

Lösningar till problem 920—932



285 elever från 39 olika klasser har sänt in lösningar till problemen i nr 3 av Nämnaren. Dessutom har det kommit gemensamma lösningar från sex klasser från åk 4 till åk 9. Lösningarna är sammanställda av Lennart Skoogh.

Allra flitigast med problemlösandet har man varit på *Snyggatorpsskolan* i Klippan. Så här skriver *Allan Henriksson*, studierektor på skolan:

Då jag under påsklovet läste Nämnaren beslöt jag genast att engagera mina Ma-avdelningar. Jag tyckte dessutom att övriga Ma-lärare på skolan borde delta och informerade dem om arrangemanget, dels skriftligt, dels muntligt på Ma-konferens som vi har 40 min varannan vecka. Vid den muntliga informationen gick jag igenom de olika problemen samt gav tips om hjälpmedel för att göra arbetssättet så laborativt som möjligt för elever som ej genast finner lösningen. Samtliga lärare tyckte det var ett bra initiativ.

Allan har också gjort en enkät bland de deltagande lärarna. Av den framgår det bl a att man lyckas bäst med sammanhållen klass på mellanstadiet medan det på högstadiet varit grupparbete eller enskilt arbete till övervägande del. Både lärare och elever har varit positiva till arbetet och på frågan vilka uppgifter som lösts laborativt gavs svaren:

920 Elever skakar hand

921 Ritning på rutat papper, lagt tärningar runt ytterkanten på en platta (6×8 tärningar).

922 Pappersremsa eller snöre och sax.

Pappersremsa som vikts och sedan räknat antalet vikningar.

927 Pappersremsa eller snöre och sax.

928 Pappmuggar och vatten.

929 Tändsticksaskar med felaktiga etiketter plus riktiga lösa etiketter samt spelkuler.

931 Spelkuler, "pärlor".

Tack för bra initiativ, Allan!

Ingvar Ståhlberg på *Solängsskolan* i Örkelljunga arbetar på en friskola med undervisning i B-form och har möjlighet att följa sina elever från åk 4 till åk 9. Särskilt roligt tycker han det har varit att arbeta med problemen i 4—5:an. "Jag har använt en samtalsundervisning som jag tror har hjälpt någon elev att komma ifrån sin mathofobi", skriver Ingvar.

Så till lösningarna. De allra flesta är riktiga och många har förklarat utförligt, hur de har kommit fram till svaren.

920 Då värterminen slutade skakade alla de 24 eleverna hand med varandra. Hur många handskakningar blev det?

Flera olika metoder har använts. På Solängsskolan i Örkelljunga fick elev A skaka hand med alla sina 23 kamrater och sedan lämna klassrummet. Elev B gjorde samma sak fast nu fanns det ju bara 22 kamrater. Till sist adderade man alla handskakningarna.

Klass 4 B på *Odelbergsskolan* i Strömstad skriver:

”Efter test med 7 elever upptäcker vi, att vi får en följd

$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ och detta ger uppställningen $23 + 22 + 21 + \dots + 3 + 2 + 1$. Vi parade då ihop 1 med 23, 2 med 22, osv och fick $11 \cdot 24 + 12 = 276$.”

Susanne, Lena, Pia och Cissy i klass 7 B på Arabyskolan i Växjö tänker så här:

24 elever skakar hand med 23 elever. För att de inte ska skaka hand två gånger måste man dela med två

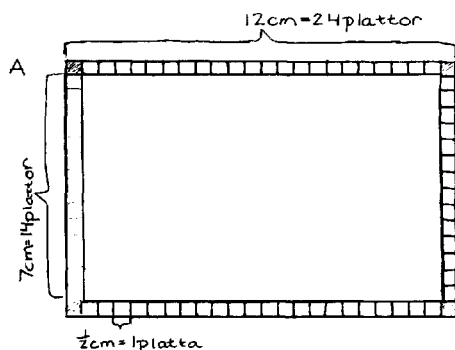
$$\frac{24 \cdot 23}{2} = 276$$

- 921 Ett golv som är 12 m långt och 8 m brett ska beläggas med kvadratiska plattor, som har en halv meters sida. Hur många plattor går det åt för att lägga
- en rad längs väggarna?
 - halva golvet?

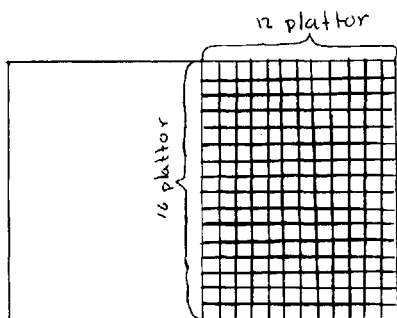
De flesta har ritat i skala 1:100 på rutat papper och därigenom funnit rätta lösningen. Endast några, som försökt lösa problemet utan figur eller praktiska försök, har fått fel svar.

Så här ser lösningen från Peter och Anders i Arabyskolans klass 7 i Växjö ut:

A Svar Det blir $48 + 28 = 76$ plattor



B Svar: Det blir $12 \cdot 16 = 192$ plattor



- 922 För att dela en stång i 8 delar får Sven 1,40 kr. Hur mycket bör han begära för att dela en likadan stång i 16 delar?

Många har här svarat, att eftersom stången skall delas i dubbelt så många delar bör Sven ha dubbelt så mycket betalt. Om eleverna hade fått pröva *praktiskt i slöjden* hade svaret nog blivit ett annat.

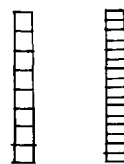
”De flesta eleverna svarade genast 2,80 kr, men när vi ritade på tavlan och såg att betalningen hängde samman med antalet *delningar* så förstod alla, att betalningen var 20 öre per delning”, skriver Ingvar Ståhlberg i Örkelljunga.

Klass 7 D på Matteusskolan i Stockholm konstaterar:

Han får förstas betalt för att *dela*. För att få 8 delar måste man göra 7 snitt. $140 \text{ öre} / 7 \text{ snitt} = 20 \text{ öre per snitt}$.

$16 \text{ delar} = 15 \text{ snitt}$. $15 \cdot 20 \text{ öre} = 3 \text{ kr}$.

Så här ritar och resonerar Annette, Zenita och Niki i klass 9 a, Snyggatorpsskolan i Klippan:

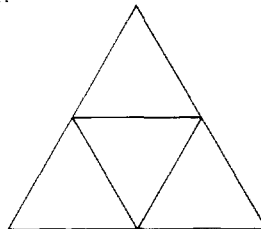


7 delar. 16 delar.
7 delningar 15 delningar

7 delningar motsv. 1,40 kr
1 delning motsv. $\frac{140}{7} = 0,20 \text{ kr}$
15 delningar motsv. $0,20 \cdot 15 = 3 \text{ kr}$

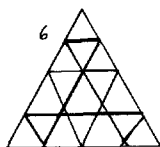
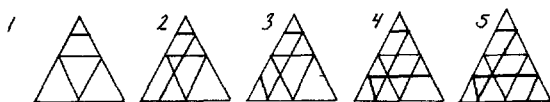
Svar: Han bör begära 3 kr.

- 923 Dra 6 linjer i den här triangeln så att den delas i 16 likadana småtrianglar. Hur många trianglar finns sedan *totalt* i figuren?



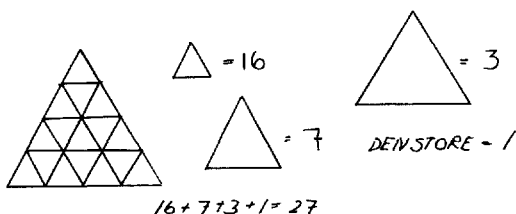
Anna Lundell, klass 4 C, Centralskolan i Hjo har själv försökt lösa alla uppgifterna. En del var nog lite svåra, men att det blev 27 trianglar klarade hon galant.

Det visades många olika prov på hur man kan dra de 6 linjerna. Så här gjorde *Malin* och *Pernilla* i klass 7 D på *Snyggatorpsskolan*.



Det finns 27st trianglar

Lösningen från *Marie Karlsson* i klass 7 A på samma skola ser ut så här:

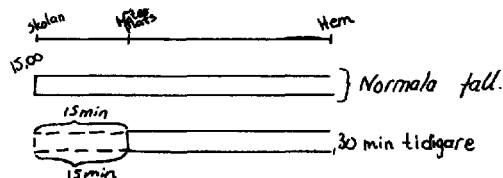


SVAR: DET FINNS 27 TRIANGLAR

924 En grupp elever brukade hämtas av skolbilen kl 15.00 En dag slutade de redan kl 14.00 och gick genast skolbilen till mötes. På så sätt kom de hem en halv timma tidigare än vanligt. När mötte de skolbilen?

Så här funderar *Anna Nordin* i klass 4 på *Solängsskolan* i Örkelljunga: "Den halvtimme de vann delas i två delar, en på framvägen och en på tillbakavägen. Då mötte barnen skolbussen 15 minuter tidigare, alltså kl 14.45". (Anna åker tydligen skolbuss och inte skolbil!)

Många har ritat bra figurer till problemet, t ex *Janeth Ljungkvist* i klass 7 A på *Snyggatorpsskolan*. Hennes lösning ser ut så här:

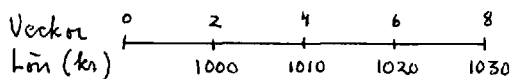


Svar: Bussen kommer till mötesplatsen

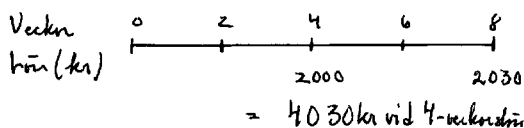
15 min tidigare dvs 14:45

925 Ann-Christine har just fått ett arbete och kan välja mellan att få tvåveckorslön på 1 000 kr med löneförhöjning på 10 kr varje gång eller fyraveckorslön på 2 000 kr med 30 kr i löneförhöjning varje gång. Vilket bör hon välja?

De flesta har gjort fina tabeller som visar hur stor lönen blir. *Mikael* och *Stefan* i klass 7 H på *Snyggatorpsskolan* har gjort så här:



Lön totalt på 8 veckor:
= 4060kr vid 2-veckorslön



= 4030kr vid 4-veckorslön

Oftast ser dock tabellerna ut så här som *Anders Björklund*, 9 B, *Snyggatorpsskolan* visar:

Tid (veckor)	2-veckors lön (kr)	4-veckors lön (kr)
2	1000:-	—
4	1010:-	2000:-
6	1020:-	—
8	1030:-	2030:-
10	1040:-	—
12	1050:-	2060:-
Inkomst efter 12 veckor	6150:-	6090:-

Många har försökt att reda ut problemet med ord. Även de som har hållit på rätt alternativ har dock haft lite svårt med motiveringarna. Det är ju faktiskt så att lönen höjs med 40 kronor per fyraveckorsperiod enligt det första alternativet (10 kr varje tvåveckorsperiod).

Några har försökt att lösa problemet med procenträkning men eftersom procenttalet ändras hela tiden är metoden inte bra här.

926 Kalle Luring sålde sin begagnade bil för 5 000 kr. Nästa dag köpte han tillbaka samma bil för 4 500 kr och sålde den på nytt för 5 500 kr. Hur mycket tjänade han på affären?

På den här uppgiften varierar svaren en hel del. Vanligast är svaret 1 000 kr men även 1 500 kr och 6 000 kr har sina förespråkare. Så här skriver

Olof, Lars och Paul som går på Snyggatorpsskolan:

"Eftersom vi ej vet vad han från början köpte bilen för eller vad den är värd, kan vi inte räkna med de 5 000 kr han fick, då han första gången sålde bilen. Alltså tjänade han

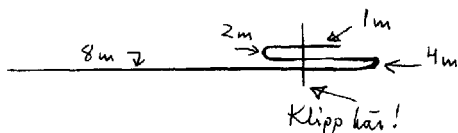
$5\ 500\text{ kr} - 4\ 500\text{ kr} = 1\ 000\text{ kr}$ på affären."

Alldeles riktigt! Uppgiften om den första försäljningen är med enbart för att förvilla.

927 En lärling ska få 1 m guldtråd i lön varje dag. Denna ska klippas från en 15 m lång tråd, men man vill klippa sönder tråden så lite som möjligt. Hur många klipp måste man minst göra, om lärlingen ska kunna få sin lön varje dag i 15 dagar?

"Trots att vi har massor av 1 m långa ulstrådar i klassrummet har vi inte hittat någon genial metod att dela tråden," skriver klass 4 B på Odelsbergsskolan i Strömstad.

"Svaret beror på hur man definierar ordet klipp", tycker Roger Henriksson i klass 9 C på Snyggatorpsskolan. Han lägger tråden så här och behöver då bara ett klipp.



Listigt! Fast nog delas tråden även här i fyra delar, så egentligen är det väl tre klipp. Många har gjort ordentliga tabeller. Den tydligaste ser ut så här och kommer från Andreas, Johan och Anders i klass 8 G på Snyggatorpsskolan.

Lön under dag...	Han får:	Han kommer tillbaka:	Antal klipp:
1	1 m-bit	Inget	1
2	2 m-bit	1 m-biten	1
3	1 m-biten	Inget	
4	4 m-bit	2- och 1 m-bitarna	1
5	1 m-biten	Inget	
6	2 m-biten	1 m-biten	
7	1 m-biten	Inget	
8	8 m-bit	4-, 2-, och 1 m-bitarna	
9	1 m-biten	Inget	
10	2 m-biten	1 m-biten	
11	1 m-biten	Inget	
12	4 m-biten	2- och 1 m-bitarna	
13	1 m-biten	Inget	
14	2 m-biten	1 m-biten	
15	1 m-biten	Inget	

Sammanlagt antal klipp: 3 st

Svar: Det behövs 3 st klipp på guldtråden för att lärlingen ska få sin lön varje dag.

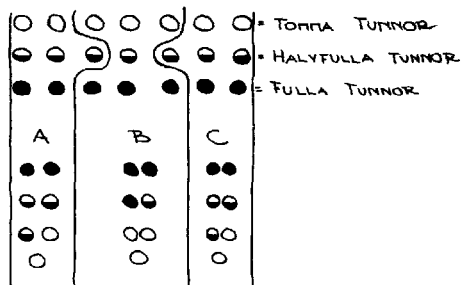
928 Tre bröder ärvt 21 vinfat, varav 7 var tomma, 7 var halvfulla och 7 var fulla med vin. Var och en ska ha lika många tunnor och lika mycket vin. Hur ska fördelningen göras

a) om man får hålla över vin från ett fat till ett annat

b) om man inte får hålla över något vin?

a) "Man fyller de 7 tomma faten till hälften med vin från var och en av de 7 fulla faten. Då har man 21 halvfulla fat och varje bror får 7 st sådana." Så skriver Lena och Anna klass 9 F på Snyggatorpsskolan.

b) Den här figuren från Jessica och Cecilia på samma skola är väl tydlig:



SVAR: VARJE BROR FÅR 7 TUNNOR, SAMMANLAGDA INNEHÅLLET BLIR FÖR VAR OCH EN $3\frac{1}{2}$ TUNNOR. FÖRDELNINGEN FRÅNGÅR AV FIGUREN.

Lars Johansson, 7 A, på Snyggatorpsskolan är den ende som funnit två lösningar på b-uppgiften. Han ger även alternativet

A: 3 fulla 1 halv 3 tomma

B: 3 fulla 1 halv 3 tomma

C: 1 full 5 halva 1 tom

Många har använt olika slag av hjälpmedel, t ex medicinmätt och vatten och en del föredrar att räkna på vinfat som rymmer en viss kvantitet, t ex 100 liter.

929 Som betalning för en nyupptäckt oljekälla har jag erbjudits att få endera

1 kr första dagen, 2 kr andra dagen, 4 kr tredje dagen osv med fördubbling varje dag

eller

1 miljard (kronor) första dagen, 2 miljarder andra dagen, 3 miljarder tredje dagen osv med 1 miljard kronor mera varje dag.

Vilket alternativ bör jag välja om betalningen skall börja på Påskdagen och avslutas Kristi Himmelsfärdsdag?

”Vi inledde med en gissning. De flesta ville ha 1 miljard första dagen osv. Förvåningen blev stor när det visade sig att det första alternativet var mest lönande.” Så skriver man från *klass 4 A* på *Snyggatorpsskolan*.

Olof Nilsson klass 7 F (på *Snyggatorpsskolan* förstas) resonerar så här:

I första fallet får man $2^{40} - 1 \approx 1,1 \cdot 10^{12}$, dvs 1100 miljarder kronor eftersom *summan* kan skrivas:


Efter 1:a dagen $2 - 1 = 1$

2:a $2^2 - 1 = 3$

3:e $2^3 - 1 = 7$

osv

I andra fallet får man $20 \cdot 41$ miljarder kronor = 820 miljarder kronor. (Slå samman summorna från dag 1 och dag 40, dag 2 och dag 39 osv.)



930 Askarna på bilden innehåller vardera två kulor, men etiketterna med färgbeteckningarna har blivit utbytta, så att varje ask har fel etikett. Ta en kula åt gången ur vilken ask som helst tills du kan placera alla etiketter rätt. Hur många kulor behöver du ta?

Det framgår tydligt att de flesta har arbetat laborativt. Så här skriver t ex *Pernilla*, *Carina* och *Agneta* från *klass 5 A* på *Snyggatorpsskolan*:

”Vi öppnade den svart/vita asken. Där låg en svart kula. Då måste det vara svart/svart i den asken och vit/vit i den svart/svarta asken samt svart/vit i den vit/vita asken, ty alla etiketterna var falska. Vi tog bara en kula.”

Anders Björklund i *klass 9 B* på samma skola resonerar lite mera allmänt på följande sätt:

”Man tar en kula ur asken med etiketten svart/vit. Antag att man får upp en vit kula. Då kan den andra inte vara svart ty etiketterna var ju utbytta. Då måste två svarta kulor ligga i asken vit/vit ty de kan inte ligga i asken med etiketten svart/svart. I asken svart/svart ligger då en svart och en vit kula.”

Motsvarande antagande med svart kula ger det alternativ som relaterades ovan.

931 Tre pärlfiskare delade veckans fångst på följande sätt: Ledaren fick en tredjedel, andre man fick en tredjedel av det som sedan var kvar och tredje man en tredjedel av återstoden. De pärlor som sedan var kvar delades lika mellan de tre pärlfiskarna. Hur många pärlor fick var och en? (Använd riktiga pärlor att pröva med.)

Angela och *Marie-Louise* i *klass 8 B* på *Snyggatorpsskolan* har liksom många andra prövat med pärlor och kommit fram till svaret 35-26-20. *Annette* och *Marie* i *klass 8 G* på samma skola har redovisat alla sina lösningar utförligt och bra. Här har dom resonerat ungefär på följande sätt:

”Antalet pärlor måste kunna delas med talet 3 fyra gånger. Vi testade och kom fram till att det måste vara 81 pärlor.”

Patrik Tydén i *Västervik* har liksom en del andra löst problemet med hjälp av en ekvation. Några av lösningarna är mera allmänna och *Lars Johansson*, 7 A, på *Snyggatorpsskolan* ger svaret

Ledare $n \cdot 35$ pärlor

2:e man $n \cdot 26$ pärlor

3:e man $n \cdot 20$ pärlor, där n är ett heltal.

932 En dag i vintras avbröts en period med barfrost av ett ymnigt snöfall, som fortsatte med samma intensitet hela dagen. En snöplog körde ut klockan 12. Första timman gick den två mil men mellan klockan 13 och 14 bara en mil, eftersom dess hastighet var omvänt proportionell mot snötäckets tjocklek. Hur dags började det att snöa?

En del högstadieelever har med hjälp av diagram och resonemang gjort lovvärda lösningsförsök trots att problemet enligt kommentarerna fordrar goda gymnasiekunskaper i matematik. Tyvärr har det inte kommit in en enda lösning från elever på gymnasiet.

Allan Henriksson ger det rätta svaret $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

timmar före kl 12 — men visar inte hur han kommit fram till det.

Adolf af Ekenstam i *Linköping* känner till problemet och dess lösning från en engelsk bok (*Agnew*, 1942).

Lars Samuelsson i *Borås* brukar ibland använda problemet i sin undervisning och här ger vi hans lösning:

Antag att plogen gått x mil t timmar efter kl 12 och att snöfallet började T timmar före kl 12.

Plogens hastighet $\frac{dx}{dt}$ är omvänt proportionell mot snötäckets tjocklek, och detta i sin tur proportionellt mot den tid det snöar. Detta leder till differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot \frac{1}{t + T}$$

Vidare är, då $x = f(t)$:

$$f(0) = 0, f(1) = 2 \text{ och } f(2) = 3$$

och slutligen söks värdet på T .

$$x = f(t) = k \cdot \ln(t + T) + C \quad (1)$$

$$f(0) = 0 \text{ ger } 0 = k \cdot \ln(0 + T) + C$$

$$C = -k \cdot \ln T \text{ (insätts i (1))}$$

$$f(t) = k \cdot \ln \frac{t+T}{T} \quad (2)$$

$$f(1) = 2 \text{ ger } 2 = k \cdot \ln \frac{1+T}{T} \quad (3)$$

$$f(2) = 3 \text{ ger } 3 = k \cdot \ln \frac{2+T}{T} \quad (4)$$

Ur (3) och (4) får vi:

$$T = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 1}$$

$$T \approx 0,618$$

37 min före kl 12 innebär kl 11.23.

Tack för alla bidrag! Tyvärr kan vi inte vara sig ge pris till alla som lyckats lösa uppgifterna eller publicera alla namn. Följande har dock bokpris att vänta.

Anna Lundell, 4C, Centralskolan, 544 00 Hjo
Patrik Tydén, Strandvägen 3, 593 00 Västervik
Klass 4B, Odelsbergsskolan, Box 28, 452 01 Strömstad
Klass 4—5, Solängsskolan, 286 00 Örskelljunga
Klass 4A, 5A, 7A, 7F, 8B och 8F, Snyggatorpskolan, 264 00 Klippan
Klass 7B, Arabyskolan, 352 46 Växjö
Klass 7D, Matteusskolan, Vanadisvägen 16, 113 46 Stockholm

Översikt över alla nummer av *Nämnan*

Reguljära nummer¹⁾

9 årgångar nov 74—maj 83 2 425 s. Förlaget kan ge besked om vilka nummer som finns att köpa.

Utgivna temanummer

*vid en titel betyder att den fortfarande finns att köpa (augusti 1983).

Räknedosor 1 sept 75 50 s

Geometri i skolan okt 75 100 s

Geometri i skolan. Studieleddarmaterial okt 75 20 s

Datorer 1 febr 76 150 s

Räknedosor 2 sept 76 128 s

Fortbildningsguide till PUMP-projektets diagnosinstrument jan 77 33 s

MALM-Matematik på låg- och mellanstadiet

MALM I, aug 79 120 s*

MALM II, aug 79 104 s*

MALM III, aug 79 84 s*

Informationshäfte om MALM, aug 79 24 s*

Att räkna med förändringar. Försökstext gällande stegmetoder för lösande av differentialekvationer NT 3 juni 77 40 s*

Att räkna med förändringar. Lärarhandledning juni 77 48 s*

Introduktion till numeriska metoder. Försökstext NT 2 okt 77 52 s

Introduktion till numeriska metoder. Lärarhandledning okt 77 58 s

Sannolikhetslära och simulering, gymnasieskolan jan 78 98 s. (Program för Texas SR 56 jan 78 22 s. Program för Texas TI 57 jan 78 24 s.)*

Räkna med andra länder febr 78 120 s*

Individualisering av matematikundervisningen, grundskolan okt 78 64 s*

Ta chansen i skolan. 15 lektioner i sannolikhetslära för mellanstadiet nov 78 88 s*

Huvudräkning dec 78 88 s

Miniräknaren i dag och i morgon dec 78 102 s*

PUMP-projektet. Studiehandledning jan 80 48 s*

Hur blir man så bra på att räkna som i Växjö? Rapport från SÖ:s utvecklingsblock i Växjö. jan 80 64 s*

Program för studiedagar i matematik Grundskolan, jan 80 48 s
Gymnasieskolan, jan 80 32 s

Individualisering nov 81 72 s*

Geometri mars 82 72 s*

Grundläggande färdigheter dec 82 80 s*

Problemlösning mars 83 80 s*

¹⁾ Omfattar även temanummer fr o m årg 8