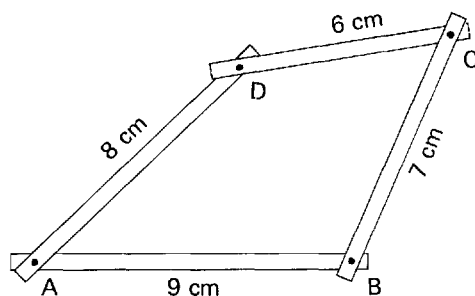


Problem avdelningen



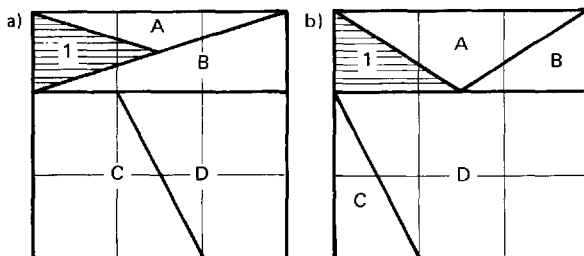
Nämnares tema i detta nummer — geometri — gäller även i problemavdelningen. Problemen är sammanställda av *John Amundsson*, Onsala. Avdelningen "Gamla problem" (uppg 826—827) har *Lars Malmius* som upphovsman. Välkomna med lösningar senast den 15 april.

818 Tillverka en fyrhörning av ungefär 5 mm breda pappremсор. Fäst ihop dem med t ex häftstift på det sätt figuren visar. De angivna måtten är sidornas längder. Själva remsorna måste vara ungefär 1 cm längre. Genom att vrida sidorna kan fyrhörningens form ändras.



- I ett par lägen urartar fyrhörningen till andra geometriska figurer. Vilka?
- Vilket är det största och vilket är det minsta avståndet mellan A och C?

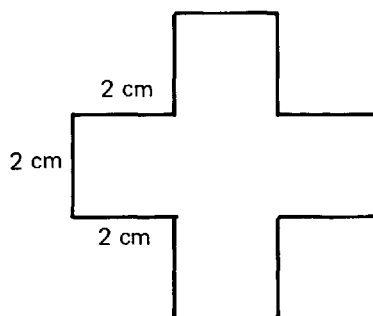
819 Den streckade ytan har arean 1 areaenhet. Hur stora är areorna av områdena A, B, C och D?

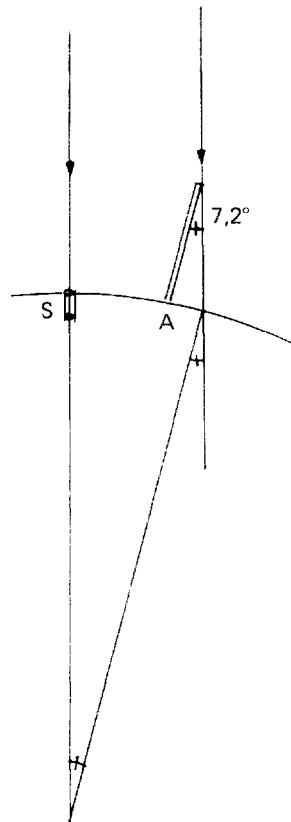
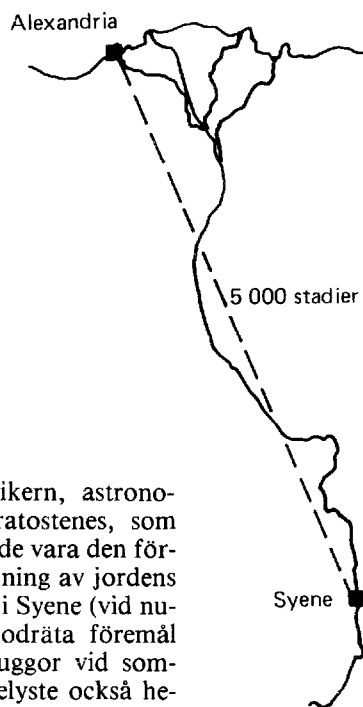


820 Figuren visar ett likarmat kors med "sidan" 2 cm. På olika sätt kan korset klippas sönder och delarna hopfogas till en kvadratisk yta.

- Beräkna denna kvadrats sida?
- Ange ett eller flera sätt på vilket klippningen kan göras.

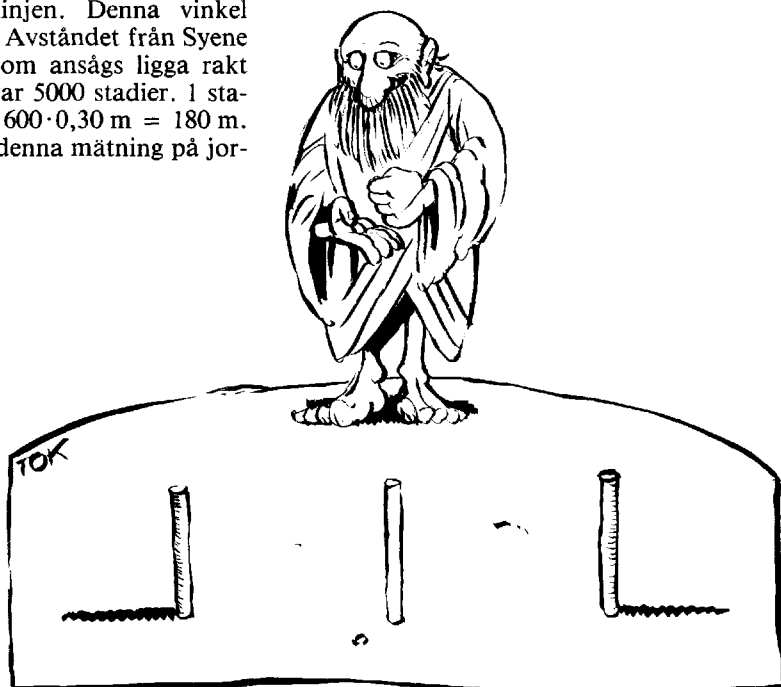
(Ur *Sperling, Denkspele für kluge Köpfe*, Albert Müller Verlag AG, Zürich, 1940).





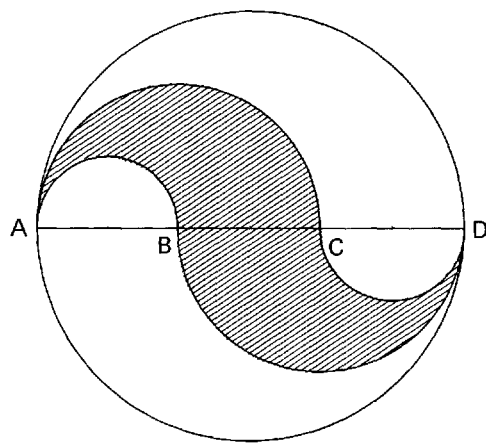
- 82/ Den grekiske matematikern, astronomen och geografen Eratostenes, som levde ca 200 år f Kr, torde vara den förste som gjort en bestämning av jordens omkrets. Han visste att i Syene (vid nuvarande Assuan) gav lodräta föremål mitt på dagen inga skuggor vid sommarsolståndet. Solen belyste också hela botten av en djup brunn med lodräta väggar. Vid samma tidpunkt gav emellertid lodräta föremål i Alexandria tydliga skuggor.

Eratostenes mätte där skuggan av en lodrät pelare och pelarens höjd och kunde sedan bestämma solstrålarnas vinkel med lodlinjen. Denna vinkel fick han till 7,2°. Avståndet från Syene till Alexandria, som ansågs ligga rakt norr om Syene, var 5000 stadier. 1 stadion = 600 fot $\approx 600 \cdot 0,30 \text{ m} = 180 \text{ m}$. Vilket värde gav denna mätning på jordens omkrets?



- 822 Figuren visar en cirkel med en diameter AD (6 dm), som är delad i tre lika stora delar AB, BC och CD. Genom fyra halvcirklar delas cirkelytan i tre delar. Vilken av dessa delar har störst

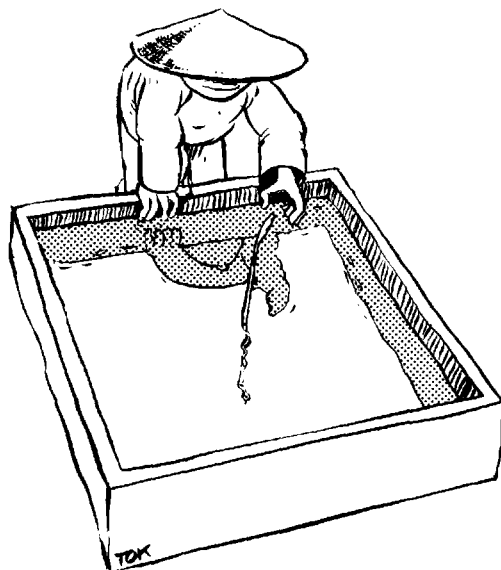
- area
- omkrets?
- Hur löser du uppgiften om sträckan ADs längd ej är given?



823 **Det kinesiska vassproblemet**

Mitt i en kvadratisk brunn med 5 m sida växer ett vassstrå, som sticker upp en halv meter över vattenytan. Om man drar det mot mitten av en sida kommer dess spets att beröra sidan i själva vattenytan. Hur djup är brunnen?

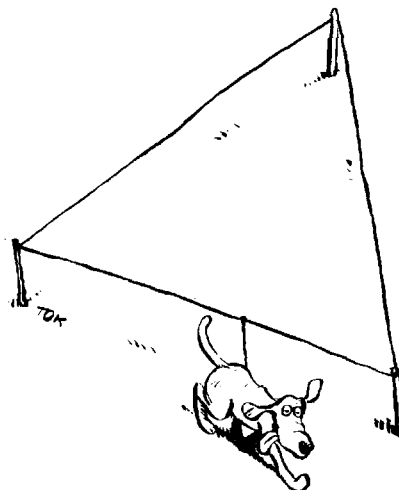
(Ur *Kiutschang*, en kinesisk räknebok från ung 2600 år f Kr. Enligt Sperling, *Denkspiele für kluge Köpfe*. Se uppg. 814.)



- 824 Kateterna i en rätvinklig triangel är 12,0 och 8,0 cm. Bisektrisen till den rätta vinkeln skär hypotenusan i A. Beräkna avstånden från A till var och en av kateterna.

- 825 En hund är kopplad så, att kopplets ena ände kan löpa utefter en lina i form av en liksidig triangel med 8,0 m sida. Kopplets längd är avpassad så, att hunden fritt kan röra sig inom ett område intill 2,0 m inåt och utåt från löplinans projektion på marken.

- Upprita den inre och yttre randen av det område inom vilket hunden kan röra sig.
- Beräkna detta områdes area.



Kontaktproblem

826 På ett slott i en öde bygd levde en gång en jungfru, skön som synden och berömd över flera socknar för detta. Hennes elake far höll henne inspärrad där, avvisande alla friare. Slottet omgavs av en kvadratisk vattenfylld vallgrav, fyra meter bred och av stort djup.

Är sceneriet klart?

Riddaren in från vänster. Bättre underrättad om jungfruns skönhet än vallgravens bredd bringar han med sig tvenne fyra meter långa bräder, gjorda av virke av sådan seghet att så inte tio man kan knäcka dem. Han finner mycket riktigt att man inte kan passera en fyra meter bred vallgrav med en fyra meter lång bräda.

Men riddaren, tidigare grundskoleelev, kan sin Pytagoras. Efter en smula grubblande lyckas han placera sina två bräder på ett så elegant sätt att han kan börja forcera vallgraven.

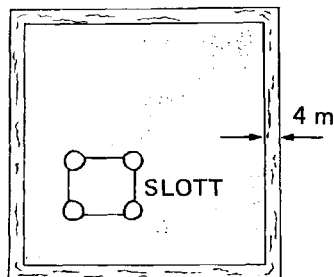
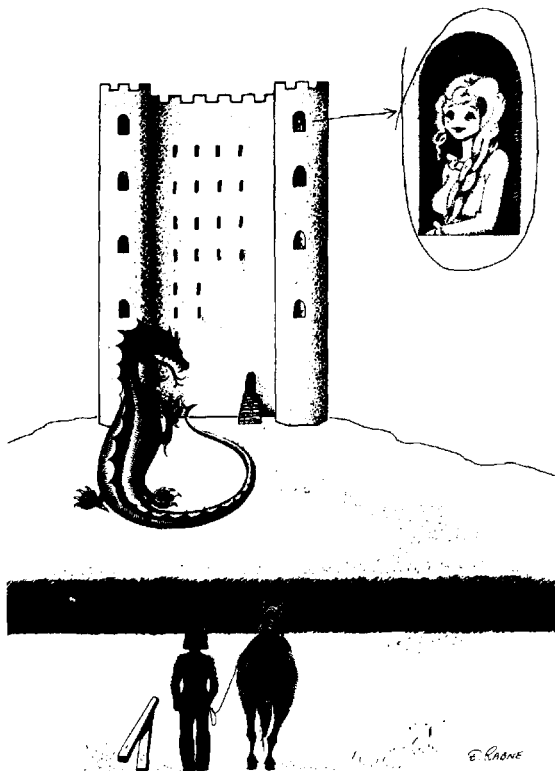
Detta tilltag upptäcks av jungfruns far, som då tillkallar en i vallgraven inneboende eldsprutande drake. Dragens dåliga andedräkt tvingar riddaren att retirera.

Dock — skam den som ger sig. Riddaren hastar hem, inhandlar tvenne fem meter långa bräder och en eldsläckare, cylindrisk modell, övertalar sina sju bröder att assistera och vänder tillbaka till slottet.

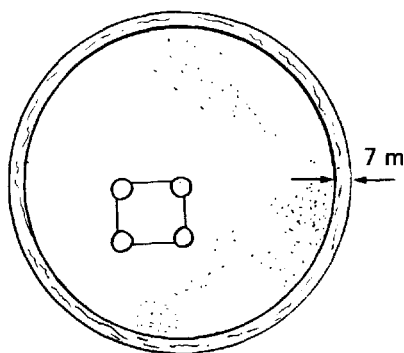
När man når vallgraven med bräder, bröder och eldsläckare väntar en ny besvikelse. Jungfruns far har under tiden byggt om vallgraven. Den är nu sju meter bred och går i en cirkel runt slottet. Draken har dock dött, kolosförgiftad.

Riddaren finner dock på råd. Integrande sina insikter i matematik och fysik lyckas han, trots rustningens tyngd vilken medför indisposition för längdhopp av större spännvidd än en meter, ta sig och sina sju ävenledes bepansrade bröder över vallgraven helbrädda.

Källorna är därefter oense om den vidare händelseutvecklingen. Somliga påstår att riddaren och jungfrun kort därefter inträdde i det äkta ståndet, andra hävdar att de levde lyckliga i alla sina dagar.

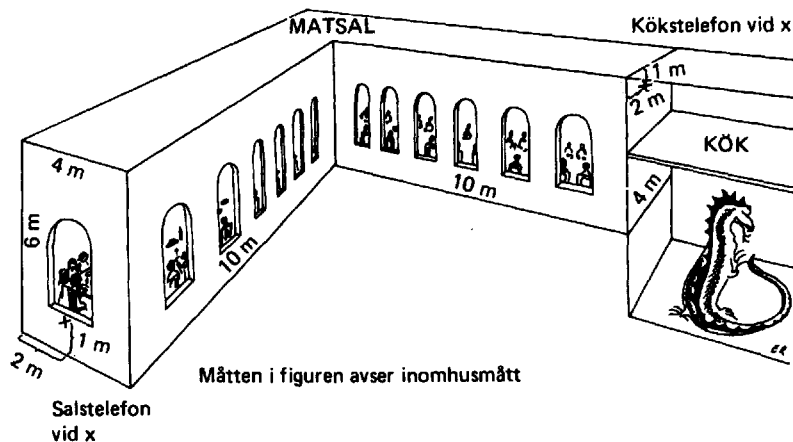


Första försöket



Andra gången gillt

Fråga: Hur skedde passerandet av vallgraven vid de två försöken? Inga rep, ingen spik eller annat material att hopfoga bräderna fanns, och området kring vallgraven var helt plant.



När så riddaren väl är inne på slottet, så står han inför nya problem.

- 827 Riddarslottets nybyggda representationsmatsal är en magnifik vinklad historia med 6 meters takhöjd och direktanknytning till kök och drakhåla (vi har ännu inte hunnit fram till de automatiska avfallskvarnarnas epok).

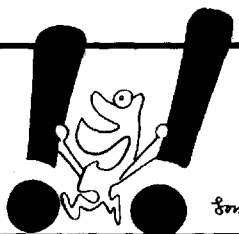
Tyvärr innebar planlösningen svårigheter för kökspersonalen att förflytta sig till matsalen (talja och block), men arkitekten (som senare hamnade som planeringsexpert vid SÖ) ansåg anordningen ur prohiladogistisk synvinkel utsökt, ett argument som riddaren var ur stånd att bemöta. Nåväl, till saken.

Riddaren har upprepade gånger haft

svårigheter att från sitt högsäte vid matbordets kortsida göra sin stämma hörd i köksregionerna. Han beslutar därför att installera snabbtelefoner: en apparat i kökets talöppning och en bakom sin stol, hängande på väggen. Småsnål vill han dock minimera sladdlängden och tänker sig då låta sladden hänga fritt i luften mellan de båda apparaterna. Hans ljuva gemål anser dock den lösningen alltför oestetisk och anmodar honom att fästa sladden — vid golv, väggar eller tak. Det gör ingenting om den dras framför några fönster men den får i övrigt inte hänga lös någonstans.

Uppgift: Beräkna sladdlängdsminimum (inomhusmontering förutsätts).

Lösningar till problem 801—807



Tack för alla insända lösningar till problemen i nr 1 81/82. Vi har gjort följande urval. Bidragsgivarna har en pyramid att hämta på posten.

- 801 6 klockslag innebär 5 tidsintervall
= 5 s
12 klockslag innebär 11 tidsintervall
= 11 s

Svar: Det tar 11 sekunder för klockan att slå 12 slag.

Roland Munther, Uppsala

- 802 36 fimpar ger 6 cigaretter som ger 6 fimpar d v s en ny cigarett som i sin tur ger 1 fimp. Han har nu fem fimpar. Hans gode vän har emellertid åtminstone en fimp som kortfristig lånas ut. Så rullas den sista cigaretten och när den

rökts upp återlämnas fimpen. Alla 40 fimparna har nu gått upp i rök.

Svar: 8 cigaretter

Axel Ericson, Gnesta

803 $a^2 - b^2 = 1981$

$(a+b)(a-b) = 1981$

Problemet är alltså möjligt att lösa om man kan dela upp talet 1981 i faktorer, där a och b ingår som naturliga tal. I detta speciella fall är lösningarna lätta att hitta.

Fall 1: $1981 \cdot 1 = 1981$

$$\begin{cases} a+b = 1981 \\ a-b = 1 \end{cases} \quad \text{ger} \quad \begin{cases} a = 991 \\ b = 990 \end{cases}$$

Fall 2: $283 \cdot 7 = 1981$

$$\begin{cases} a+b = 283 \\ a-b = 7 \end{cases} \quad \text{ger} \quad \begin{cases} a = 145 \\ b = 138 \end{cases}$$

Svar: $1981 = 991^2 - 990^2$ alt.

$1981 = 145^2 - 138^2$

Alf Gunnarsson, Eksjö
Alf Gruvö, Eksjö

804 Enklaste sättet att lösa problemet är nog att prova sig fram steg för steg till svaret 14285

$abcde7$

$$\begin{array}{r} \cdot \quad 5 \\ \hline 7abcde \end{array}$$

Det framgår omedelbart att e måste vara lika med 5. Då $e = 5$ måste $d = 8$ osv.

En alternativ lösning

Antag att det ursprungliga talet är $10x + 7$

Ekv. $5(10x+7) = 700\,000+x$

$50x+35 = 700\,000+x$

$x = 14285$

805 a) Antag att ($x \neq 0$)

$x^7 = \frac{a}{b}$ och $x^{12} = \frac{c}{d}$. Då är

$$x = \frac{x^{36}}{x^{35}} = \frac{(x^{12})^3}{(x^7)^5} = \frac{c^3 \cdot b^5}{d^3 \cdot a^5}$$

och alltså x rationellt.

b) Motexempel:

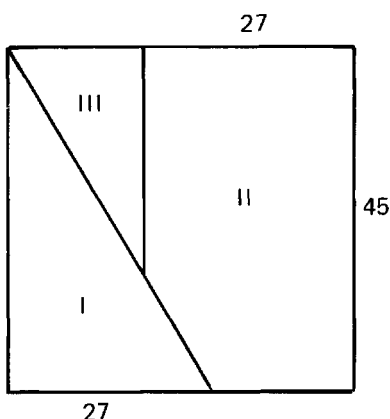
Sätt t ex $x = \sqrt[3]{3}$ vilket är irrationellt.

Då är $x^3 = 3$, $x^9 = 27$, $x^{12} = 81$ dvs x^9 och x^{12}

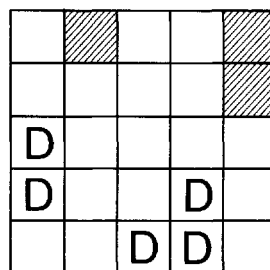
kan vara rationella utan att x är rationellt.

Dag Jonsson, Uppsala

806



807 a) Om de fem damerna D placeras som figuren visar kan de skuggade rutorna inte nås direkt.



b) Med denna placering kan samtliga rutor attackeras.

