Från Bibeln till datorn — så har man fått π

JAN UNENGE

Alla cirklar är runda har en tänkare sagt. Matematikern konstaterar med lite större terminologisk skärpa att alla cirklar är likformiga. Därför måste förhållandet mellan olika delar vara detsamma för alla cirklar. Till exempel förhållandet mellan omkretsen och diametern. Och detta förhållande har fått beteckningen π — introducerat på 1700-talet av en engelsk matematiker.

Gammal kunskap

Att π är ungefär lika med 3,14 tillhör de matematikkunskaper som de flesta människor bär på. Men talet har en fascinerande historia.

Den börjar långt tillbaka och då ansåg man uppenbarligen att förhållandet mellan en cirkels omkrets och diameter var 3. I Första Konungaboken i Bibeln framgår detta på flera ställen. När Salomos berömda tempel beskrivs, står det till exempel om det s k kopparhavet.

"Det var tio alnar från den ena kanten till den andra, runt allt omkring och ett trettio alnar långt snöre mätte dess omfång".

Det blev Arkimedes som på 200-talet före Kristus gav ett bättre värde på π genom att konstatera att värdet måste ligga mellan talen $3\frac{10}{71}$ och $3\frac{1}{7}$ (Se *Nämnaren* nr 1 81/82), vilket ger en förbluffande god approximation. Värdet 3 1/7 minns vi som ett ofta rekommenderat närmevärde i läroböckerna när det gällde att räkna ut omkrets eller area... särskilt om radien var en multipel av 7.

Man vet också att kineserna på 200-talet e Kr angav värdet $\pi = 3{,}14159$ sedan man använt samma metod som Arkimedes och att hinduerna några århundraden senare presenterade ett liknande värde.

Är det att konstruera problem?

De mångomtalade "gamla grekerna" började redan på 500-talet före Kristus att försöka lösa tre klassiska problem. Ett gällde att utifrån en given kub konstruera en ny med exakt dubbelt så stor volym. Ett annat problem var att dela en given vinkel i tre lika delar.

Men reglerna för problemlösandet var hårda. Man fick bara använda en passare och en linjal och detta ett ändligt antal gånger. Lyckligtvis kanske man kan säga om det sistnämnda villkoret.

Det tredje klassiska problemet brukar kallas "cirkelns kvadratur" och innebar att med passare och linjal konstruera en kvadrat, vars area är lika stor som en given cirkels.

De tre problemen fascinerade matematiker och amatörer i århundraden. Först på 1800-talet visades att de två första problemen är olösliga, vilket möjligen avhöll matematiker från att syssla med problemen. Men så sent som för ett par år sedan kunde man läsa om en person som påstod sig kunna lösa vinkelns tredelning.

Problemet med cirkelns kvadratur fick betydelse för utvecklingen av talet π. Om cirkelns radie är ett och den sökta kvadratens sida är x får man det till synes enkla sambandet

$$x^2 = \pi \text{ eller } x = \sqrt{\pi}$$

π

Vers med trettio decimaler

Många har ägnat sig åt att räkna fram decimaler på π. Ludolph van Ceulen i Leiden räknade t ex redan på 1500-talet fram 35 decimaler. Nu finns π med en miljon decimaler, framräknade med hjälp av en dator.

Så många går ju inte att komma ihåg. . . men för att hjälpa minnet finns det faktiskt verser på flera språk. Idén är att antalet bokstäver motsvarar decimalerna. Första ordet ska alltså ha tre bokstäver, andra ordet en, tredje ordet fyra. Fjärde ordet en och femte fem bokstäver osv.

Här är den engelska som ger trettio decimaler:

Now I know a spell unfailing
an artful charm for tasks availing
intricate results entailing
not in too exacting mood
(Poetry is pretty good.) Try the talisman.
Let be adverse ingenuity.

För pi-galna memorerare följer här en svensk författad av Börje Crona:

Ack, o fasa, π numer förringas
ty skolan låter var adept itvingas
räknelära medelst räknedosa
och så ges tilltron till tabell en dyster kosa.
Nej, låt istället dem nu tokpoem bebringas.

Kontrollera: π = 3,141592653 . . .

och frågan är då om man med passare och linjal kan konstruera en sträcka som är $\sqrt{\pi}$.

Den frågan sammanhänger med om π är ett rationellt tal eller inte, alltså ett sådant tal som kan skrivas som kvoten av två heltal. Och som om man dividerar täljaren med nämnaren antingen går jämnt upp eller ger ett periodiskt bråk. Om man med andra ord plockade fram fler decimaler än Arkimedes gjort, kommer då samma siffror tillbaka någon gång?

Antalet decimaler växer med tiden

År 1596 presenterade den tyske matematikern Ludolph van Ceulen π med 35 decimaler, som började 3,1415926535897... och som han på egen begäran fick inristat på sin gravsten. Under en tid fick han också i sitt fädernesland äran att man kallade π för ''det ludolfska talet''. Med Newtons och Leibniz metoder att räkna med konvergerande oändliga serier utvecklades nya möjligheter att beräkna π. Leibniz visade till exempel att

$$\pi = 4(1-1/3+1/5-1/7+1/9.......)$$

och engelsmannen Wallis att

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6...}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7...}$$

Och i och med detta var det bara att visa uthållighet och god förmåga att räkna med papper och penna för att skapa sig ett namn genom att presentera allt fler decimaler av π. År 1699 presenterades 71 decimaler, år 1824 sprängdes 200-decimalsvallen och år 1873 presenterade en engelsman, W Shanks, icke mindre än 707 decimaler.

Någon praktisk nytta av de 707 decimalerna har man förstås inte — även för de mest noggranna finmekaniska arbeten räcker Arkimedes gamla π-värde bra. Ett skäl var länge att man hoppades att π skulle vara ett rationellt tal, att siffrorna skulle komma tillbaka i samma följd. Men den förhoppningen gäckades. Några tycktes också förbluffade över att man bland de 707 decimalerna i Shanks skapelse hittade betydligt färre sjuor än andra siffror, just sjuor också, detta tal som ofta fått någon särskild magi över sig. Men i en oändlig sifferrad är förstås 707 ett något för litet stickprov.

I mitten av 1700-talet visades att π ej var ett rationellt tal och 1882 kunde så den tyska matematikern Lindeman definitivt lösa problemet med cirkelns kvadratur eller rättare sagt visa att det var olösligt. Han visade nämligen att π är ett s k transcendent tal, vilket är minst lika konstigt som det låter. Men i princip innebär det att π inte kan uppträda som rot till en vanlig ekvation och därmed kan man bl a inte konstruera $\sqrt{\pi}$ och även cirkelns kvadratur är ett olösligt problem.

Så får du pi

Talet π är inte bara förknippat med cirkeln. Om man i försäkringssammanhang vill beräkna sannolikheten för att en viss grupp människor fortfarande skall vara i livet efter en viss tid kan man faktiskt använda en formel som innehåller π. Då kan man förstå folk som undrar vad cirkeln kan ha att göra med antalet människor som lever vid en viss tid. Sanningen kanske ligger i att π — som alltså också dyker upp i serier som vi sett ovan — är en av dessa naturkonstanter som bara finns där och att det kanske var en slump att den först dök upp just som förhållandet mellan en cirkels omkrets och diameter.

Apropå slump så sticker talet π fram på ett överraskande sätt i ett nästan klassiskt experiment, Buffons nålproblem. Buffon — som levde på 1700-talet — ritade på ett papper upp ett antal parallella linjer på samma inbördes avstånd från varandra. Så tog han en nål med längden precis lika med avståndet mellan linjerna och släppte nålen på papperet. När han tog antalet gånger då nålen föll på en linje och dividerade med antalet då den stannade mellan linjerna fick han resultatet $\pi / 2$... Och gav dåtidens människor ytterligare stoff kring talet π och även ämne för en liten matematiklaboration i dag. Pröva själv.

Och Leibniz samband ovan är också en bra uppgift. Man kan göra ett program för datorn som successivt tar med allt fler termer och därmed kan ge oss allt fler decimaler i ett värde på π. Datorn kan göra det snabbt och därmed belysa hur snabb utvecklingen är inom räknandet. I en bok utgiven på 1940-talet står det att ''för att bestämma 1000 decimaler i talet π skulle i vår tid krävas tio års räknande''. Om man med vår tid menar idag klarar en liten dator detta på några minuter. Men värdet *på* π med den exaktheten kan inte mäta sig med värdet *av* π, antingen det nu gäller cirklar, serier, dödlighet eller nålar.