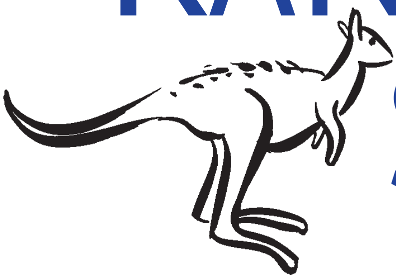
KÄNGURU SIDAN



Nu är årets Kängurutävling genomförd och vi hoppas att ni och era elever har haft glädje av uppgifterna. För oss väntar det spännande arbetet med att analysera den inrapporterade statistiken. Har vi fått det resultat vi hoppades på? Var trepoängsuppgifterna så enkla att flertalet av eleverna klarade dem? Finns det några fullpoängare i alla tävlingsklasser? Det är också intressant att se vilka uppgifter som många har klarat, och vilka som endast ett fåtal har löst och framför allt att fundera på varför. Här presenteras, i de flesta fall från årets tävlingsomgång, några problem som behandlar centrala begrepp och med kommentarer.

Miniräknare får inte användas

Så står det i informationen och vi får ibland frågan "varför"? I årets tävling finns flera problem som tydligt illustrerar detta, exempelvis:

Vilket av följande bråk är mindre än 2?

A: $\frac{19}{8}$ B: $\frac{20}{9}$ C: $\frac{21}{10}$ D: $\frac{22}{11}$ E: $\frac{23}{12}$

Man kan se bråken som division och med miniräknaren snabbt få fram lösningen. Men svaret i sig är inte intressant, utan hur vi kommer fram till det. Hur kan vi resonera oss fram till svaret? Täljaren är i alla alternativ 11 större än nämnaren – vad innebär det? Om man löser uppgiften med miniräknare blir den helt ointressant, då handlar det bara om förmågan att trycka på rätt knappar (vilket också är viktigt att kunna, men inte något som passar i Kängurun).

Att miniräknare inte får användas betyder förstås också att eleverna inte får ha tillgång till datorer eller plattor som har inbyggda räknare. Vi utgår från att de lärare som genomför Kängurutävlingen ser till detta.

Problemlösning och matematiska förmågor

Problemlösning är både ett centralt innehåll och en förmåga som ska utvecklas. Kängurun innehåller många goda problem som kan ge eleverna möjlighet att utveckla problemlösningsförmåga. Det är bra att kunna hitta en lösning men minst lika viktigt är det att kunna redovisa och argumentera för den. Dessa förmågor måste eleverna få möjlighet att utveckla.

I problemlösningssammanhang dyker ofta begreppen siffersumma och sifferprodukt upp. Termerna kan tyckas vara inkorrekta då man i strikt mening inte kan summera siffror (när vi summerar är det talen vi summerar), men sådan är terminologin.

Låt eleverna formulera en definition på ett tals siffersumma respektive sifferprodukt. Därefter kan uppgiften vara att fundera på vilket som är det största respektive minsta värde en siffersumma/sifferprodukt av ett tvåsiffrigt tal, tresiffrigt tal osv kan ha. Ett exempel som tar upp detta är uppgift 6 i *Ecolier*:

Vi har ett heltal med två siffror. Produkten av de två siffrorna i talet är 15. Hur stor är summan av siffrorna?

A: 2 B: 4 C: 6 D: 7 E: 8

Här finns det många begrepp som eleverna måste vara bekanta med: siffra, tal, heltal, produkt och summa.

Diskutera vilka tvåsiffriga heltal som uppfyller villkoret att produkten av siffrorna är 15. Välj sedan andra produkter som går att faktorisera som produkten av två ensiffriga tal. Det kan bli en bra illustration av multiplikationstabellen och en möjlighet att få använda den. Välj även t ex 13 eller 19 och diskutera primtal. Välj också produkter som ger fler faktoriseringsmöjligheter, t ex 18 eller 24. Låt eleverna göra egna exempel. Låt eleverna även arbeta med det omvända:

> Vi har ett tvåsiffrigt heltal. Talets siffersumma är 15. Hur stor är talets sifferprodukt?

Problemet kan utvidgas till ett resonemang om vilka möjliga siffersummor som finns för tvåsiffriga tal. Om vi tar bort villkoret tvåsiffriga heltal kan vi formulera problemet på följande sätt:

> Vi har ett positivt heltal. Produkten av talets siffror är 15. Hur stor är summan av siffrorna i talet?

Två av siffrorna i talet måste vara 3 och 5 men beroende på heltalets längd kan det innehålla ett antal ettor. För ett tresiffrigt tal: $15=1\cdot3\cdot5$. Talet kan vara 135, 153, 315, 351, 513 eller 531. Siffersumman för talen är 9. Har vi ett fyrsiffrigt tal, får vi ytterligare en etta i talet. Vi kan alltså inte bestämma siffersumman om vi inte känner till talets längd. Från *Cadet 2014*, uppgift 11:

> Vi har ett heltal med tre siffror. När man multiplicerar siffrorna får man 135.
> Vilken summa får vi om vi adderar siffrorna?
>
> A: 14 B: 15 C: 16 D: 17 E: 18

Denna uppgift handlar om begreppet faktorisering, d v s hur kan vi skriva 135 som en produkt av tre ensiffriga tal? $135=3\cdot5\cdot9$.

Ändra förutsättningen och låt talet vara fyrsiffrigt. Då finns det fler möjligheter: $135=1\cdot3\cdot5\cdot9$ med siffersumma 18 eller $135=3\cdot3\cdot3\cdot5$ med siffersumma 14. Den sista faktoriseringen är ett exempel på en *primtalsfaktorisering*, ett begrepp som är vanligt i många problemformuleringar, t ex i årets *Student* nr 15.

> Idag är produkten av Anders och hans son Arons ålder (i heltal) 2015. Hur mycket äldre är Anders än Aron?
>
> A: 26 B: 29 C: 31 D: 34 E: 36

Att räkna med tiden

När vi ändå är inne på skillnad i åldrar mellan föräldrar eller syskon passar följande två problem, lämpliga för resonemang. Det första är från *Student*, uppgift 1, men kan absolut användas av yngre elever:

> Andrea föddes 1997 och hennes yngre syster Charlotte 2001. Skillnaden i ålder mellan systrarna är med säkerhet
>
> A: mindre än 4 år
> B: minst 4 år
> C: exakt 4 år
> D: mer än 4 år
> E: inte mindre än 3 år

Här kan det vara lämpligt att resonera om alternativens innebörd, orden mindre än, minst, exakt, mer än och inte mindre än. Problemet kan förstås förenklas för de yngre eleverna, t ex kan vi ange när på året systrarna fyller år. Om åldersskillnaden alltid kommer att vara densamma mellan dem är något som också kan undersökas och diskuteras. *Benjamin* uppgift 15 kan säkert ge många en aha-upplevelse:

> Sofia och hennes mamma är båda födda i januari. I dag, 19 mars 2015, adderar Sofia året hon föddes, året hennes mamma föddes, sin egen ålder och mammans ålder. Vilket resultat får hon?
>
> A: 4028 B: 4029 C: 4030 D: 4031 E: 4032

Varför är deras födelsedagar angivna? Varför ligger de i januari? Hade uppgiften påverkats av om Sofia skulle adderat året hon föddes, sin ålder, året mamman föddes och mammans ålder?

Detta samband, d v s att födelseårtalet plus åldern ger aktuellt årtal är det inte säkert att alla har klart för sig, eller har tänkt på. Visa gärna hur man kan se tiden som en linje, jämför med tallinjen, och undersök hur man kan räkna på årtal. Det finns mycket intressant matematik att göra med år och åldersrelationer. Låt gärna eleverna formulera egna uppgifter utifrån dessa uppslag. Man kan också leka med datum och siffersummor som i *Benjamin* nr 8:

> Varje dag skriver Anna upp dagens datum och beräknar summan av siffrorna. Den 19 mars skriver hon 19/03 och beräknar $1+9+0+3=13$. Vilken är den största summan hon kan få under året?
>
> A: 7 B: 13 C: 14 D: 16 E: 20

Som en fortsättning på detta problem kan vi skriva upp dagens datum (t ex 21 april) som ett tal, 2104, och sedan fortsätta med årets samtliga datum. Vilka tal finns i listan? Går det att göra en systematisk uppställning? Be eleverna beräkna siffersummorna som dessa tal ger. Vilka olika summor finns? Utgå från en given siffersumma, t ex 15, och låt eleverna undersöka vilka datum som har den summan. Uppgiften kan också användas till en statistisk undersökning. Hur ofta förekommer olika siffersummor?

Det vi kanske oftast associerar till siffersumma är delbarhet. Att kontrollera om ett tal är delbart med 3 eller 9 går snabbt om man beräknar talets siffersumma och undersöker om den är delbar med 3 eller 9. Låta eleverna undersöka delbarhet med 3 för talen i siffersummelistan och uppmuntra dem att söka efter ett samband. Undersökningen kan för elever som behöver utmaningar mynna ut i ett bevis. *Benjamin* nr 8 handlade om största möjliga siffersumma. En fortsättning på arbetet kan vara att plocka upp *Student* 18:

> I en burk finns 2015 kulor, numrerade 1 till 2015. Kulor med lika siffersumma har samma färg och kulor med olika siffersumma har olika färg. Hur många olika färger på kulor finns det i burken?
>
> A: 10 B: 27 C: 28 D: 29 E: 2015

Här gäller det att ta reda på hur många olika siffersummor som kan förekomma. Om man har resonerat om minsta respektive största möjliga siffersumma för tvåsiffriga och tresiffriga tal har man en bra grund att utgå från för att bestämma antalet möjliga siffersummor.

Här följer några exempel på hur man kan variera och arbeta vidare med problemet:

> Undersöka hur många tal som har respektive siffersumma.
>
> Hur stor är sannolikheten att plocka upp en kula numrerad med ett tal som har siffersumma 8?
>
> Alla blåa kulor i burken är numrerade med tal som har siffersumma 8. Hur många blå kulor finns det?
>
> Vilka tal står på de kulor vars nummer har siffersumma 8?
>
> Hur många av kulorna i burken är numrerade med tal som har sifferprodukt 0? 1?
>
> Låt eleverna själva konstruera frågor om de numrerade kulorna.

Det här var några av årets problem hämtade från ett par olika tävlingsklasser. Många av problemen har en sådan potential att de med omformuleringar eller utvecklingar är användbara i flera årskurser. Alla årets problem, med facit och förslag på ytterligare arbete kommer att publiceras på ncm.gu.se/kanguru i slutet av terminen. Vi hoppas att uppgifterna blir en del av innehållet i flera matematiklektioner. I *Arbeta vidare med problemen* finns förslag på hur problemen kan varieras och där vi ger hänvisningar till liknande uppgifter i tidigare Kängurutävlingar.

Susanne Gennow