GRAFTEORI

— en intressant och rolig del av den diskreta matematiken

*Högskolelektor **Torgny Domar,** högskolan i Umeå, tar här upp några klassiska problem inom grafteorin.*

Den klassiska matematikundervisningen vid universitet och högskolor i Sverige har under 1950- och 1960-talet i stor utsträckning varit inriktad på att stödja de naturvetenskapliga och tekniska utbildningarna. Detta har företrädesvis inneburit en stark satsning på analyskurser som handlat om derivator, integraler, differentialekvationer m m. Under 1960-talet moderniserades matematikutbildningen genom införande av kurser i linjär algebra, dvs ekvationssystem, matriser, determinanter m m. Denna modernisering kan delvis sägas ha influerats av datorernas genombrott.

Nu har vi vid de svenska universiteten och högskolorna i våra grundkurser börjat ta upp ytterligare vissa områden av matematiken som inte hör hemma vare sig under beteckningen analys eller linjär algebra. Vad jag syftar på är just det stoff som brukar sammanfattas under benämningen diskret (till skillnad från kontinuerlig) matematik. Olika personer lägger litet olika innebörd i begreppet diskret matematik, men i stort sett är man väl enig om innehållet i begreppet. Som exempel på underrubriker kan i varje fall nämnas

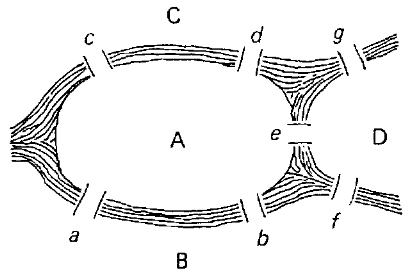
— Olika typer av algoritmer
— Rekursiva talföljder
— Kombinatorik
— Grafteori
— Logik
— Talteori
— Algebraiska strukturer (grupper, kroppar och ringar).

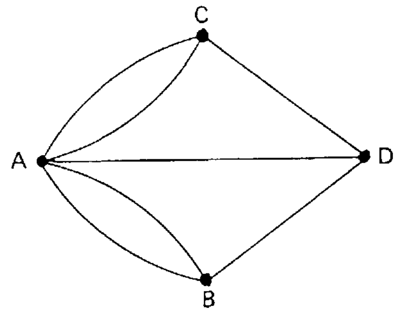
I denna föreläsning avser jag att tala om grafteori, eftersom det för personer som studerat matematik vid våra universitet är en av de minst kända delarna av den diskreta matematiken. Jag skall försöka beskriva detta ämnesområde genom att ge ett antal exempel på grafteoretiska problem.

Königsbergs broar

Man brukar säga att grafteorin föddes för cirka 250 år sedan, när Euler löste problemet om Königsbergs broar. Däremot började man ägna sig åt grafteorin på allvar först på 1920-talet, så på ett sätt är grafteorin en rätt modern del av matematiken.

Problemet om Königsbergs (numera Kaliningrads) broar ansluter sig till figuren nedan, där det framgår hur de båda öarna A och D förbinds med varandra och med landsidorna B och C genom sju broar. Problemet som påstås ha ställts av flanerande invånare i staden var hur man skulle kunna göra en promenad i staden, så att man startade och slutade i samma





punkt och samtidigt passerade alla broar exakt en gång. En sådan promenad kallas numera i grafteorin för en Eulerväg.

För att lösa detta problem överför man (om man är grafteoretiker) figuren till en figur (en *graf*) med fyra *hörn* och sju *kanter* som svarar mot öarna och landsidorna resp broarna. (Se figuren ovan.) Man definierar också gradtalet för ett hörn som antalet kanter som utgår från hörnet i fråga. Man kan med denna terminologi relativt lätt visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor, för att det skall existera en Eulerväg, är att grafen är sammanhängande och att varje hörn har *jämnt* gradtal. Eftersom i problemet om Königsbergs broar varje hörn har udda gradtal i motsvarande graf, så existerar alltså ingen lösning på det ursprungliga problemet.

Ett annat problem av likartad typ är att i en given graf försöka hitta en *cykel* eller sluten väg (startpunkten = slutpunkten), där man passerar varje *hörn* exakt en gång. En sådan väg kallas en Hamiltonväg och något enkelt nödvändigt och tillräckligt villkor för att en sådan väg skall existera är okänt.

Eulers formel för plana grafer

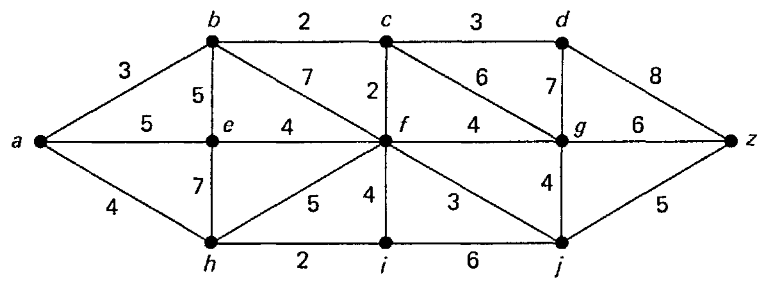
Detta grafteoretiska resultat vill jag gärna ta upp, eftersom det är ett mycket enkelt resultat som man kan ta upp rätt långt ner i åldrarna genom att använda sig av en experimentell metodik för att undersöka talmönster.

En *plan* graf är en graf som skall kunna ritas så i planet att varje skärning mellan två kanter verkligen också motsvaras av ett hörn i grafen. Man kan inse att en sådan graf delar upp planet i ett antal ytor (sammanhängande områden). Om vi betecknar antalet av dessa ytor, inklusive den yta som ligger utanför grafen, med Y och antalet hörn med H samt antalet kanter med K, så ser man, om man undersöker olika figurer, att för en plan sammanhängande graf tycks alltid gälla att $Y+H-K=2$. I den plana grafen som hör ihop med problemet om Königsbergs broar gäller t ex att $Y=5$, $H=4$ och $K=7$.

Om man inte har alltför avancerade krav på grundligheten i ett bevis, så kan man bevisa detta resultat genom en ''suddningsteknik''. Man observerar nämligen att om man utgår från en given figur och tar bort en kant, eller ett hörn, eller en kant med ett intilliggande hörn, men fortfarande bibehåller grafen sammanhängande, så kommer detta inte att ändra på värdet av kvantiteten $Y+H-K$. Genom att successivt ta bort mer och mer av grafen, kommer man till slut fram till en figur som t ex bara består av en enda punkt. För denna enkla urartade graf gäller uppenbarligen att värdet av $Y+H-K$ är 2 och följaktligen var detta också värdet i ursprungsgrafen, eftersom våra successiva ''suddningar'' inte ändrat på värdet.

Viktade grafer

Ett tredje exempel på ett grafteoretiskt problem handlar om viktade grafer, vilket är grafer, där kanterna i grafen försetts med vikter som man kan tänka sig betecknar avstånd, kostnader eller liknande. (Se nedanstående figur.) Ett naturligt problem i en sådan graf kan t ex vara att bestämma den kortaste vägen mellan två givna hörn *a* och *z*. Här finns en systematisk metod, Dijkstras algoritm, som löser detta problem på ett enkelt sätt.

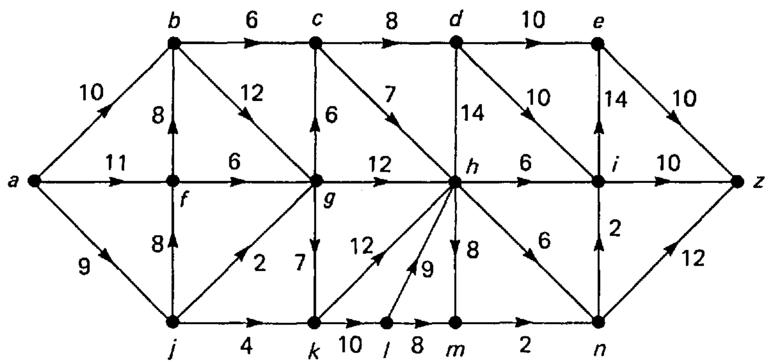


Det är svårt att kortfattat beskriva algoritmen. Man kanske beskriver metoden enklast genom att tänka på en situation, när t ex vatten strömmar fram utgående från startpunkten *a* och successivt når de olika ''orterna'' (hörnen i grafen). Det är emellertid viktigt att tänka på att när vattnet kan nå en ort längs många vägar, så är det endast den första ''flodvågen'' som är av intresse, eftersom man ju är intresserad av den *kortaste* vägen. Man måste också vara extremt försiktig, när man hanterar kalkylerna och hela tiden bara addera en ort (ett hörn) i taget, enligt ett visst system, till ''det översvämmade området''. När man till slut kommit fram med vattnet till hörnet *z*, så kan man både avläsa längden av den kortaste vägen samt genom att gå baklänges också finna den kortaste vägen från *a* till *z*.

I en viktad graf kan man också ställa det s k *handelsresandeproblemet*, som består i att man frågar efter den kortaste slutna vägen (cykeln), som passerar alla hörn minst en gång. En algoritm som med rimligt mycket arbete letar rätt på en sådan cykel saknas för närvarande.

Maximalt flöde

Utöver att tillskriva kanterna i en graf vissa vikter, kan man också förse kanterna med en (eller två) riktning (-ar) i enlighet med nedanstående figur. Grafen kan då t ex symbolisera ett trafiksystem eller ett oljeledningssystem där vikterna representerar maximala transportkapaciteter i dessa riktningar. Här är ett naturligt problem att finna den maximala transportkapaciteten från källan *a* till utloppet *z*. Även här finns en algoritm som tar rätt på detta maximala flöde. Av utrymmesskäl går jag inte in på att beskriva algoritmen.



Fyrfärgsproblemet

Som ett sista exempel på ett grafteoretiskt problem tar jag här upp det berömda fyrfärgsproblemet, som ställdes i slutet av 1800-talet av Guthrie, som var bror till en kartritare. Problemet gäller, litet slarvigt beskrivet, hur många färger man minimalt kan klara sig med för att färglägga en godtycklig karta så att två länder med gemensam gräns aldrig har samma färg. Detta problem kan omformuleras i grafteoretiska termer genom att man ersätter länderna med hörn och låter två länder som har en gemensam gräns förenas av en kant. Problemet om färgläggningen förvandlas då till problemet om man kan färglägga hörnen i grafen, så att två hörn som är förenade med en kant alltid har olika färger. Man kom rätt snart fram till att det föreföll rimligt att det oavsett kartans utseende alltid borde räcka med fyra färger, om man färglade på tillräckligt listigt sätt. Det var dock först 1974 som Haken och Appel lyckades visa detta resultat, varvid man i beviset fick lov att använda sig av en kraftfull dator för att sortera och hålla reda på alla olika fall som uppträdde i beviset.

Avslutande kommentar

Det finns oerhört många problemtyper som kan formuleras i grafteoretiska termer och jag har av utrymmesskäl här bara kunnat ta upp några få exempel.

Det är också viktigt att notera att man oftast vill att de lösningsmetoder man söker på praktiska grafteoretiska problem skall vara algoritmiskt formulerade och att de lätt skall kunna anpassas till datorkörningar för att man skall hitta de faktiska lösningarna i varje speciell situation.

I våra universitetskurser ingår för närvarande den diskreta matematiken med varierande poängtal, dock minst 5 poäng, varav hälften ofta just handlar om grafteori.

Litteraturhänvisningar

Det finns numera rätt gott om böcker på detta område. Jag nöjer mig med att namnge ett par böcker, som vi använt som kurslitteratur vid Umeå universitet.

Biggs, N. L., *Discrete Mathematics,* Clarendon Press, Oxford, 1985.

Johnsonbaugh, R. *Discrete Mathematics,* Macmillan, New York, 1984.

Liu, C. L. *Elements of Discrete Mathematics,* McGraw-Hill, New York.