

Problem avdelningen



Vi hälsar parhästarna Bernt Leonardsson och Bo Söderberg, Örebro, välkomna med problemavdelningen även denna gång. Förhoppningsvis känner Du inte igen alla problemen. De är inte så svåra och det kan eventuellt föra med sig att fler vågar sända in sina lösningar. Det skadar inte att påpeka att man inte måste besvara alla problem för att skicka in lösningar.

801 En tornklocka slår 6 slag på fem sekunder.
Hur lång tid tar det för klockan att slå 12 slag?

802 Ett praktiskt problem från den gamla goda tiden.
Två tiggare samlar cigarettfimpar på gatan. De har cigarettpapper och av sex fimpar kan de rulla en cigarett.
En dag hade den ene hittat 40 fimpar.
Hur många cigaretter kunde han röka?

803 Försök att skriva talet 1981 som differensen av kvadraterna på två naturliga tal!

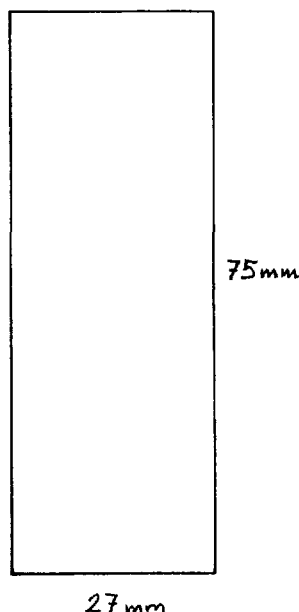
804 Ett sexsiffrigt tals sista siffra är 7. Om man placerar denna siffra först så blir det nya talet fem gånger större än det ursprungliga. Vilket är detta ursprungliga tal?

805 Talet x är reellt. Är följande påståenden sanna eller falska? Ge bevis eller motexempel!

(a) Om x^7 och x^{12} är rationella så är säkert även x rationellt!

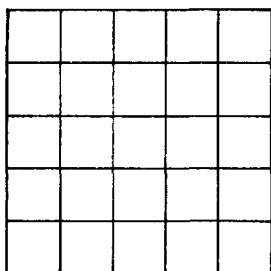
(b) Om x^9 och x^{12} är rationella så är säkert även x rationellt!

806 Dela nedanstående rektangel med två raka snitt (i tre delar) så att delarna kan sammanfogas till en kvadrat!

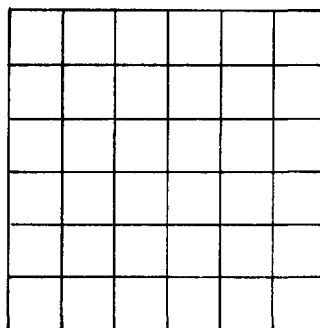


807 Du vet förmodligen hur en dam får flyttas på ett schackbräde — vertikalt, horisontellt eller diagonalt.

- (a) Placera 5 damer på ett "schackbräde" av storleken 5×5 rutor så att tre rutor inte omedelbart kan nås av någon dam (dvs förblir oattackerade)



- (b) Placera 3 damer på ett 6×6 -bräde så att samtliga 36 rutor blir oattackerade.



Lösningar till problem 716—724



Lösningar till problemen i nr 3 1980/81 av NÄMNA-REN har kommit från många håll. De bästa lösningarna har sänts in av Hans Engberg, Uddevalla, Roland Engdahl, Kalmar, Bernt Leonardsson, Örebro och Olle Vejde, Borlänge. Dessa får var sin bok på posten. Här nedan presenteras utdrag från insända lösningar.

- 716 Plocka ut två representanter för syskonskaran, nämligen Cecilia och Bengt. De heter så ty jag känner familjen. När Bengt ser ut över hopen kan han se X pojkar och X flickor, medan Cecilia endast kan iakttaga $X-1$ flickor och $X+1$ pojkar, samtidigt som hon säger

$x + 1 = 2(x-1)$ dvs $x = 3$ dvs familjen består av 4 pojkar och 3 flickor.

Hans Engberg, Uddevalla

717

2	2	1	4	1	2	3	2	3
1	1	1	2	2	3	1	4	1
1	2	1	1	1	1	1	3	2
3	1	1	2	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1	1

Per Bjärkby, klass 8 D, Torslanda

- 718 T i 100-talskolumnen måste vara 4 eller 5. I båda fallen är $\bar{A}=1$ och A alltså 3. T kan vara 5, endast om också V är fem, vilket strider mot reglerna. T är då 4 och $V=8$.

Olle Vejde, Borlänge

$$\begin{array}{r} 4 \ 8 \ 1 \\ 4 \ 8 \ 1 \\ + 4 \ 8 \ 1 \\ \hline 1 \ 4 \ 4 \ 3 \end{array}$$

- 719 Med hjälp av en modifiering av programmet på s 32 i NÄMNAREN nr 2 79/80 får man talet 945.

tal	summa
945	975
1575	1649
2205	2241

och — gissar jag kvalificerat — följden

$945 + n \cdot 630$, där n är ett naturligt tal.

Program på TI-57

```
00 2      12 =      23 GTO 0
01 Sum 1  13 INV X>t 24 Lb1 1
02 1      14 GTO 1  25 RCL 1
03 STO 0  15 STO 7

                                26 +
04 STO 2  16 INT      27 1
05 Lb1 0  17 INV X=t 28 =
06 2      18 GTO 0  29 STO 7
07 SUM 0  19 SUM 2  30 RCL 2
                                20 RCL 0  31 INV X>t
08 RCL 1  21 INV X=t 32 RST
09 ÷      22 SUM 2  33 RS
10 RCL 0                                34 RST
11 STO 7
```

För körning 1 STO 1

Det aktuella talet fås via RCL 1 när "maskinen" stannat. Det tar en stund även för en räknare att få fram resultatet.

Olle Vejde

Roland Engdahl i Kalmar har sänt in följande lösning till problemet:

Lås $s(n)$ beteckna summan av samtliga delare till n (inklusive 1 och n). Låt p vara primtal. Delarna till

p^e är $1, p, p^2, \dots, p^e \quad e \in \mathbb{N}$

$$s(p^e) = 1 + p + \dots + p^e = \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1}$$

$$\text{Sätt } q(n) = \frac{s(n)}{n} \quad \text{Då gäller}$$

$$q(p^e) = 1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^e} =$$

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{p}\right)^{e+1}}{1 - \frac{1}{p}}$$

$$\text{Sätt } m(p) = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

Vi har $m(p) > q(p^e)$ för alla $e \in \mathbb{N}$

För att n skall vara rikt måste $q(n) > 2$

Då $m(p) \leq 2$ kan ej en primtalspotens vara ett rikt tal.

Låt primfaktoruppdelningen av n vara

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$$

Varje tal av formen $p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ är delare till n om $0 \leq a_j \leq e_j$

Då är $s(n) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{e_1}) \cdot$

$$\dots (1 + p_r + \dots + p_r^{e_r})$$

$$\text{och } q(n) = \prod_{j=1}^r q(p_j^{e_j})$$

Vi söker minsta udda tal n så att $q(n) > 2$

Om $p < s$ (p, s primtal) gäller $m(p) > m(s)$ och $q(p^e) > q(s^e)$

Små rika tal skall därför innehålla små primfaktorer

$$m(3) = \frac{3}{2}; m(5) = \frac{5}{4}; m(7) = \frac{7}{6}$$

$m(3) \cdot m(5) < 2$ varför det ej räcker med primfaktorerna 3 och 5

$$m(3) \cdot m(5) \cdot m(7) = \frac{35}{16} > 2$$

Det finns alltså möjligheter att finna rika udda tal som består av primfaktorerna 3, 5, 7

$$q(3 \cdot 5 \cdot 7) < 2; q(3^2 \cdot 5 \cdot 7) < 2; q(3^3 \cdot 5 \cdot 7) = \\ = q(945) = \frac{128}{63} > 2$$

$$q(3 \cdot 5^2 \cdot 7) < 2; q(3 \cdot 5 \cdot 7^2) < 2; q(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) < 2$$

945 är således ett rikt tal och det är det minsta.

Vi ser att det behövs minst fem udda primfaktorer.

$$q(3^2 \cdot 5^2 \cdot 7) = q(1575) > 2$$

$$q(3^2 \cdot 5 \cdot 7^2) = q(2205) > 2$$

$$q(3 \cdot 5^2 \cdot 7^2) < 2$$

De tre minsta udda rika talen är 945, 1575, 2205.

Det minsta udda rika tal som består av olika primfaktorer är

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 15015.$$

Svaret på uppgiften är 945.

1	2	4	4	3	1	5	1
1	6		1	4	0	2	7
7			5				5
	10		11	5	12	6	13
14	1	2	9	6	15	6	2
	5		16	2	1	6	1
18	1			4			19
20	3	21	22	4	0	23	4
24	6	7	5	0		26	6

- 720 Som flera påpekat hade det tyvärr uppstått ett tryckfel. Vi beklagar! I nedersta raden ska det stå E i stället för F. Efter det att Olle Vejde varit i kontakt med redaktionen och fått denna rättelse lämnar han följande lösning.

Jag börjar med C·AB. Eftersom A inte kan vara 1 (E=1) så måste C vara 2, 3 eller 4. C=4 förutsätter AB=22 eller 23. AB=22 är omöjligt. AB=23 går inte därför att 4·3 ger 2 som 1-tals-siffra i kvoten. C=3 förutsätter AB=27 eller 28. AB=27 går inte därför att 3·27 ger 1 som 1-talssiffra i kvoten. AB=28 ser till en början ut att gå men stupar på att C+8+ ev minnessiffra varken får bli 1 eller 2.

$$\begin{array}{r} 43 \\ \cdot 25 \\ \hline 215 \\ + 86 \\ \hline 1075 \end{array}$$

Återstår 2 för C, som i sin tur ger 43 för AB och 5 för D.

- 721 Självfallet har talet 2 egenskapen att ge resten 2 vid division med varje tal större än 2.
Minsta gemensamma multipeln till 3, 4, 5, 6, 7 är 420.
Varje tal av formen $2+k \cdot 420$ ger resten 2 vid division med 3, 4, 5, 6 och 7.
För $k=1$ är talet 422, som är den lösning som antagligen avses.

Ändring av problemet.

Låt p_j vara primtal nummer j . ($p_1=2$, $p_2=3$ etc)

Sök det minsta tal med egenskapen att vid division med p_j ge resten j . $j=1, 2, \dots, 9$

Svar 188677703

(Anm Kinesiska restsatsen)

Roland Engdahl

- 723 Om man nu är för lat för att vara en galärslav så använder man formeln på s 59 i NÄMNAREN nr 3 80/81.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$$

OBS! Det finns ett tryckfel på s 59. Det ska vara $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$.

$$1^3 + 2^3 + \dots + 401^3 = \frac{401^2 \cdot (1 + 401)^2}{2} = 6\,496\,521\,201$$

Detta var gjort på ca 2—3 sekunder eftersom min räknedosa faktiskt visar tio siffror. Jag förstod nog problemets överskrift "Galärslavsproblem" då de flesta dosor inte klarar detta antal siffror, men ibland har man tur!

Bernt Leonardsson, Örebro

- 724 Lösning till denna uppgift kommer bland annat från Roland Engdahl.

I grundkvadraten finns av talen 13, 14, 15, 16

ett i varje rd

ett i varje kolonn

ett i varje diagonal

Om vart och ett av talen 13, 14, 15, 16 ökas med samma tal fås en ny magisk kvadrat. I grundkvadraten är summan i rader, kolonner och diagonaler 34. För att få summan s skall de nämnda talen ökas med $s-34$.

$$13 \text{ skall bytas mot } 13 + (s-34) = s-21$$

$$14 \text{ skall bytas mot } 14 + (s-34) = s-20 \text{ etc}$$

Om s är mindre än 34 får vi dubletter eller negativa tal i kvadraten. Begränsningen uppåt till 100 är utan betydelse.

forts. från s 1

le kunna vara att det fanns åtminstone 2 abonnemang på varje skola. Idag finns det ca 3 000 skolor som inte har ett enda! Nåja — det finns också skolor, där *varje* lärare har tillgång till ett eget exemplar... Och handen på hjärtat — är det inte säkrast att ha ett eget exemplar? Då får man reda på saker och ting i tid och slipper vänta tills andra läst...

Matematikbiennalen och 1982 års NÄMNAREN-pris

Vi har ett spännande läsår framför oss. Den andra matematikbiennalen ska gå av stapeln. *Matematik för alla* är biennalens motto. Matematik för alla lärare — för alla stadier — för alla elever. Hjälp till att förverkliga temat MATEMATIK FÖR ALLA. Delta aktivt i Biennalen! Börja planera redan nu!

Vid matematikbiennalen kommer också 1982 års NÄMNAREN-pris att utdelas. Det går till den bästa undervisningsidén som presenteras i samband med biennalen. Priset är ett resestipendium på 5 000 kr. (Se även s 8—9).

NÄMNAREN — detta läsår

Som du ser av omslaget på det här numret, så fortsätter vår serie *Miniporträtt* — små berättelser med "aktualiteter" om stora personligheter i matematikens värld. *Vad händer på SÖ* med senaste nytt och *Uppslaget* med kopieringsunderlag för alla stadier återkommer i varje nummer. Likaså *Problemavdelningen* med annorlunda problem för elever och lärare på alla stadier och *Pedagorien News* med inträngande reportage från Pedagogiens utbildningsväsende (landet Pedagogien har ju den perfekta skolbyråkratin). På *Anslagstavlan* kan alla informera, sätta upp komihåglappar, berätta historier och sannsagor — ty även i matematik är

verkligheten underbarare än dikten. *Från min klass* fullbordar en "historisk utveckling" med Inger Björneloos lågstadiesbarn genom tre läsår.

Det första numret handlar mycket om hur vi kan och ska tillvarata elevernas kreativitet i matematikundervisningen. Några smakprov: I artikeln *Hur blev den intelligenta en dum elev* pekar Svante Silvén på orsaker till att det fantasirika, logiskt tänkande barnet blir en fantasilös elev i gymnasiet utan självförtroende och initiativkraft. En artikel som angår alla lärare! *Är elevernas problem värre än lärarens?* Här ges förslag till hur man tränar problemlösning på alla stadier. Flera intressanta problem finner du i artiklarna *Matematikolympiad i Uddevalla* och *1981 — ett ovanligt normalt år* (utom i NÄMNAREN!)

Hur ska man individualisera? Det är en alltid lika aktuell fråga. Vi försöker svara på den i nummer 2. Alternativ metodik, alternativkursernas vara eller inte vara, olika sätt att individualisera tas upp. Det kommer också en intressant intervju med en känd personlighet i svensk matematikundervisning... Vem? — Det får bli en hemlighet tills vidare...

Geometrin har fått ökat utrymme i matematikkurserna på alla stadier. Nummer 3 ägnas uteslutande åt detta tema. Vi tar upp kursplanerna — vad gäller geometri — från låg- till gymnasiestadiet med kommenterande artiklar — tips och idéer. *Uppslaget*, *Problemavdelningen* osv. — allt kommer att ägnas åt geometri.

I nummer 4 kommer sedan presentationen av vinnaren av 1982 års NÄMNAREN-pris och det vinnande bidraget. Det är väl inte heller otroligt, att det kommer en del rapporter och efterskörd om den svenska matematikundervisningen, sådan som den visade sig vid Matematikbiennalen 1982...

VÄLKOMMEN TILL NÄMNAREN!

