



Problemen har denna gång sammanställts av Lars Mouwitz och de passar kanske bäst för högstadiet och gymnasiet. De flesta av problemen lämpar sig för undersökande arbete och stimulerar till argumentation och reflektion.

2814 Vinkelrätt

Stadskärnan i en stad består av genomlöpande gator som korsar varandra vinkelrätt. Hur mycket kan man maximalt förlora i väg genom att följa gatunätet istället för "fågelvägen" mellan två korsningar?

2815 Lögnhalsar och sanningssägare

Du har kommit till ett land där varje person antingen är en konsekvent lögnhals eller en konsekvent sanningssägare. Det första du råkar ut för är att träffa tre flanörer på en gata. Den förste säger:

– Vi är sanningssägare alla tre.

Men då säger den andre till den förste:

– Nej, du ljugar, men min andre vän här talar alltid sanning!

Vilka var lögnhalsar resp. sanningssägare?

2816 Rutnätet

Ett rutnät bestående av 6×6 rutor täcks med 18 rektangulära dominobrickor med formen 2×1 rutor. Kommer det för alla tänkbara sätt att lägga ut brickorna ändå vara möjligt att lägga ett linjärt snitt som delar rutnätet i två delar utan att någon dominobricka behöver delas?

2817 Delbarhetstrick

En regel för att ett tresiffrigt tal "abc" ska vara delbart med 7 är att $2a + 3b + c$ är delbart med 7. Kan du motivera regeln?

2818 Ljusa idéer

Två cylindriska ljus är olika långa och olika tjocka. Det ena kan brinna i 7 timmar och det andra i 10 timmar. Om man tänder dem samtidigt kommer de att vara lika långa efter fyra timmar. Hur många procent längre är det längsta ljuset?

2819 Okända tal

Fem okända naturliga tal summeras fyra åt gången, vilket ger summorna:

190, 194, 196, 212 respektive 220.

Bestäm det största av de okända talen.

2820 Finns de?

Finns det reella tal x och y sådana att:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$$

2821 Omskriven månghörning

En oregelbunden månghörning med omkretsen 40 cm är omskriven en cirkel med radien 3,5 cm. Vilken area har månghörningen?

2822 Lika, men bara nästan

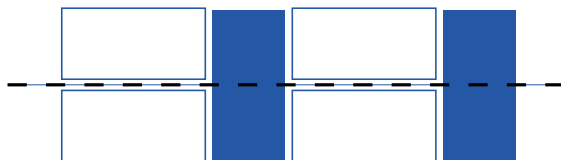
Två trianglar är likformiga, men ej kongruenta, och två sidor i den ena triangeln har samma längd som två sidor i den andra. Vilka är de två trianglar med minsta heltalsidor som uppfyller detta villkor?

Kommentarer

2814 Ca 41%. Fågelvägen blir hypotenusan i en rätvinklig triangel och läggs alla promenadens gatsnuttar ihop motsvarar de summan av denna triangels katetrar. Störst skillnad mellan hypotenusans längd och sammanlagda längden av katetrarna blir det då katetrarna är lika långa.

2815 Den förste är lögnhals, de båda andra sanningssägare. Om den förste ljuger måste den andre vara sanningssägare och då också den tredje. Anta istället att den förste talar sanning. Då uppstår en motsägelse eftersom den andre i så fall är lögnare trots att den förste försäkrat motsatsen. Det fallet kan alltså ej uppstå.

2816 Ja, det är alltid möjligt. Uppgiften kan med fördel angripas laborativt. Med resonemang kan man nå en definitiv slutsats: Om en bricka delas av ett tänkt snitt, måste snittet dela minst en bricka till, eftersom snittets längd är 6 som är ett jämnt tal, se figur nedan. Det finns sammanlagt 10 sådana möjliga snitt i rutnätet. Det skulle krävas minst 20 brickor för att omöjliggöra snittet. Eftersom det bara finns 18 brickor måste det alltid vara möjligt att lägga ett sådant snitt.



2817 Talet abc kan skrivas $100a + 10b + c$, som kan skrivas: $(2a + 3b + c) + 98a + 7b$. Om $(2a + 3b + c)$ är delbart med 7, är abc delbart med 7.

2818 40% längre. Förhållandet mellan det första ljusets längd, a , och det andra ljusets längd, b , kan beräknas utifrån:

$$\frac{3a}{7} = \frac{6b}{10}$$

2819 63. Uppgiften kan lösas med ekvationssystem, men också med denna genväg:

Summerar vi summorna får vi 1012. I denna totalsumma förekommer varje tal 4 gånger. Efter division med 4 får vi 253, vilket således är de fem talens summa. Subtraherar vi med den minsta delsumman 190, som ej kan innehålla det största talet, får vi svaret. På samma sätt kan övriga tal bestämmas.

2820 Nej, sådana tal finns inte! Kanske upptäcker man vid undersökning att det är orimligt att x och y båda är positiva, eftersom högerledets värde blir mindre än respektive terms värde i vänsterledet. Analogt kan man se att inte båda kan vara negativa. Återstår att undersöka om de kan ha olika tecken. Ett algebraiskt motsägelsebevis skulle kunna se ut så här:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{x+y} \\ \frac{x+y}{xy} &= \frac{1}{x+y} \\ (x+y)^2 &= xy \\ x^2 + y^2 &= -xy \end{aligned}$$

Den näst sista raden innebär att $xy > 0$, dvs x och y måste ha samma tecken, medan den sista raden kräver att de har olika tecken. Alltså har vi en motsägelse.

2821 Arean är 70 kvadratcentimeter. Först bör vi ta itu med ett mer generellt problem, nämligen hitta en formel för att beräkna arean av en godtycklig omskriven månghörning. Genom att triangulera månghörningen från cirkelns medelpunkt till hörnen kan vi upptäcka formeln:

$$A = \frac{Lr}{2}$$

där L är månghörningens omkrets och r är cirkelns radie. Intressant är att detta också fungerar som formel för en cirkels area!

2822 Trianglarna har sidorna 8, 12 och 18 resp. 12, 18 och 27 längdenheter. När man upptäckt att de två sidor som ej är gemensamma måste vara kuber har man kommit en god bit på väg. Men om vi tar de minsta kuberna 8 och 1 får vi bara en skenbar lösning! Varför då?