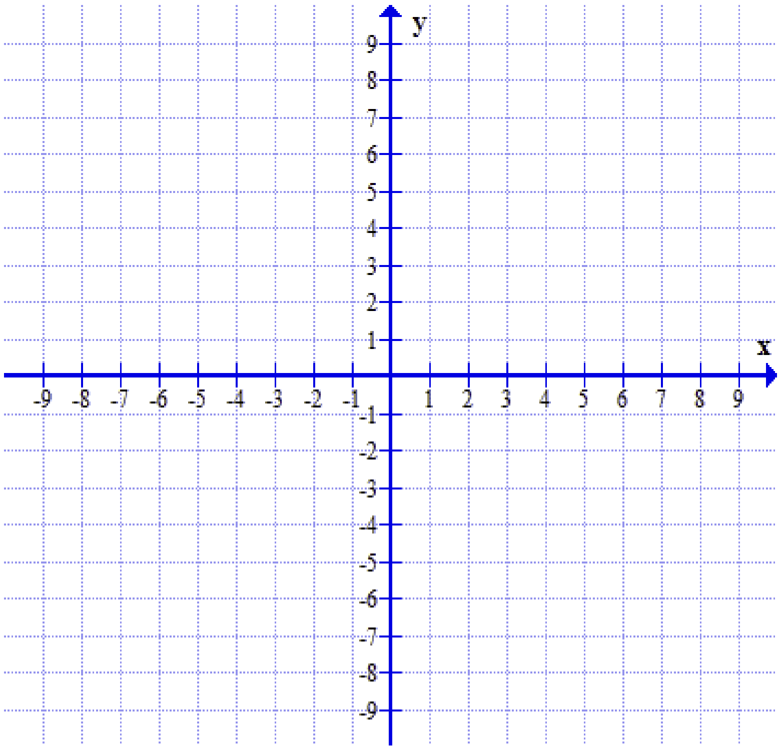
Övning 10.2

Rita grafen till $y = (-3)x$ *och* $y = \frac{1}{2}x$ *i följande koordinatsystem.*



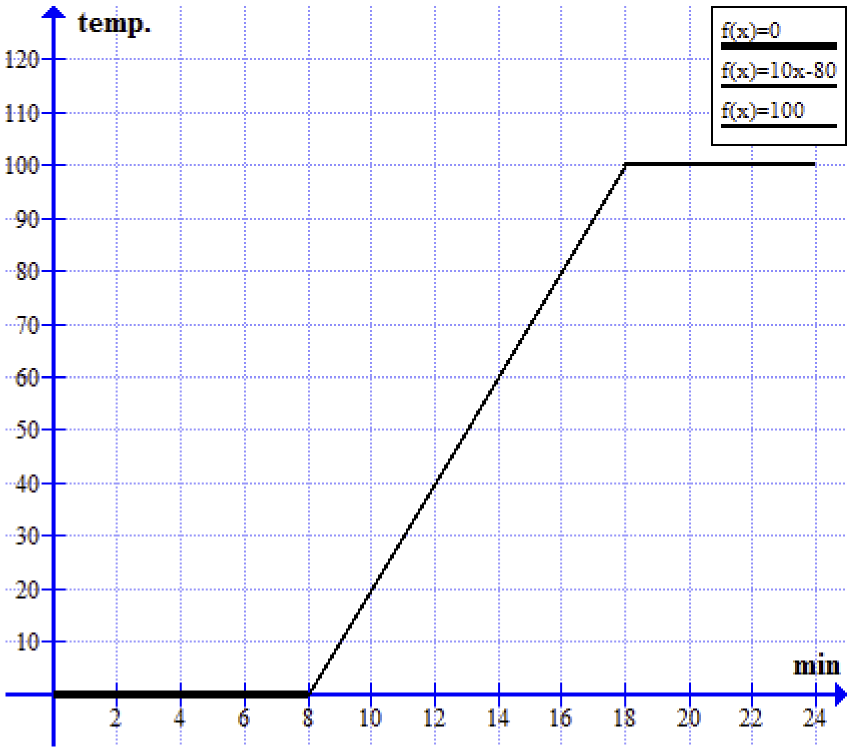
Övning 10.3

Rita grafen till $y = (-3)x + 2$ *och* $y = \frac{x}{2} - 4$ *i följande koordinatsystem.*



Fler grafer

Med hjälp av grafer kan man beskriva en rad händelser, inte minst i s.k. linjediagram. I följande diagram kan man se vad som händer när man värmer ett block med nollgradig is. Det tar först 8 minuter innan isen har smält till nollgradigt vatten. Det tar sedan 10 minuter innan vattnet nått temperaturen 100°. Därefter förångas vattnet successivt under konstant temperatur.



Uppgift 11 a 30 km/h

Vid lösning av hastighetsproblem brukar sträckan betecknas med s, tiden med t och hastigheten med v. Den matematiska modellen är proportionalitet och s = v · t där v är proportionalitetskonstanten. Detta kan även tecknas v = $\frac{s}{t}$

Efter 2 timmar har Elina kommit 60 km, vilket innebär att hennes hastighet har varit 30 km/h.

Uppgift 11 b Hon vilar i 30 minuter

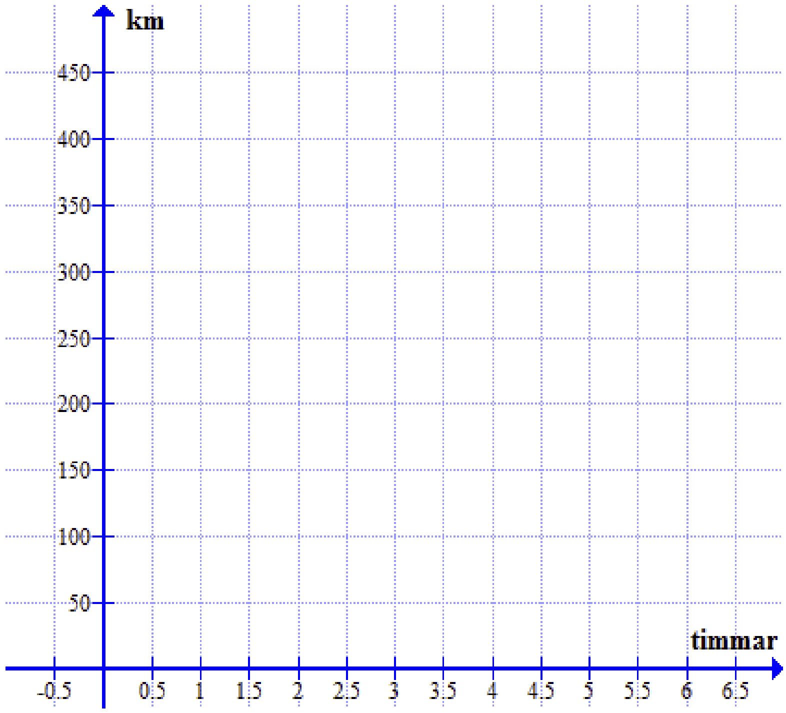
Efter 2 timmar är grafen vågrät. det innebär att Elina är kvar på samma plats under en halv timma.

Uppgift 11 c 105 km

Efter 2,5 timmar Fortsätter Elina med samma hastighet och efter sammanlagt 4 timmar tar grafen slut och Elina är då framme hos mormor. Hon har då cyklat 105 km.

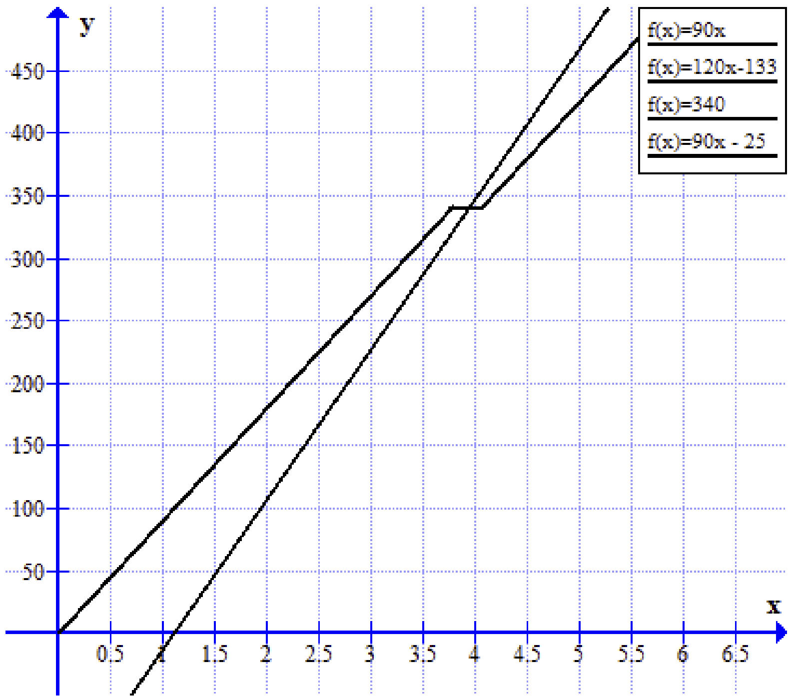
Övning 11.1

Två bilar kör med konstant hastighet på samma väg och från samma plats. Bil A håller hastigheten 80 km/h. Bil B som startar en timma senare håller hastigheten 100 km/h. Rita diagram som visar detta och bestäm med hjälp av diagrammen när bil B kommer ikapp bil A.



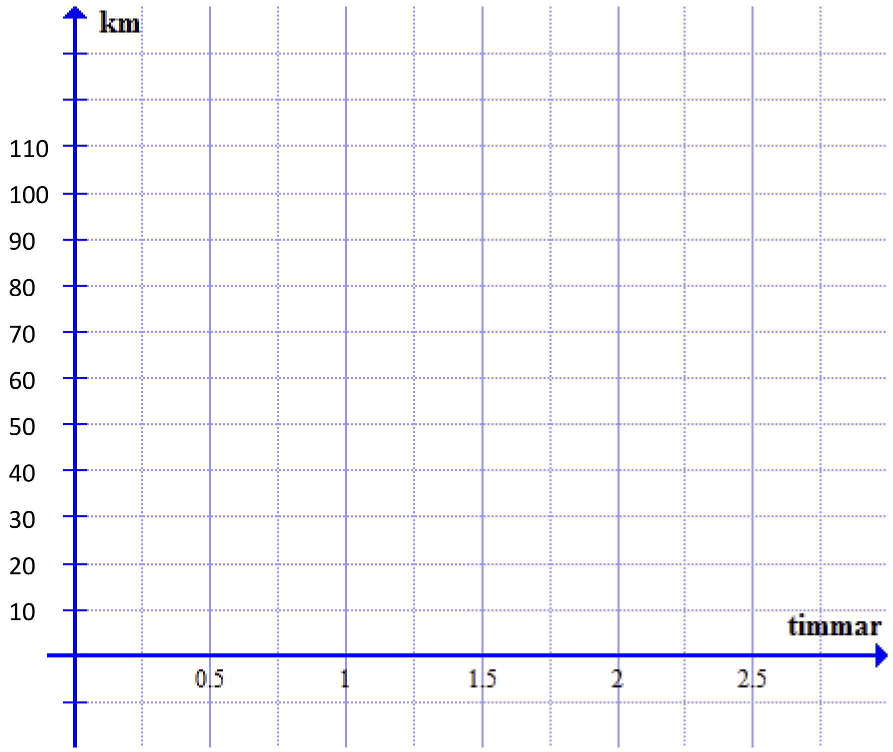
Övning 11.2

Två tåg färdas åt samma håll på en enkelspårig järnväg. Beskriv vad som händer enligt följande diagram.



Övning 11.3

Åsa bor i Åstad och Örjan bor i Östad. Mellan Åstad och Östad är det 100 km. Samtidigt som Ylva cyklar mot Östad med hastigheten 30 km/h cyklar Örjan mot Åstad med hastigheten 20 kn/h. Rita i följande figur de två grafer som svarar mot deras cykelfärd och ange när de båda möts.



Facit till övningarna

1.1 30 cm

Av skalan framgår att fotot är en förminskning. Vingbredden är alltså 5 gånger så stor i verkligheten, alltså $5 \cdot 6$ cm = 30 cm.

1.2 250 m

Avståndet är i verkligheten 5 000 gånger större än på kartan, alltså $5\,000 \cdot 5$cm = 25 000 cm vilket är 250 m.

1.3 6 cm

För att få avståndet på kartan kan man dividera 1 200 m med 20 000 vilket ger 0,06 m.

2.1 5 m

Fågelskrämmans höjd är $\frac{1}{4}$ av flaggstångens höjd. Dess skugga är därför $\frac{1}{4}$ av flaggstångens skugga, alltså 20 m / 4 = 5 m.

2.2 4,2 liter

Till 7 dl koncentrerad saft behöver man 35 dl vatten. Tillsammans blir det 42 dl.

2.3 12,5 pund

Problemet kan lösas på olika sätt. Om antalet pund man får för 15 euro är x så kan man använda sig av sambandet $\frac{x}{15} = \frac{5}{6}$. Om man i stället vill jämföra inom samma valuta får man sambandet $\frac{x}{5} = \frac{15}{6}$**.** Genom att lösa ekvationerna får man $x = \frac{15 \cdot 5}{6} = 12{,}5$.

Man kan också använda sig av en proportionalitetskonstant, nämligen hur många pund man får för 1 euro, alltså $\frac{5}{6}$ pund. För 15 euro får man då $15 \cdot \frac{5}{6}$ pund alltså 12,5 pund.

3.1 Delarna blir 2,4 m och 3,6 m

De två delarna ska vara $\frac{2}{5}$ respektive $\frac{3}{5}$ av bandet på 6 m.

3.2 100 kr respektive 200 kr

Ole ska ha $\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{3}$ av pengarna.

3.3 7,5 cm, 10 cm och 12,5 cm

Längden av sidorna kan tecknas 3a, 4a och 5a. Omkretsen är då 12a = 30 cm, vilket ger a = 2,5 cm och sidorna $3 \cdot 2{,}5$ cm, $4 \cdot 2{,}5$ cm och $5 \cdot 2{,}5$ cm.

4.1 7,5 kg

Man får svaret direkt genom proportionalitet $\frac{4}{5} = \frac{6}{x}$ vilket ger x = 7,5.

4.2 $\frac{5}{7}$ av 600 kr ≈ 420,6 kr är mest

$\frac{3}{4}$ av 550 kr = 412,5 kr

4.3 15 matskedar = 2,25 dl

$\frac{1}{5}$ av vinägrettsåsen består av vinäger. Såsen kommer alltså att volymen $5 \cdot 3$ msk = 15 msk. Detta kan skrivas 225 milliliter eller 2,25 dl.

5.1 68%

5.2 70%

5.3 20%

Andelen koncentrerad saft är 0,6 dl respektive 0,6 dl. Andelen saft i den nya blandningen som rymmer 6 dl är $\frac{1,2}{6}$ vilket svarar mot 20%.

6.1 Med 5%

$\frac{294}{280} = 1,05$ Det nya priset är alltså 105% av det gamla priset.

6.2 Med 20%

Ett månadskort som kostade 100 kr kostar nu 125 kr. Jämfört med det nya priset 125 kr, blir andelen $\frac{100}{125}$ = 0,8 eller i procentform 80%. Priset måste alltså sänkas med 20%.

6.3 81%

Efter en vecka är det 90% eller i bråkform $\frac{9}{10}$ kvar av isberget.

Efter två veckor finns det 90% av $\frac{9}{10}$ kvar, alltså $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10}$

7.1 (-1) och 3

Insättning av (-1) i ekvationen ger $(-2)^2 - 4 = 0$ vilket är en sann utsaga och insättning av 3 ger $2^2 - 4 = 0$ vilket också är en sann utsaga.

7.2 3

Insättning av talet 3 i ekvationen ger $\frac{3}{3} = \frac{9}{9}$ vilket är en sann utsaga.

7.3 1,5

Insättning av talet 1,5 i ekvationen ger $\frac{1}{1,5-1} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ vilket är en sann utsaga.

8.1 Lösningarna är x = 1, x = 2 och x = 3
Genom att sätta in en av dessa lösningar i ekvationen blir motsvarande faktor 0 och utsagan sann.

8.2 x = 3
Genom att sätta in x = 3 i ekvationen blir vänster led $\frac{1}{2}$ och utsagan sann.

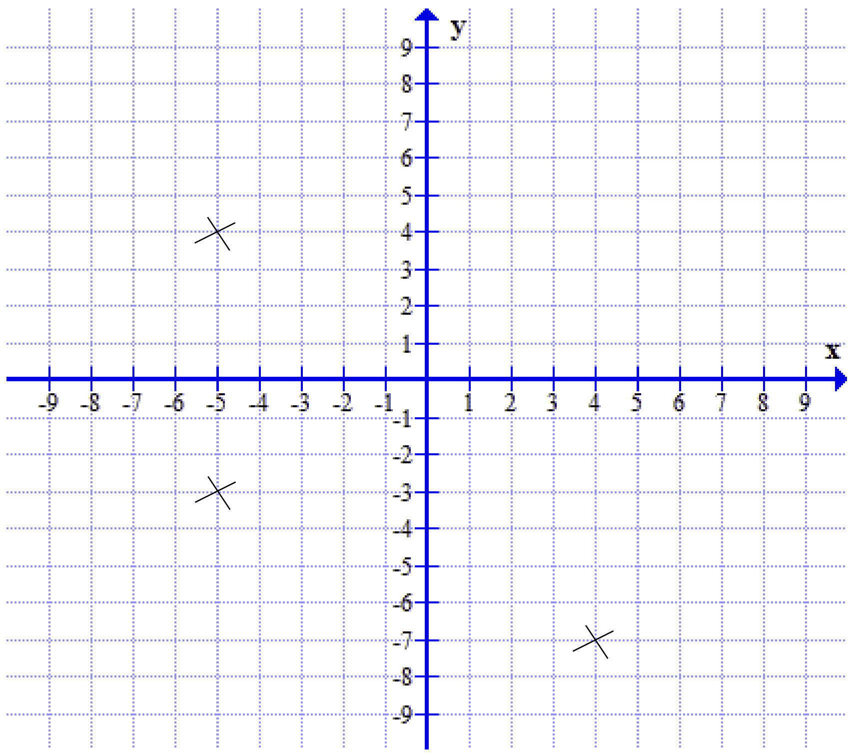
8.3 Lösningarna är x = 1 och x = 0
Genom att sätta in x = 1 blir uttrycken i båda parenteserna 0 och vänster led 0.
Genom att sätta in x = 0 blir båda parenteserna 1 och vänster led 0.

9.1 Ekvationen saknar lösningar
$3x - 6 = 3(x - 1) \Leftrightarrow 3x - 6 = 3x - 3 \Leftrightarrow (-6) = (-3)$ vilket är en falsk utsaga.

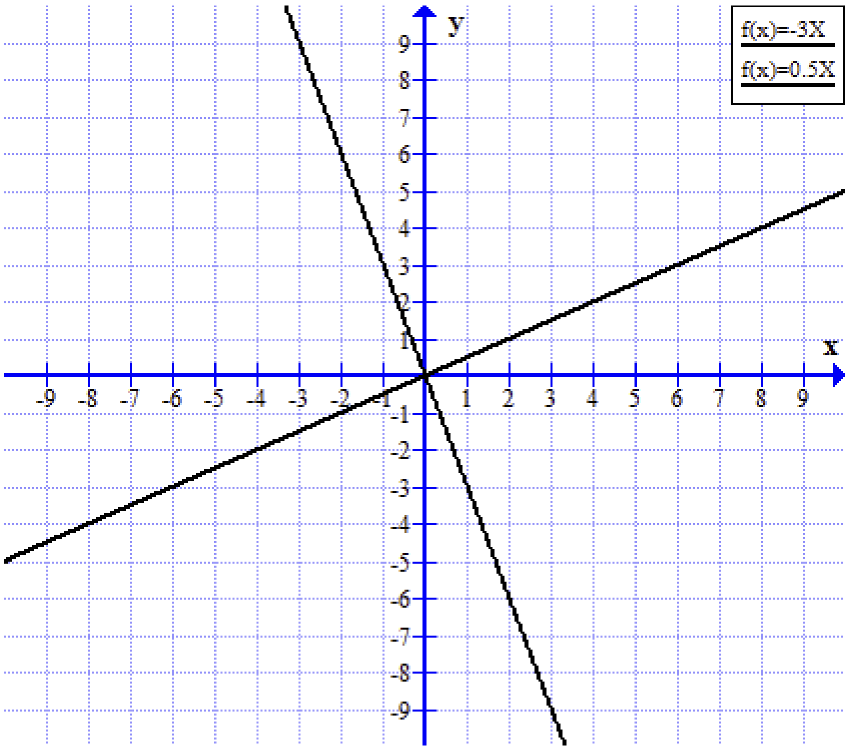
9.2 x = 3
Multiplikation med 3 på båda sidorna ger $\frac{x}{3} - 1 = x - 3 \Leftrightarrow x - 3 = 3x - 9 \Leftrightarrow 6 = 2x$

9.3 Ekvationen saknar lösningar
$4x + 5 = 2x + 2(x + 3) \Leftrightarrow 4x + 5 = 4x + 6 \Leftrightarrow 5 = 6$, vilket är en falsk utsaga.

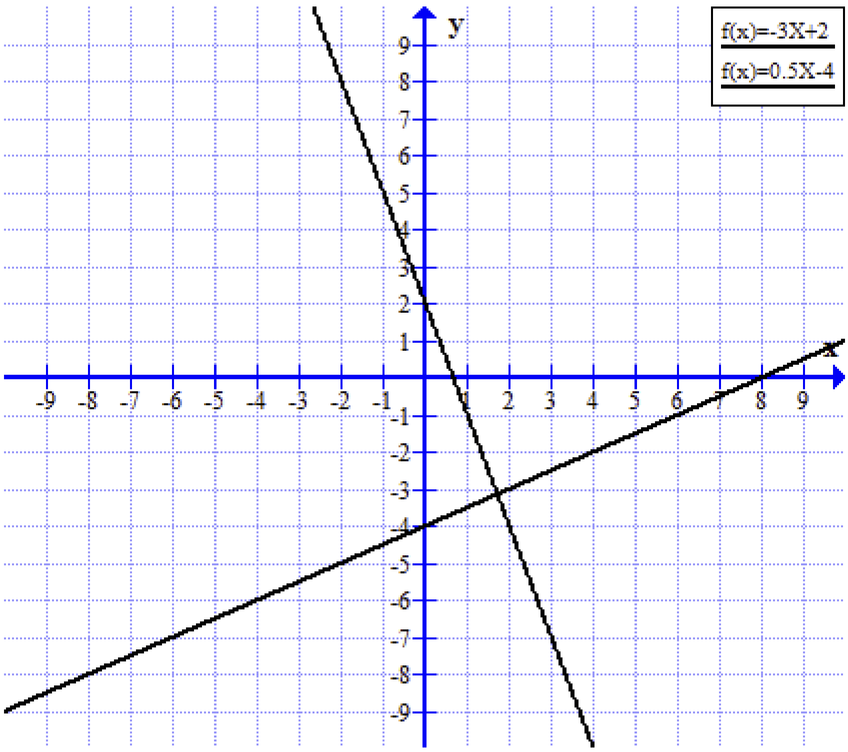
10.1



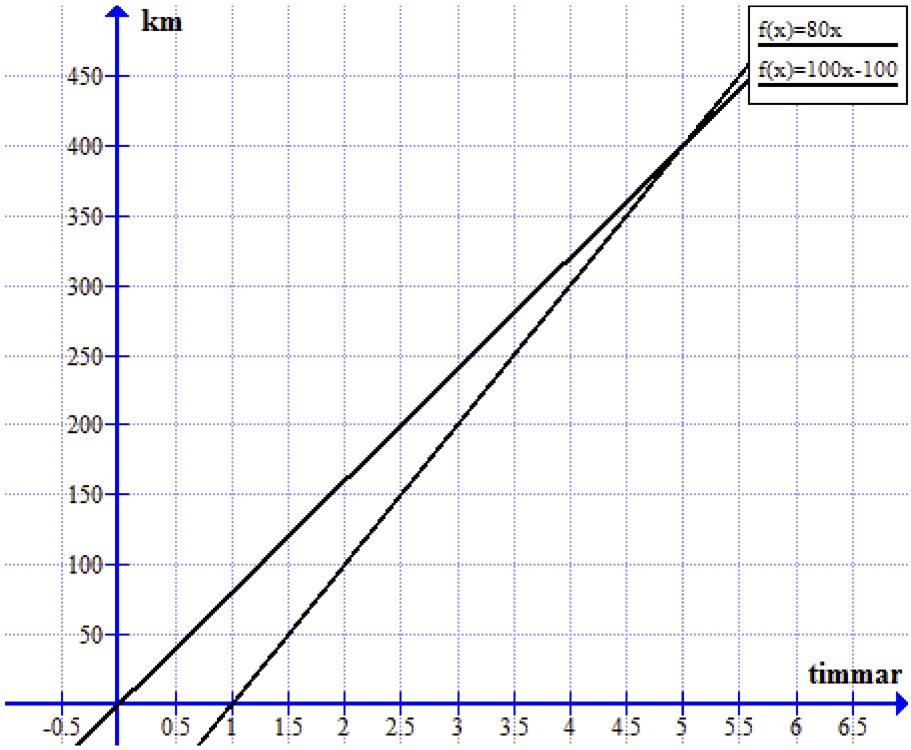
10.2



10.3

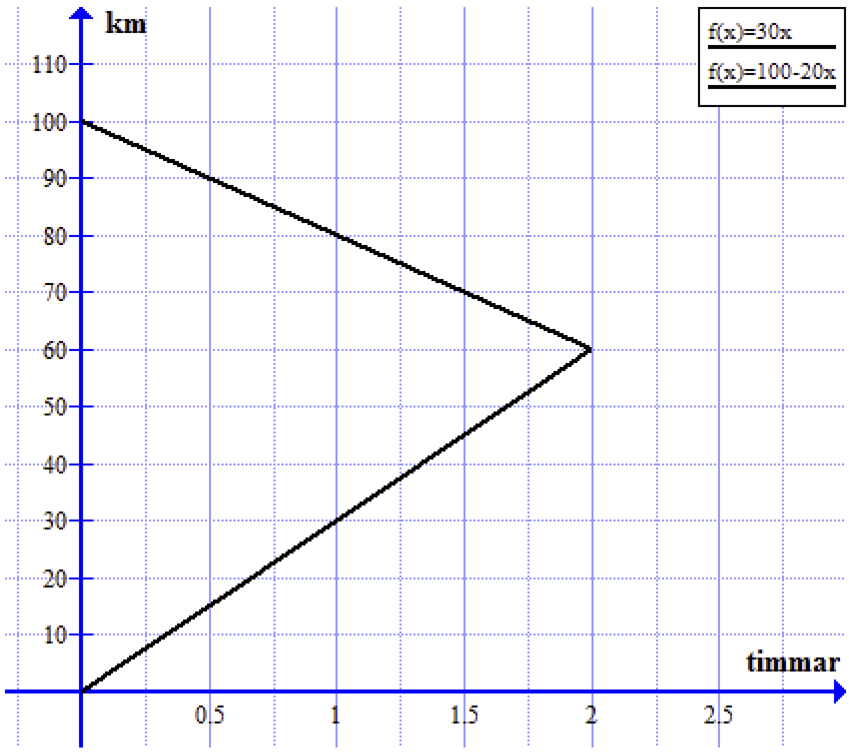


11.1 Bil A blir omkörd av bil B efter 5 timmar. De har då kört 400 km.



11.2 Efter 3 timmar och 45 minuter stannar det långsammare tåget en stund på ett stickspår för att släppa förbi det snabbare tåget.

11.3 De möts efter 2 timmar.

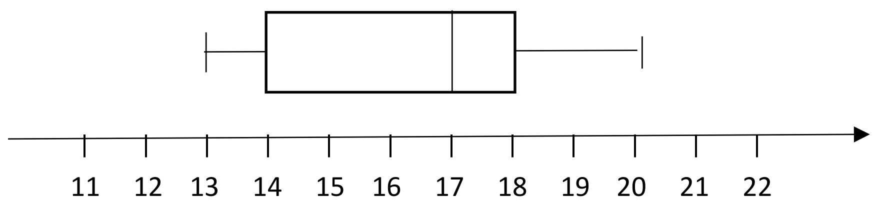


Diagnos 4: Statistik och sannolikhetslära

Innehåll

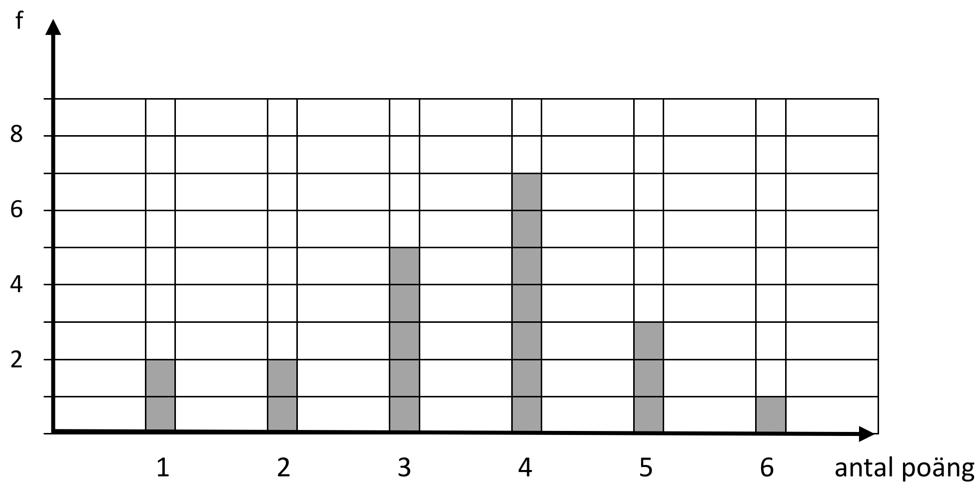
Diagnostiskt test vid kursstarten.
Statistik och sannolikhetslära
Lös följande uppgifter och förklara hur du resonerar när du löser dem.

1. Ett låddiagram ser ut så här:



a) Vilken är den minsta observationen?
b) Hur många procent av observationerna ligger mellan 14 och 17?
c) Ange medianen.

2. Följande diagram visar hur många deltagare som fick mellan 1 och 6 poäng på en tävling.



a) Hur många deltog i tävlingen?
b) Bestäm typvärdet.
c) Bestäm medianen.
d) Bestäm medelvärdet.

3. Alf och Ulf gjorde var sin del av en undersökning. Alf gjorde 20 observationer med medelvärdet 15 och Ulf gjorde 30 observationer med medelvärdet 13. Man slår nu samman dessa 50 observationer. Viket blir då medelvärdet?

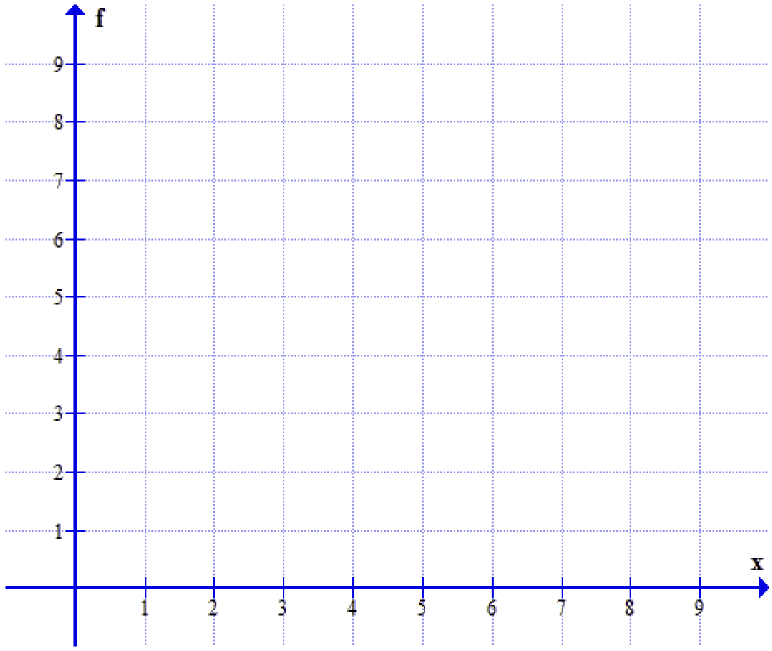
4 Betrakta följande observationer

6 4 7 5 8 5 6 4 5 6

6 5 5 7 5 4 6 5 5

a) Gör en frekvenstabell
b) Rita ett stolpdiagram

x	f



5. Fem personer ska skaka hand med varandra.
Hur många handskakningar blir det sammanlagt?

6 Hur många tresiffriga tal, med olika siffor kan man skriva om man bara får använda siffrorna 1, 2, 3, 4 och 5?

7. I en påse ligger det 2 röda och 3 blå kulor.

a) Du tar slumpvis en kula ur påsen. Bestäm sannolikheten för att den är blå?
b) Du tar slumpvis 2 blå kulor ur påsen. Bestäm sannolikheten för att båda kulorna är blå?

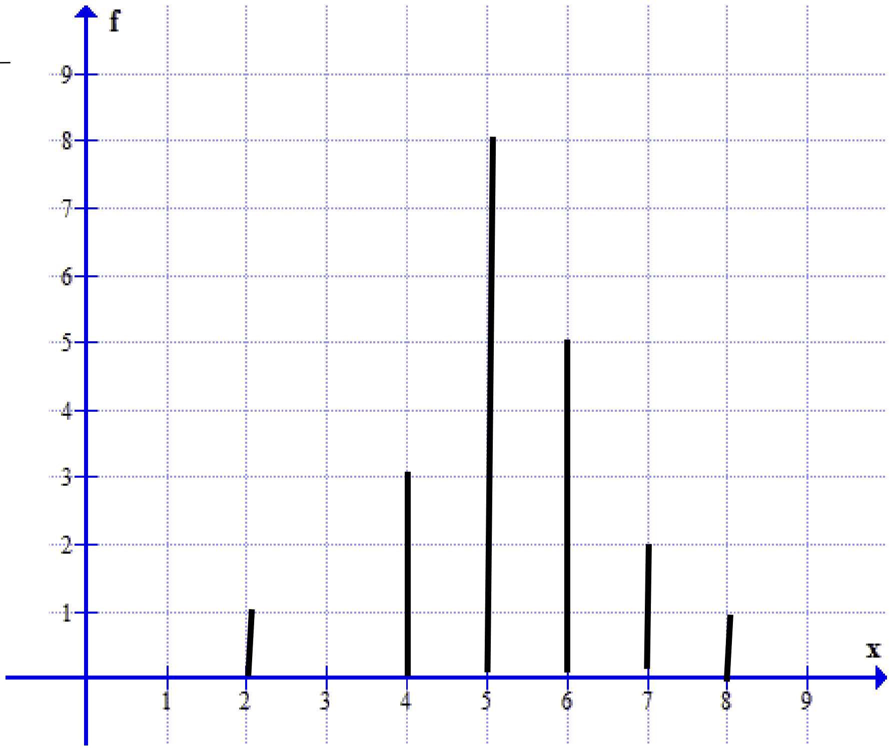
8 Du har två tetraedrar. På sidoytorna står det 1, 2, 3och 4. Du kastar två sådana tetraedrar. Den summa du då kan få upp varierar mellan 2 och 8.

a) Rita ett träddiagram som beskriver utfallsrummet.
b) Bestäm sannolikheten för att du får summan 6.
c) Bestäm sannolikheten för att du får en 3:a på minst en av tärningarna.

Facit till det diagnostiska testet

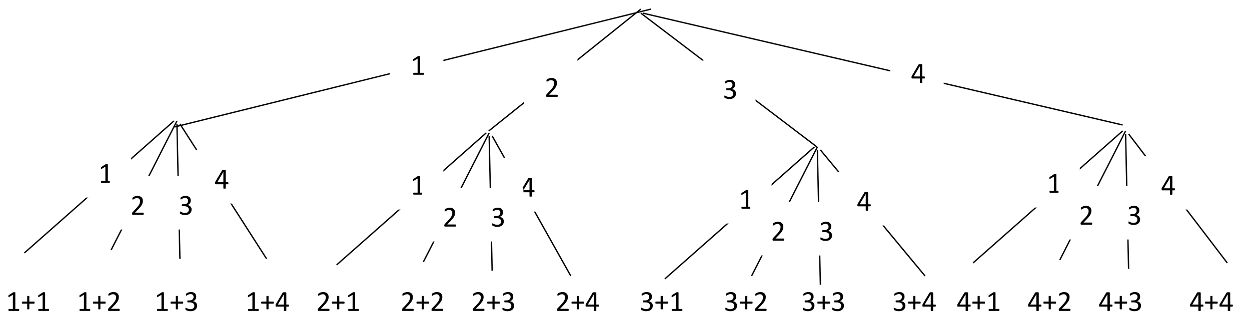
Uppgift 1 a	13
Uppgift 1 b	25%
Uppgift 1 c	17
Uppgift 2 a	20 st
Uppgift 2 b	4
Uppgift 2 c	4
Uppgift 2 d	3,5
Uppgift 3	13,8
Uppgift 4	

x	f
2	1
3	0
4	3
5	8
6	5
7	2
8	1

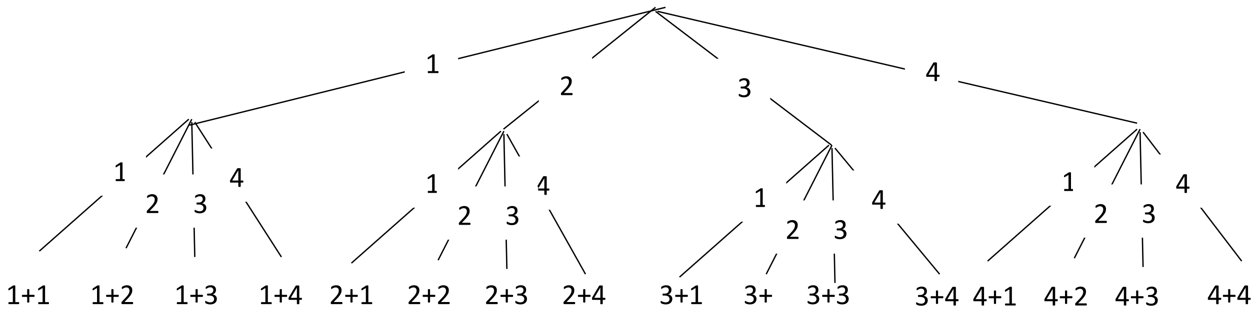


Uppgift 5	10 st.
Uppgift 6	120 st.
Uppgift 7 a	0,6
Uppgift 7 b	0,3

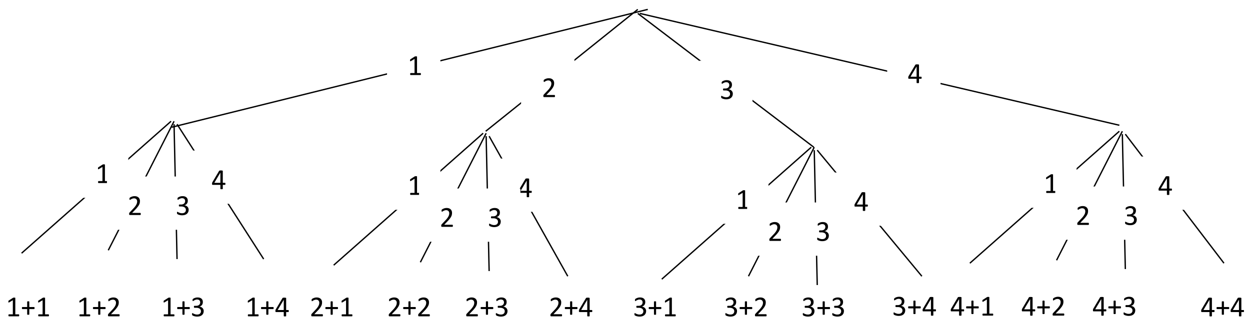
Uppgift 8 a



Uppgift 8 b $\frac{3}{16}$



Uppgift 8 c $\frac{7}{16}$



Kommentarer och övningar

Innan vi går igenom svar och lösningar uppgift för uppgift, vill vi påpeka några viktiga detaljer:

- En diagnos är bara ett stickprov. Det är inte möjligt att på en diagnos täcka alla typer av uppgifter. Det stickprov av uppgifter vi valt är av en typ som vi vet att många studenter har problem med och som vi anser vara av stor betydelse för dig i din utbildning.
- Det handlar inte bara om att ge rätt svar. Det handlar om att förstå svaret på ett sätt som gör det möjligt för dig att utveckla didaktiska kunskaper och att förklara alternativa lösningar för dina egna elever. Även om du anser dig ha presenterat den mest ideala lösningen bör du reflektera över alternativa lösningar. Ett mål är ju att du på sikt ska förstå alla dina elevers lösningar.
- Om du inte lärt dig lösa en viss typ av uppgift i skolan, beror detta sannolikt på att du har haft en negativ attityd till matematik och trott att matematik är svårt att förstå och lära sig. Lämna det bakom dig och börja på nytt. Det mesta är betydligt enklare än du tror. Den som vågar vinner!

Vi går nu igenom uppgifterna på diagnosen i tur och ordning och lyfter samtidigt fram hur man kan tänka på ett enkelt och konstruktivt sätt när man löser dem. I en del fall stannar vi kvar vid en speciell upptypstyp för att generalisera de idéer den bygger på. Varje uppgift eller grupp av uppgifter följs sedan upp med några övningar där du själv kan pröva nya idéer eller metoder.

Olika sätt att presentera data

När man samlat in data, till exempel från en undersökning så kan man presentera dem på olika sätt. Data kan vara av typen

6 4 7 5 8 5 6 4 5 6 2 6 5 5 7 5 4 6 5 5

För att få en överblick över data kan man börja med att ordna dem i en frekvenstabell, lodrät eller vågrät.

Observation x	2	3	4	5	6	7	8
Frekvens f	1	0	3	8	5	2	1

Genom att studera frekvenstabellen kan man relativt snabbt finna medelvärdet och medianen

- Typvärdet är den observation som har störst frekvens. I det här fallet 5
- Medianen är det mittersta av ett udda antal observationer (eller medelvärdet av de två mittersta observationerna av ett jämnt antal observationer) som först ordnats i storleksordning. I det här fallet är medianen 5.

Typvärde och median kallas för centralmått. Ett annat centralmått är medelvärdet

- Medelvärdet (det aritmetiska medelvärdet) är summan av alla observationer dividerat med antalet observationer. I det här fallet $\frac{106}{20}$ = 5,3.

Man kan även presentera ett statistiskt material med hjälp av diagram. Det finns ett antal olika typer av diagram och valet av diagram beror, dels på de data som insamlats, dels på vad man vill presentera. När man talar om att ljuga med statistik, så handlar det inte om att statistiken i sig är bedräglig utan om att man har valt olämpliga sätt att presentera data på och/eller att man avsiktligt bryter mot grundläggande regler för hur man bör presentera data.

Uppgift 1 a 13

Genom själva lådan går en sträcka från 13 till 20. Denna sträcka visar observationernas variationsbredd, där 13 är den minsta och 20 är den största observationen.

Uppgift 1 b 25%

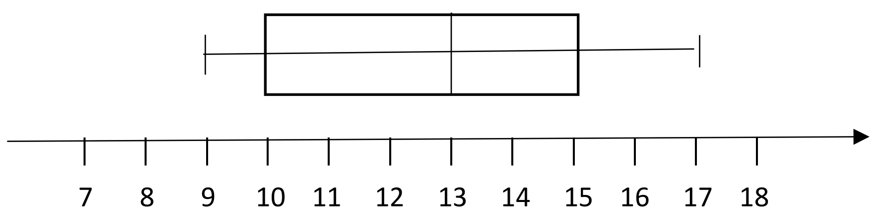
I ett låddiagram är observationerna uppdelade i kvartiler. Kvartilerna är tre värden som delar upp ett ordnat statistiskt material i fyra (om möjligt) lika stora delar. I diagrammet är den första kvartilen 14, den andra kvartilen (alltså medianen) 17 och den tredje medianen 18. Mellan första och andra kvartilen, liksom mellan andra och tredje kvartiler, ligger vardera 25% av observationerna.

Uppgift 1 c 17

Medianen är 17.

Övning 1.1

Beskriv de data som presenteras i följande låddiagram



Övning 1.2

Rita ett låddiagram som beskriver följande data:

Minsta observationen är 2. Största observationen är 14. Kvartilerna är 5, 7 och 10.

Övning 1.3

Rita ett låddiagram som beskriver följande data:

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
f	*0*	*0*	*2*	*4*	*6*	*4*	*1*	*1*	*1*	*1*

Uppgift 2 a 20 st.

I diagrammet som kallas för stolpdiagram kan man avläsa att det finns 2 observationer med 1 poäng, det finns 2 observationer med 2 poäng, det finns 4 observationer med 3 poäng etc. Adderar man antalet observationer får man summan 20.

Observera skillnaden mellan antalet observationer som är 20 och antalet variabler som är 6, alltså 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Uppgift 2 b 4

Den längsta stapeln visar typvärdet, den mest frekventa observationen.

Uppgift 2 c 4

För att finna medianen ordnar man observationerna i storleksordning. Eftersom antalet observationer är 20, alltså ett jämnt tal delar man observationerna i två lika stora grupper.

1 1 2 2 3 3 3 3 3 4   4 4 4 4 4 4 5 5 5 6

Eftersom båda observationerna i mitten är 4 är medianen 4.

När man vet hur det här går till kan man direkt avläsa medianen i diagrammet. Man söker bara den 10:e och 11:e observationen. Om det hade varit 21obervatoner skulle man istället ta den mittersta observationen, alltså den 11:e observationen.

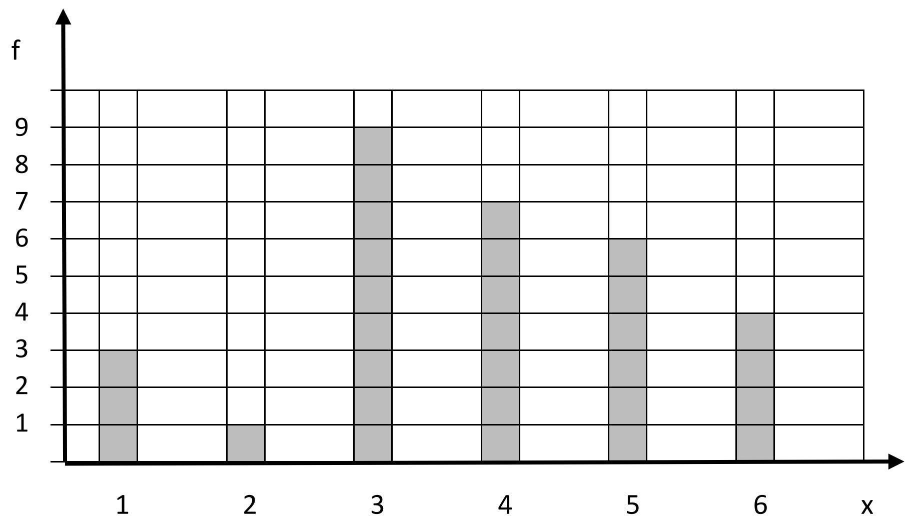
Uppgift 2 d 3,5

Adderar man alla observationerna får man 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + … + 5 + 6 = 70. Summan divideras därefter med antalet observationer, alltså med 20. Man får då det aritmetiska medelvärdet 70 / 20 = 3,5.

Övning 2.1

Bestäm med hjälp av följande diagram

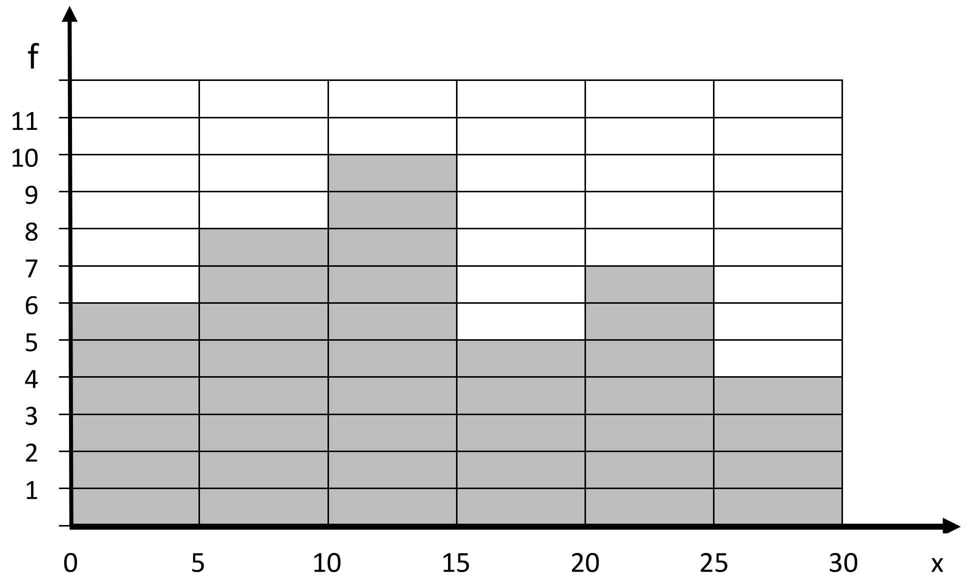
- *antalet observationer*
- *typvärde*
- *median*
- *medelvärde.*



Övning 2.2

Följande diagram kallas för histogram.

- *Hur många observationer finns det i intervallet 0-5*
- *Hur många observationer finns det sammanlagt*
- *I vilket intervall ligger typvärdet?*
- *I vilket intervall ligger medianen?*

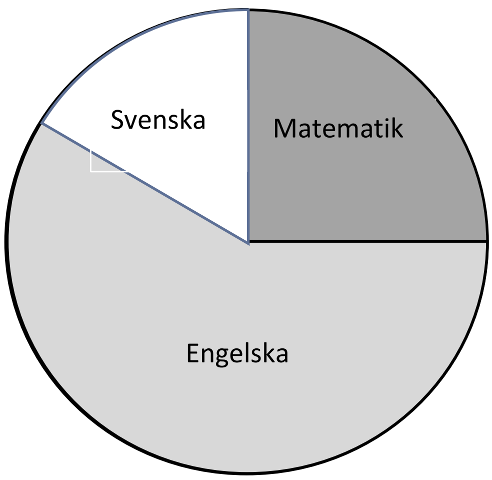


Övning 2.3

Det här cirkeldiagrammet visar hur många elever på en skola som tycker bäst om svenska. matematik eller engelska.

Hur många procent av eleverna tycker bäst om

- *Matematik*
- *Svenska?*
- *Engelska?*



Uppgift 3 13,8

Vi börjar med att studera Alfs observationer. Om summan av observationerna är 300 och antalet observationer är 20 så får man medelvärdet 300 / 50 = 15. Det innebär att antalet observationer multiplicerat med medelvärdet ger summan av alla observationerna, alltså 20 · 15 = 300.

I det här fallet är alltså summan av Alfs observationer 20 · 15 = 300. På motsvarande sätt är summan av Ulfs observationer 30 · 13 =390. Summan av alla observationerna är således 690 och antalet observationer är 50. Medelvärdet är därför 690 / 50 = 23,8.

Övning 3.1

Vid en undersökning räknade man ut att medelvärdet för 45 observationer var 17. Man upptäckte senare att följande fem observationer inte hade räknats med: 19, 24, 26, 15 och 21.
Vilket blir medelvärdet om man räknar med dessa.

Övning 3.2

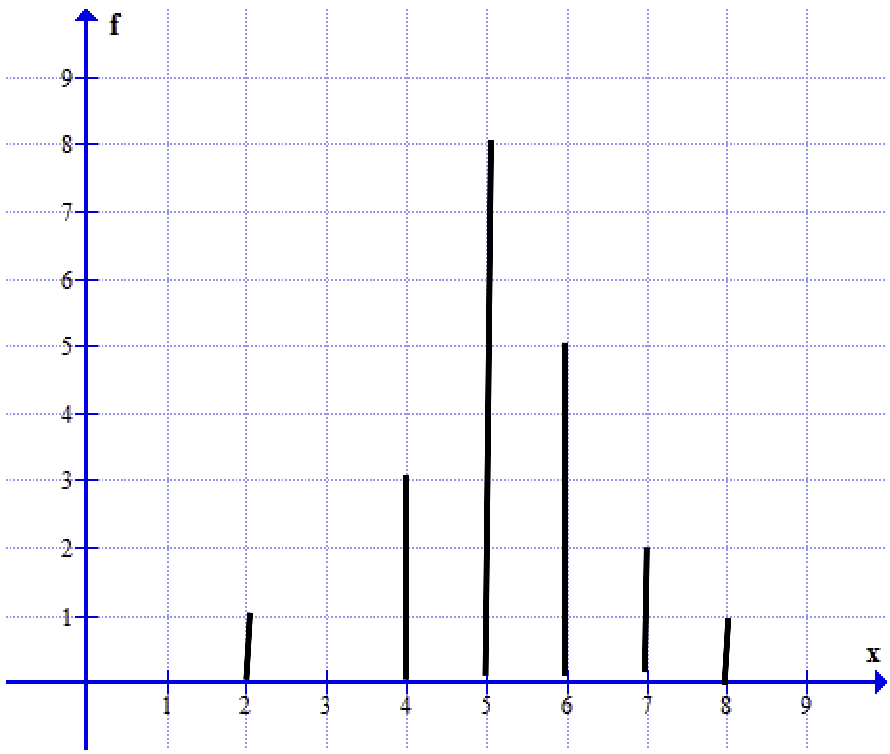
Sedan man räknat ut medelvärdet 12 för 38 observationer upptäckte man att följande 8 observationer hade räknats två gånger: 19, 12, 18, 13, 15, 16, 18 och, 15.
Vilket är det korrigerade medelvärdet?

Övning 3.3

Tre elever samlar in data till en undersökning. De ansvarar för 20 observationer var. Innan de slår samma sina data räknar de ut att deras medelvärden var för sig är 11, 13 och 10,5.
Vilket medelvärde får de sedan de slagit samman sina data?

Uppgift 4 Frekvenstabellen och stolpdiagrammet ser ut så här.

x	f
2	1
3	0
4	3
5	8
6	5
7	2
8	1



När man ska överföra observationerna till en frekvenstabell gör man i allmänhet först en ”avprickning” viket innebär all man successivt sätter en ”pinne” i tabellen efter hand som man läser av observationerna. Dessa avprickningar överförs därefter till kolumn f som visar frekvensen av respektive variabel x.

Ofta vill man dessutom ha ett medelvärde. Detta underlättas om man inför en ny kolumn x·f . I den kolumnen kan man avläsa summan av alla observationer för respektive variabel x. Man ser t.ex. på rad 4 att det finns 3 observationer av det slaget och att dess summa är 12. Man ser också på rad 5 att det finns 8 sådana observationer och att dess summa är 40.

x		**f**	**x·f**
1		0	0
2	I	1	2
3		0	0
4	III	3	12
5	~~IIII~~ III	8	40
6	~~IIII~~	5	30
7	II	2	14
8	I	1	8
	summa	20	106

Genom att summera värdena i kolumn f får man antalet observationer (20) och genom att summera värdena i kolumn x·f får man summan av alla observationer (106). Genom att dividera 106 med 20 får man medelvärdet 5,3.

Övning 4.1

På en tävling kan man få högst 5 poäng. Frekvenstabellen ser ut så här. Komplettera frekvenstabellen och räkna ut medelvärdet.

x	**f**	**x·f**
0	0	
1	2	
2	7	
3	12	
4	7	
5	2	
summa		

Övning 4.2

Eleverna i en klass har fått så här många poäng på ett prov

3 3 1 2 4 1 7 5 6 4
3 2 8 3 2 7 6 3 5 5

Gör en frekvenstabell och rita ett stolpdiagram.

Övning 4.3

Frekvenstabellen för ett klassindelat material ser ut så här. Rita ett histogram.

klass	frekvens
0-5	0
5-10	2
10-15	12
15-20	16
20-25	12
25-30	6
30-35	2
summa	50

Kombinatorik

Kombinatoriken är en gren av matematiken som behandlar hur man kan välja ut och ordna elementen i en mängd. Kombinatoriken erbjuder viktiga förkunskaper när det gäller sannolikhetsläran.

Urvalen kan ske på i huvudsak två olika sätt. Som exempel väljer vi att ordna bokstäverna A, B, C, D och E.

- Man kan permutera bokstäverna, vilket innebär att de ska ordnas på alla möjliga sätt. Den första bokstaven kan då väljas på 5 sätt. Det finns därefter 4 bokstäver kvar att välja bland. Den andra bokstaven kan alltså väljas på 4 sätt osv. Det innebär att man kan välja ut och ordna två av bokstäverna på $5 \cdot 4 = 20$ sätt

  AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE
  BA CA DA EA CB DB EB DC EC ED

  På motsvarande sätt kan alla 5 bokstäverna omordas (permuteras) på $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ sätt. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ kan enklare skrivas 5!, vilket utläses femfakultet.
- Ett annat sätt att göra urval kallas att kombinera. Man väljer då elementen utan att ta hänsyn till dess ordning. Eftersom AB och BA (liksom AC och CA, AD och DA osv) innehåller samma bokstäver så räknas de som samma kombination. Det innebär att 2 element (i det här fallet bokstäver) bland 5 kan kombineras på $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ sätt.

Uppgift 5 På 10 sätt

Uppgiften handlar om kombinationer. Om personerna kallas för A, B, C, D och E, så gäller det att välja ut par såsom AB, BC och ED. Eftersom AB och BA beskriver samma handskakning, liksom CE och EC osv, så blir det inte $5 \cdot 4 = 20$ permutationer utan $\frac{5 \cdot 4}{2}$ kombinationer (handskakningar).

Övning 5.1

På hur många sätt kan man välja ut och ordna 3 bokstäver av 5?

Övning 5.2

På hur många sätt kan man välja ut 3 bokstäver av 5 utan hänsyn till bokstävernas inbördes ordning?

Övning 5.3

Två räta linjer i planet, som inte är parallella, skär varandra i en punkt. Tre räta linjer varav inga är parallella skär varandra i tre punkter. I hur många punkter kan 6 linjer i samma plan högst skära varandra?

Uppgift 6 På 60 sätt

Här gäller det att permutera 3 siffror valda bland 10. Svaret blir således $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Övning 6.1

Hur många tresiffriga tal kan man skriva om man bara får använda siffrorna 1, 2, 3, 4, 5 och 6 och samma siffra får återvändas hur många gånger som helst?

Övning 6.2

Hur många tresiffriga tal kan man skriva om man bara får använda siffrorna 1, 2, 3, 4, 5 och 6 och samma siffra inte får upprepas i samma tal.

Övning 6.3

På hur många sätt kan du välja ut 3 personer till en styrelse om du har 8 personer att välja bland?

Sannolikhetslära

Sannolikhetsläran handlar om modeller för slumpmässiga försök och hur man använder modellerna.

Man kan definiera sannolikhet på två sätt.

- Som det tal den relativa frekvensen konvergerar mot när antalet oberoende försök växer. Sannolikheten för att få en sexa vid kast med en tärning kan alltså bestämmas genom att man gör många kast med tärningen och studera kvoten mellan antalet sexor dividerat med antalet gjorda kast. Ju fler kast man gör desto närmare $\frac{1}{6}$ blir kvoten (den relativa frekvensen för sexa).
- Som kvoten mellan antalet gynnsamma (önskade) och antalet möjliga utfall. Vid kast med en tärning är antalet möjliga utfall 6 (alltså 1, 2, 3, 4, 5, 6) och antalet gynnsamma utfall, att få en sexa, är 1. Även i det här fallet blir sannolikheten $\frac{1}{6}$

När man löser problem som handlar om sannolikhet kan man ta hjälp av figurer och diagram. Ett sådant diagram är träddiagrammet.

Uppgift 7 a 0,6

Vi kallar kulorna för Röd1, Röd2, Blå1, Blå2 och Blå3. Det finns således 5 möjliga utfall. Det finns 3 gynnsamma utfall nämligen Blå1, Blå2 och Blå3. Sannolikheten att få en blå kula alltså $\frac{3}{5}$ = 0,6.

Uppgift 7 b 0,3

När man sedan har tagit en blå kula (t.ex. Blå1) så finns det 4 kulor kvar: Röd1, Röd2, Blå2, Blå3. För ett ta en ny blå kula finns det 2 gynnsamma och 4 möjliga utfall. Sannolikheten att nu ta en blå kula är nu $\frac{2}{4}$ = 0,5. Enligt multiplikationsprincipen är därför sannolikheten att ta först ta en blå kula och därefter ytterligare en blå kula 0,6 · 0,5 = 0,3.

Man kan också lösa problemet på andra sätt. Antalet gynnsamma utfall är följande 10

Röd1+Röd2, Röd1+Blå1, Röd1+Blå2, Röd1+Blå3,

Röd2+Blå1, Röd2+Blå2, Röd2+Blå3,

Blå1+Blå2, Blå1+Blå2, Blå2+Blå3

Uppgiften handlar om kombinationer, alltså att välja 2 element av 10 utan hänsyn till ordning. Antalet gynnsamma utfall är i det här fallet 3, nämligen Blå1+Blå2, Blå1+Blå3 och Blå2+Blå3.

Den sökta sannolikheten är alltså $\frac{3}{10}$ = 0,3.

Övning 7.1

I ett lotteri finns det 8 lotter kvar varav 3 är vinstlotter. Bestäm sannolikheten för att du först drar en vinstlott och därefter en nitlott.

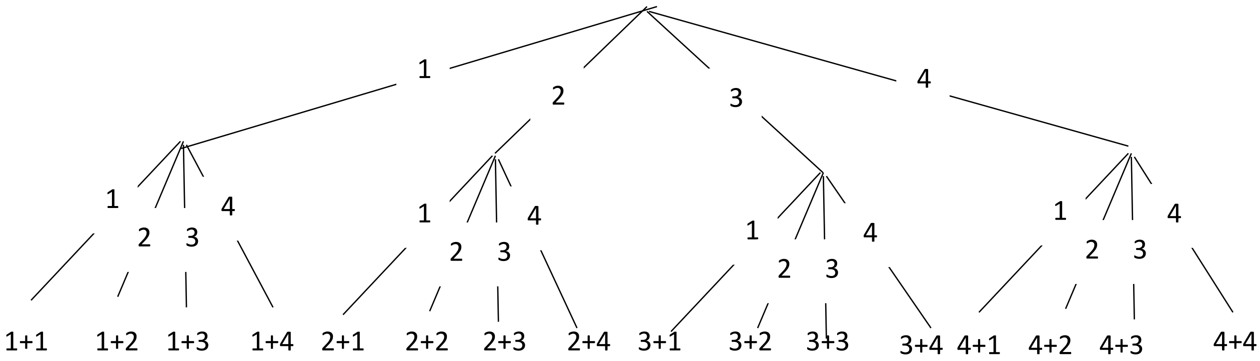
Övning 7.2

I ett lotteri finns det 8 lotter kvar varav 3 är vinstlotter. Bestäm sannolikheten för att du drar två vinstlotter

Övning 7.3

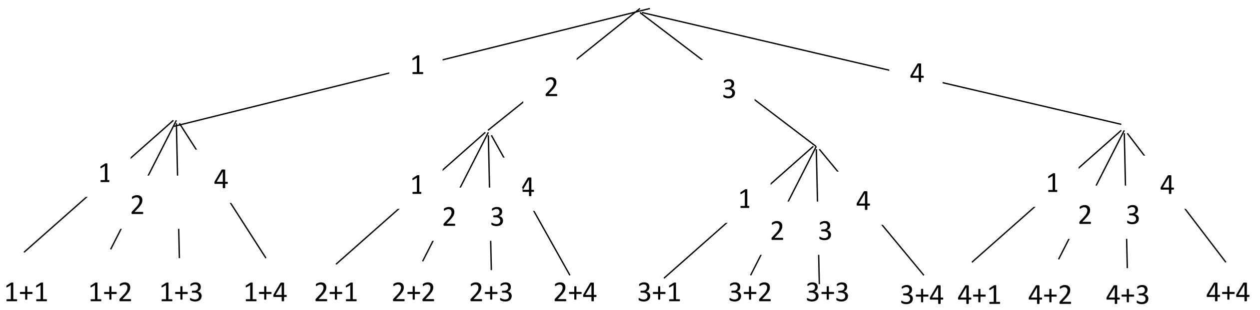
I ett lotteri finns det 8 lotter kvar varav 3 är vinstlotter. Du drar två lotter. Bestäm sannolikheten för att du inte drar någon vinstlott.

Uppgift 8 a Träddiagrammet ser ut så här:



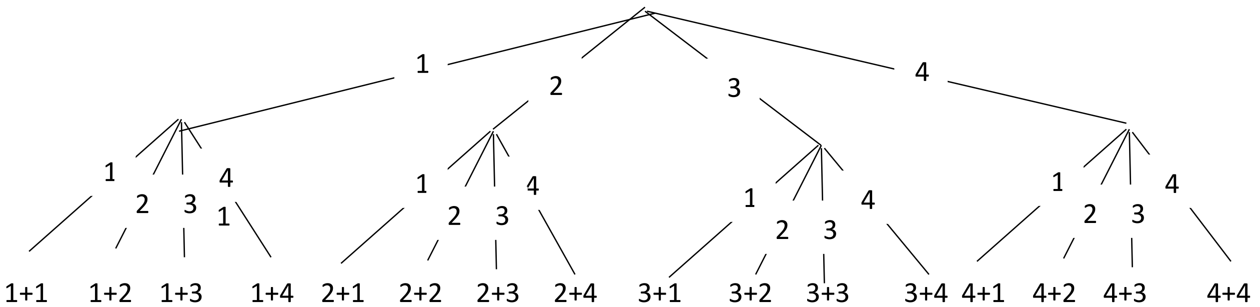
Uppgift 8 b $\frac{3}{16}$

Tre av de möjliga utfallen ger summan 6 nämligen 2 + 4, 3 + 3 och 4+ 2.



Uppgift 8 c $\frac{7}{16}$

Sju av de möjliga utfallen innehåller en trea.



Övning 8.1

a) I en urna har du en röd, en orange, en grön och en blå kula. Du drar slumpmässigt först en kula och därefter en ny kula utan att lägga tillbaka den första kulan. Rita ett träddiagram som beskriver utfallsrummet.

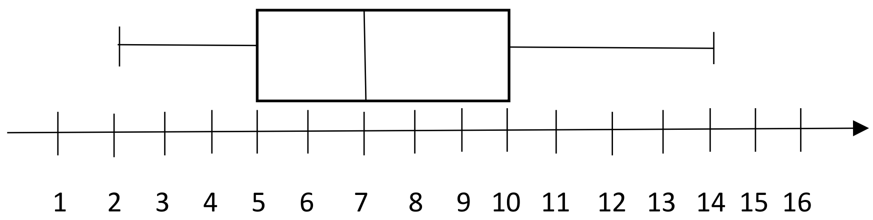
b) Bestäm sannolikheten för att en av kulorna du dragit är grön..

c) Bestäm sannolikheten för att ingen av kulorna du dragit är röd eller blå.

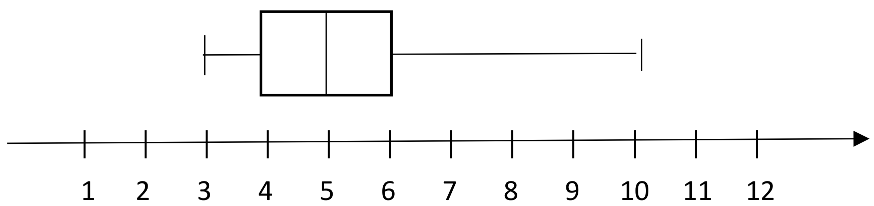
Facit till övningarna

1.1 Den minsta observationen är 9 och den största är 17. Variationsbredden är alltså 8. Den första kvartilen är 10, medianen är 13 och den tredje kvartilen är 15. Mellan 9 och 10, mellan 10 och 13, mellan 13 och 15 liksom mellan 15 och 17 finns vardera 25% av observationerna.

1.2 Låddiagrammet ser ut så här:



1.3 Låddiagrammet ser ut så här:



2.1 Antalet observationer är 30, typvärdet är 3, medianen är 4 och medelvärdet är 3,8.

2.2 I intervallet 0-5 finns det 6 observationer, i intervallet 5-10 finns det 8 observationer osv. Sammanlagt finns det 40 observationer. Typvärde och median ligger intervallet 15-20.

2.3 I ett cirkeldiagram är cirkelsektorernas storlek proportionella mot klassens (de aktuella observationernas) relativa frekvens. En halvcirkel motsvarar således hälften av observationerna.

Det innebär att
- 25% av eleverna tycker bäst om matematik
- ca 17% av eleverna tycker bäst om svenska
- resten, alltså ca 58% av eleverna, tycker bäst om engelska.

3.1 17,4
Att medelvärdet är 17 innebär att summa av de första observationerna är 45 · 17 = 765. Till detta kommer summa av de nya observationerna som är 105. Summan av alla de 50 observationerna är alltså 870. Det nya medelvärdet är 870 / 50 = 17,4.

3.2 11
Summan av observationerna var från början 38 · 12 = 456. Summan av de 8 observationer som räknats dubbelt är 126. Efter korrigering är således summan av 30 observationer 456 – 126 = 330, vilket ger medelvärdet 330 / 30 = 11.

3.3 11,5

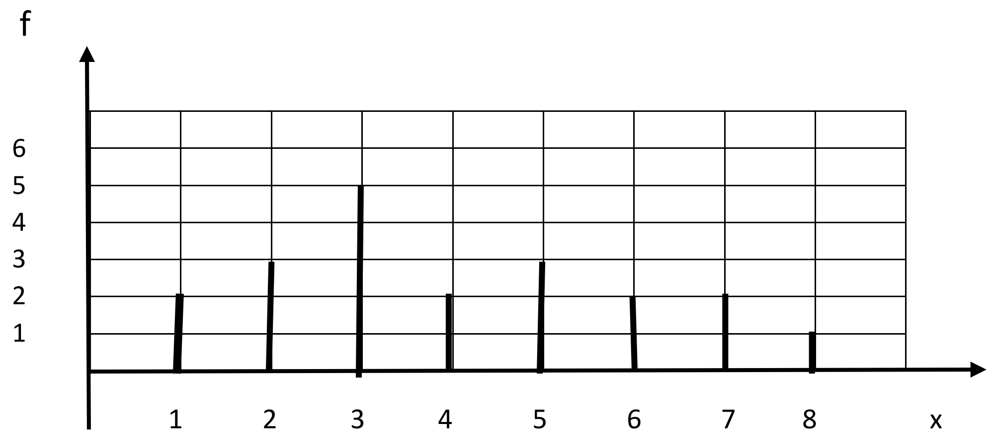
Summan av de 60 observationerna är 220 + 260 + 210 = 690, vilket ger medelvärdet 690 / 60 = 11,5.

4.1 Medelvärdet är 3

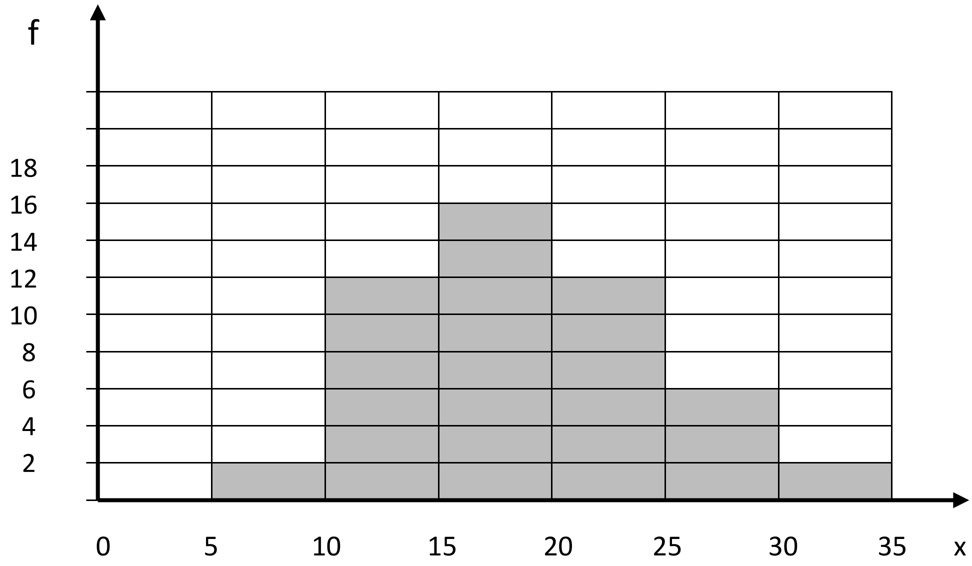
x	f	x·f
0	0	0
1	2	2
2	7	14
3	12	36
4	7	28
5	2	10
summa	30	90

4.2

x	f	x·f
0	0	0
1	2	2
2	3	6
3	5	15
4	2	8
5	3	15
6	2	12
7	2	14
8	1	8
summa	20	80



4.3



5.1 På $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olika sätt (60 permutationer)
Den första bokstaven kan väljas på 5 sätt. Det finns därefter 4 bokstäver kvar att välja bland. Man kan alltså välja den andra bokstaven på 4 sätt. På motsvarande sätt kan den tredje bokstaven väljas på 3 sätt.

5.2 På $60 / 6 = 10$ olika sätt (10 kombinationer)
Tre bokstäver kan skrivas på $3 \cdot 2 = 6$ olika sätt. De tre bokstäverna A, B och C kan skrivas som ABC, ACB, BAC, BAC, CAB och CBA. 60 permutationer ger alltså $60 / 6 = 10$ kombinationer.

5.3 På 15 olika sätt (15 kombinationer)
Man kan tänka sig att linjerna skakar hand med varandra. Man kan också tänka så här. Om man redan har 3 linjer så kan en fjärde linjen skära dessa i 3 punkter, en skärning med vardera linje. Om man redan har 4 linjer så kan en femte linjen skära dessa i 4 punkter. Osv. Resultatet för 6 linjer blir därför $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ skärningar.

6.1 På 216 sätt ($6 \cdot 6 \cdot 6$ sätt)

6.2 På $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 120$ sätt (permutationer)

6.3 På $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ sätt (kombinationer)

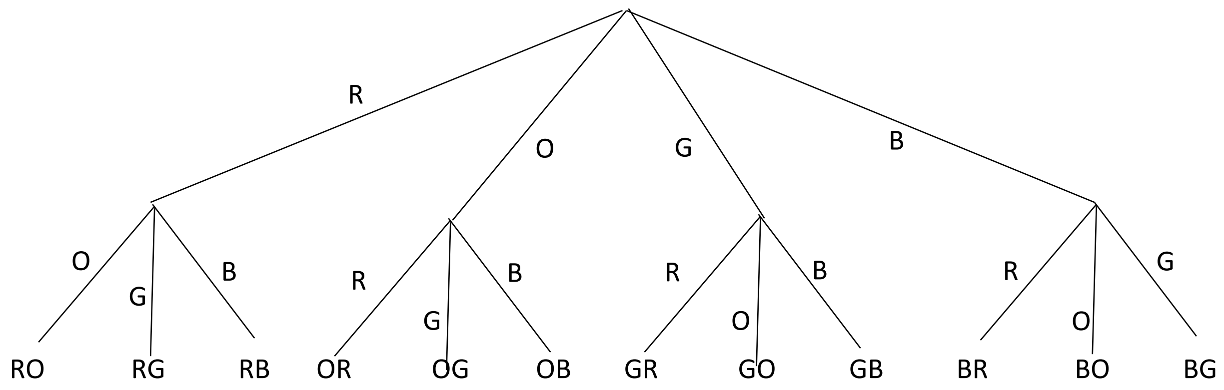
7.1 $\frac{15}{56} \approx 0{,}27$
Sannolikheten att först dra en vinstlott är $\frac{3}{8}$. Därefter finns det 7 lotter kvar varav 5 är nitlotter. Sannolikheten att nu dra en nitlott är $\frac{5}{7}$. Den sökta sannolikheten är därför $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$

7.2 $\frac{3}{28} \approx 0{,}11$
Sannolikheten att först dra en vinstlott är $\frac{3}{8}$. Därefter finns det 7 lotter kvar varav 2 är vinstlotter . Sannolikheten att nu dra en ny vinstlott är $\frac{2}{7}$.
Den sökta sannolikheten är därför $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$

7.3 $\frac{10}{28} \approx 0{,}36$

Sannolikheten att först dra en nitlott $\frac{5}{8}$. Därefter finns det 7 lotter kvar varav 4 är nitlotter. Sannolikheten att dra en nitlott till är $\frac{4}{7}$. Den sökta sannolikheten är därför $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}$

8.1 a)



b) 0,5

Det finns 6 gynnsamma utfall av 12 möjliga utfall. (RG, OG, GR, GO, GB och BG). Sannolikheten är därför $\frac{6}{12}$.

c) $\frac{1}{6}$

Det finns 2 gynnsamma utfall av 12 möjliga utfall.(OG och GO) Sannolikheten är därför $\frac{2}{12}$

NCM lanserar med denna titel en ny skriftserie om matematikutbildning. In serien ryms texter som behandlar olika aspekter av matematikutbildning, där författarna står för innehållet under NCM:s redaktionella granskning. Tanken med denna skriftserie är att erbjuda ett forum för texter kring matematikundervisning som författare vill göra tillgängliga för alla.

Natalia Karlsson och **Wiggo Kilborn** har här bidragit med ett genomtänkt och utprövat material för att stärka det grundläggande matematikkunnandet, främst riktat till blivande lärare inom lärarutbildning med inriktning på förskola och grundskolans tidiga år. Materialet innehåller fyra diagnoser inom olika matematikområden, rikligt kommenterade med övningar på de moment som i diagnosen visat sig vara svårt. Diagnoserna är tänkta att användas av den som ska påbörja en lärarutbildning eller påbörja en matematikdidaktisk kurs inom lärarutbildningen, men de har också ett värde för den verksamma läraren som vill repetera grundläggande matematik.

NCM

Nationellt centrum för matematikutbildning
vid Göteborgs universitet

ISBN 9789185143337